REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
L. IV. 36

ACCADEMIA DELLE SCIENZE
TORINO

N O V A
ANALYSEOS ELEMENTA

AUCTORE

JOANNE BAPTISTA NICOLAI

EJUSDEM SCIENTIÆ P. P.

ET ACADEMICO PATAVINO,

BONONIENSIS AC TAURINENSIS
ACADEMIÆ SOCIO.

TOMUS I.

PARS PRIOR.

ACCADEMIA DELLE SCIENZE
TORINO

PATAVII TYPIS SEMINARII, MDCCLXXXVI.
PROSTAT VENETIIS APUD THOMAM BETTINELLI

SUPERIORUM PERMISSU.

Inſanum quiddam eſſet, & in ſe contrarium, exiſtimare ea, quæ adhuc numquam facta ſunt, fieri poſſe, niſi per modos adhuc numquam tentatos.

Bac. Nov. Organ. Aphor. 6. Part. Secun.

Quod ſi quis conſenſu jam inveterato, tamquam temporis judicio moveatur; ſciat ſe ratione admodum fallaci & infirma niti.

Idem Præf.

TRIUMVIRIS LITERARIIS SENATORIBUS AMPLISSIMIS

ANDREÆ QUIRINO
PETRO BARBADICO
FRANCISCO IIº MAUROCENO
EQUITI, AC ÆDIS DIVI MARCI PROCURATORI

JOANNES BAPTISTA NICOLAI

ILlud meum jam diu cogitatione conceptum de renovandis principiis, quibus tota nititur Recentiorum Analyſis, difficillimum ſane & aleæ pleniſſimum conſilium non ſum auſus palam proferre, Veſtroque nomini, SENATORES AMPLISSIMI, *nuncupare, quin prius Libro tri-*

tribus abhinc annis edito de re vulgatis methodis fruſtra quæſita, & a me novis, quæ meditor, artificiis ad exitum, ut credo, perducta Mathematicorum judicia quodammodo pertentarem. In tanta vero ipſorum de hac re qua approbantium, qua improbantium diſſenſione, atque ex ipſa celebriorum dubitatione atque adeo ſilentio, illud mihi conſtitiſſe certo ſcio, opus hoc alterum, in quo rem tantam ordine tractare aggredior, poſſe me ſine ulla temeritatis nota Vobis dicare, utpote patrocinio Veſtro non omnino indignum. Hac ſpe fretus, qualis tandem cumque futurus ſit labor hic meus, qui honeſti hujus otii per Vos dati fructus eſt, totum iſtuc æqui bonique Vos facturos pro Veſtra humanitate confido. Nihil enim aliud propoſitum mihi eſt, quam ut, ſi fieri poſſit, & ejus Scientiæ, quam mihi pertractandam aſſignaſtis, limites proferam atque extendam, & teſtatum apud animos Veſtros relinquam me beneficentiæ Veſtræ debere omnia, atque accepta referre.

Prid. Non. Maji An. 1786.

PRÆ-

PRÆFATIO.

§. 1. NE quis forte miretur me, cum hactenus expertus fuerim quam parum ſollicitam meo illi triplici Opuſculo (*) ſe ſe præbeat pars maxima Mathematicorum, nunc iterum virium mearum periculum facere velle, nec a tanta novi prorſus atque inauſi Operis molitione deſiſtere: profiteor memoratum libellum non alia mehercule fata habuiſſe quam egomet meæ conditionis ac rerum humanarum non ignarus antea portenderam atque expectabam. Itaque (ut de iis modo ſileam, quæ mihi vere animos addunt) nihil mihi ſentio de ſollicitudine eſſe remittendum, eo quod ampliorem vel fautorum, vel judicum, vel lectorum numerum non invenerim rei amplitudini reſpondentem. Enimvero cum in hac Analyſeos Scientia tot tantorumque hominum ingeniis tandiu exculta, & aucta prope in immenſum, novam ego ad incredibilem inventionum copiam iniri poſſe viam pollicerer, ac ipſe eamdem ingrediens nonnulla tantum, ſatis tamen conſpicua, inde reportarem, neque ſtatim poſſem omnia ſimul perſequi, & in adſpectum lucemque proferre: non erat profecto valde ſperandum, ut Analyſtæ jure celeberrimi, ac alii, qui illorum auctoritate ducuntur, mihi ignoto homini talia offerenti atque ſpon-

(*) Della Poſſibilità della reale ſoluzione analitica del Caſo irreducibile.

denti auſcultandum eſſe putarent; quippe qui communi prorſus conſenſu ac judicio ſtatuerint a nullo umquam mortalium quidpiam probari poſſe, quod quacumque tandem ratione infirmet doctrinas illas, maxime ad *Caſum irreductibilem* pertinentes, quas & ab omnibus tenent luculenter jamdiu probatas, & ipſorum aliqui ſe profitentur in meliori adhuc lumine collocare.

§. 2. Atque ex his quidem præjudiciis fieri debuit, ut alii ne quærendum quidem cum pretii ac temporis jactura meum librum æſtimarent; alii in illius paginis curſim quærerent non quomodo mea probaretur aſſertio, ſed tantum quid a me aſſereretur, ac deinde mihi exprobrarent admirabilitatem ipſam, novitatemque doctrinæ: alii hac eadem exprobratione me peterent, licet ſimul profiterentur ſe peculiarem quamdam tractandæ Analyſeos exercitationem in meis ſcriptis agnoſcere: alii etiam illud adjungerent, meam ſcilicet, quam ipſi agnoſcunt, iſtiuſmodi facultatem idoneam eſſe ad falſa pro veris lectori obtrudenda; quaſi vero Analyſis, quæ gradatim uſque progreditur, umquam jure poſſit fallaciæ accuſari, quin in ipſo fallendi actu deprehendatur. Quod ſi aliqui a declamatorio iſto accuſandi genere ad ſingulare aliquid notandum deſcenderunt: primo quidem ipſi munus hoc nullo certo ac legitimo ordine ſuſceperunt, ſed præpoſtera omnino ratione Opus meum ne quidem totum perluſtrantes, imo maximam illius partem, *Memoriam* ſcilicet *tertiam* plane inobſervatam derelinquentes, ita ſe geſſerunt, ut quicquid dicerent, numquam rem acu tangere poſſent, & ad ipſum prope quæſtionis nodum accedere. Verumtamen iſta eorum manca & imperfecta tatio cenſuræ faciendæ, ſi aliam præterea labem non habuiſſet, eſſet aliquo modo ferenda; quippe quæ hoc tantum mali mihi attuliſſet, ut ipſis obſcuritas, at non error in meis libellis ineſſe videretur. At vero, quod eſt multo pejus, cenſores mei non modo pauciſſima, eaque a præcipuo Operis fine ſatis remota attingere voluerunt, verum ea ipſa aut nimis incurioſe lectitarunt, aut mala fide interpretati fuerunt; quandoquidem quibuſdam ſcribendi formis a me uſurpatis aliam prorſus ſignificationem ipſi tribuerunt, ac ego verbis ſane rotundis identidem declaraveram; quemadmodum inferius in §. *6.* commemorabo. Nihil igitur mirum, ſi hac falſa interpretatione immaniſſima errorum monſtra in meis ſcriptis ipſi ſe videre profiterentur: mirum tamen quod errores eoſdem ab ipſis viſos ſerio perpendere dignati fuerint, ac de iiſdem

gra-

graviter refellendis cogitaverint. Errores enimvero nimis pueriles atque ridiculi fuiſſent illi, quique ne in mentem quidem cadere poſſunt Tyronis ullius, qui Analyſim vix e limine ſalutaverit. Ac propterea qualiſcumque ego tandem ſim ingenii, ac utcumque parum in Analyticis ſtudiis toto ætatis meæ tempore a me excultis proficere potuerim, hoc mihi ſine ulla arrogantiæ ſpecie licere arbitror, ut nempe doleam ac conquerar de tali ac tanta ignorantiæ fama, quam alii quidem inconſulto, ac ſine odio, alii vero maligne, ac invidioſe, aliiſque de cauſſis, quas hic referre piget, permoti mihi inurere ſtuduerunt, quæſtionem omnem adeo perverſe ac procaciter exponentes, ut lectores inde exiſtimarent non agi a me rem maximam, ac dignam ſtudiis omnium Analyſtarum, ſed peccari graviter in rebus leviſſimis, & primas ac ſimpliciſſimas Analyſeos notiones ac regulas perverti, confundi, ac depravari.

§. 3. Sed mihi contra lætandum, quod ipſa præſtantiſſimorum Rei Litterariæ Triumvirum munificentia ac liberalitas adhuc major hoc imo tempore, & hac de cauſſa mihi clementiſſime arriſerit; quod favor mihi acceſſerit duarum inſignium Italiæ Academiarum, quæ me modo ſane perhumaniſſimo in ipſarum cenſum ultro adſcribere poſt edita mea illa Opuſcula non dubitarunt; quod me ſentiam ſummopere adjuvari ſuffragiis nonnullorum Illuſtrium Mathematicorum, qui ea quæ dixi omnino probant, tuentur, atque docent, & me inſuper ingenue hortantur, atque jubent, ut incœptum opus animoſius urgeam, ac difficultates, quibus ſeptum eſt, ſuperare coner; Algebræque abſtractiſſimæ principiis rectius ad Geometrica applicatis Scientiæ ex utraque coaleſcentis conjunctione fundamenta firmius jacere, limiteſque longius proferre incipiam. (*a*)

(*a*) Non erit abs re hîc loci proferre quæ me ad prima Analyſeos elementa omnium firmata conſenſu reſtauranda tandem impulerint, atque in tam gravi & periculoſo negotio nec ſuſpicantem primum, reluctantem impoſterum implicaverint. Cum in celeberrima illa de *Logarithmis quantitatum negativarum* nondum definita quæſtione pro ingenii mei tenuitate excutienda mecum ipſe verſarer, ne perpetuo in re tanti in Analyſi momenti fluctuarem, neve uni potius quam alteri ſententiæ temere adhæreſcerem; collatis omnibus, quæ hinc inde a ſummis Viris ſapientiſſime prolata fuerunt, in eam tandem ſententiam deſcendi, ut putarem non ſibi certe doctiſſimos hoſce Viros in hac exagitanda communibus receptis Methodis defuiſſe, ſed aliquid ipſius Scientiæ principiis

§. 4. Sed adhuc erunt nihilominus qui quicquid tentavero, nulla ne totius quidem Analyſeos, quam funditus evellent, habita ratione, jure

---

piis deeſſe, cujus ignoratione lis hæc adhuc ſub judice, atque in incerto relinqueretur. Novam igitur tentandam viam eſſe duxi, ut aliqua in tam deſperato negotio melioris exitus ſpes affulgeret; quam in ipſa *Calculi Exponentialis* atque *Logarithmici Methodo* ex integro reſtauranda inveniſſe me diu multumque cogitantem tandem exiſtimavi. Si nimirum Methodus hæc hactenus non ab origine ſua, ſed a calculo, quem dicunt *finitum*, nimis (prout eſt) anguſto deducta inverſo ordine tractaretur, & non ex calculo finito *Exponentialis*, & *Logarithmicus*, ſed ex hoc finitus calculus derivaretur. Hanc igitur ingreſſus viam æquationem exponentis infiniti nactus ſum, quæ me admonuit ex hoc præpoſtero progrediendi ordine ab infinito verſus zero mira quædam, ac nova conſequi, quæ a calculo communi a zero verſus infinitum progrediente (niſi hæc inter ſe recte noveris conciliare) prorſus repudiari videntur. Ex novo hoc atque intacto tamquam fonte aliqua nova Theoremata Serierum ope deduxi, atque in ordinem digeſta & in duodecim Capita diſtributa *Novum Calculum Exponentialem atque Logarithmicum* nuncupavi, ex quo non ſolum quæſtionem de *Logarithmis quantitatum negativarum* in ampliſſima luce collocari, ſed *Calculum* ipſum *finitum* univerſim expurgari, atque amplificari poſſe jure ſuſpicatus fueram. Novam hanc Theoriam typis edere mihi olim cogitanti (quod perficere inde non potui) animos addebat Celeberrimus noſtri Seculi Mathematicus, quem maxima, qua poſſum, veneratione proſequor; dummodo pauca quædam reformarem eruta ab æquatione poſitivi æqualis negativo, in quam calculi errore (quem tamen ipſe non inſtauraſſe laboris tædio ingenue faſſus eſt) impegiſſe me arbitrabatur: quæ æquatio cum omnium votis tamquam abſurda ejuretur, quicquid ex ipſa profluit indicta cauſſa damnatur. Hanc tamen, quam & veram & neceſſariam ex meis nova hac Theoria inſtitutis, ac ſæpius repetitis Calculis compereram, non repudiandam eſſe duxi, ſed intelligendam, atque cum aliis conciliandam, ſpeciemque repugnantiæ, quam præſefert, aut tollendam, aut ſaltem inter innumera alia paradoxa reponendam. Dum itaque in hac explananda, & nova veteribus conferenda, ac concilianda totus verſarer, præpotens veritatis vis repugnantem, & obnitentem animum communibus opinionibus præoccupatum ita devixit, ut prima, quibus totus nititur calculus analyticus reformanda & amplianda eſſe novis hiſce adjumentis principia tandem cognoverim. Verum cum hæc, quæ cogitaveram, quo magis progrediebar, eo magis a vulgatis opinionibus abhorrere intellexiſſem, mutato conſilio & Principia *Calculi Exponentialis* &c. jam in ordinem digeſta, & cetera, quæ ex iis in progreſſu manabant, in animum induxeram meum ſilentio & meditatione fovere, donec iis ſubſidiis munita in publicam lucem prodire poſſent, quibus aſſenſum etiam aliis per vim extorquerent; niſi (quæ eſt rerum humanarum conditio) quædam forte fortuna ex improviſo ſuborta fuiſſent, quæ conſilium hoc meum interciperent, meque ad Opuſcula illa mea typis committenda neceſſario adegiſſent. Opuſcula autem hæc quam fortunam ſubierint initium hujuſce Præfationis libere, & ingenue declarat; quamque poſtea maneant, quæ in hoc Libro publici juris facio, impoſterum oſtendent. Hæc commemoranda hîc duxi, ut & intelligatur me in hanc errorum colluviem non a puerili quadam homine indigna in ſubducendis calculis inſcitia (ut quidam prædicant) tractum fuiſſe, ſed ab ipſa Calculi ſublimioris origine ultima male explorata implicatum, & ut grata commemoratione proſequar eos, qui me in tam ancipiti ac lubrico loco conſtitutum privatim & publice ſuſtinere non dubitarunt.

Pri-

jure ne an injuria, recte an prave labefactare conentur. Sed erunt etiam qui cupidiores veritatis, quam contentionis, ſi quod adhuc ſub terra eſt in apricum proferam, aut animos addant, aut errorem, ſi ſubſit, detegant, &, qua ſunt urbanitate, ratione non conviciis contendant. Quod ſi ita fiat, cum nulla me res alia incendat, quam ſtudium & ardor diſcendi; tantum abeſt ut cum iis hac de re conqueri velim, ut publice profitear me gratias iis & acturum & habiturum.

§. 5. Ac ſi ſincera fide tractanda res eſt, perſuaſum habeant generalem meam Theoriam, vaſtam illam quidem, ſed tantummodo inchoatam, quæ in omnes Algebræ partes debet influere, examinandam, excutiendamque eſſe in principiis, quibus nititur. Quod ſi ea ab iiſdem principiis, quæ in aliis caſibus tamquam vera ab omnibus admittuntur, recte fluit ac deducitur, certam eam eſſe fatendum eſt, licet quæ-
dam

Primus itaque & unus, qui mea antequam typis ederentur, cum in ſermonem homi-
num & vituperationem veniſſent, verbo, & ſcriptis defendit, fuit doctiſſimus Vir, mi-
hique amiciſſimus Ab. Chiminello hujuſce Obſervatorii Socius Aſtronomus, munere &
affinitate Aſtronomo primario Ab. Toaldo conjunctus, qui in Diſciplinis Phyſicis, ac
Mathematicis multum verſatus avunculi celebritatem non mediocris ingenii laude æmu-
latur. Hic uno veritatis amore percitus quos ſæpius hac de re ſermones familiariter
conferebamus libera & attenta mente perpendens in lucem edidit Opuſculum, cui ti-
tulus *Rifleſſioni ſu la verità di alcuni Paradoſſi analitici*, in quo ordinata propoſitio-
num ſerie neceſſitatem mearum illationum ita rigide demonſtravit, ut contra ſentien-
tibus nihil reliqui fuerit, niſi ut quæ convellere jure non poterant, ſilentio & obli-
vione delerent.

Statim vero ac mea typis vulgata apud exteros pervenerunt Celeberrima Bononienſis
Academia ultro mihi aſſociationem obtulit, honorificis litteris datis Bononiæ Menſe
Julio 1783, quam biennio poſt perilluſtris Taurinenſis Academia ſequuta eſt, quæ me
Julio 1785 in ſuo, ut ajunt, *Correſpondentium* albo adſcripſit. Sapientiſſimæ nimirum
illæ Academiæ honore hoc quædam in meis Opuſculis jacta ſemina fovere non dubi-
tarunt, quæ in non ſterilem veritatem novarum ſegetem ſuccreſcere aliquando poſſe
putarent.

Tandem (ut omittam ceteros, quorum modeſtia ſilentium mihi indixit, in hiſce
diſciplinis non mediocriter verſatos, qui qua voce, qua litteris mea probarunt, meque
ad Opus hoc, quod promiſeram, incipiendum atque perficiendum excitarunt) nullo mo-
do tacitus præterire poſſum Jacobum Bernoullium ingenio, & rerum Phyſicarum ac Ma-
thematicarum doctrina præſtantem Virum non degenerem illius Familiæ, cujus fama
totam Europam pervaſit, qui nuper Petropolitanæ Academiæ adjunctus fuit, ut deſide-
rium immortalis illius Viri Euleri jam fato functi hujuſce ſpe aliquo modo leniret.
Hic Venetiis degens attente perlectis, ac ſuffragio ſuo comprobatis tum quæ Ab. Chi-
minello, tum quæ ipſe conſcripſeram, mox Patavium divertens voce etiam & jam
edita commendare, & ad Opus hoc ſtrenue urgendum mihi animos addere non dubi-
tavit.

dam conſequentiæ longius petitæ novitate ſua communem opinionem percellant; eo quod deſit aliqua intermedia veritas, quæ eas in bono veroque lumine collocet, & evidenter demonſtret. Nam, quæro, ſit ne vera ratiocinandi regula, & cum ingenuitate philoſophica congruens, ſi quis conſequentias neget ex certis principiis ortas, ea nimirum de cauſſa, quod non evidenter comprehendat quo ducat novum quoddam artificium nondum extricatum? An non ea eſt Scientiæ Analyticæ, qua de nunc agitur, indoles ac vis, ut humano intellectui maximas vires addat, quibus verum tutiſſime cernat ac perſpiciat, quod ſine valido hoc adminiculo aut non noſceret, aut falſum judicaret? Quonam quæſo alio ex fonte, ſi Geometriam (præſertim vero Analyſim) excipias, ejus notionem hauſimus, quod *paradoxon* dicimus? Spero tamen futurum ut, hoc Opere progrediens, hanc quoque difficultatem extricem, quæ reſtat una, quamque urgent contra ea, quæ jam enuntiavi.

§. 6. Ac experientia quidem & difficultates & argumenta Celeberrimorum hominum contra allata, & ipſius Calculi, quo utimur, natura patenter admonent, quominus admittantur illæ conſequentiæ neceſſario inde deductæ, unam hanc obſtare generalem perſuaſionem: nempe membra cujuſcumque æquationis algebraicæ ſigno, quod dicimus *æqualitatis*, conjuncta, debere ita *identitatem* ſuam ſervare, ut nullus omnino locus eſſe poſſit *transformationi*, quam ſæpius in ſcriptis meis directe, & evidenter demonſtravi, quam tamen aſtute ſemper diſſimularunt, ut error ſane putidiſſimus mihi affigeretur. Et ſane, ut cetera hic prætermittam, quiſque facile intelliget ex hac una præjudicata opinione, quæ omnium Analyſtarum animos occupavit originem ſuam habuiſſe quicquid hucuſque contra me allatum eſt. Notio hæc *identitatis*, quam unam tribuimus ſigno *æqualitatis*, preſſe nimis & anguſte uſurpata, quaſi ſemper idem ſonet, in cauſſa fuit, cur inſolubilem contradictionem involvere crederetur neceſſaria illa conſequentia, quæ a meis formulis oritur, nempe *poſitivum* æquale *negativo*, & *reale imaginario*: a qua qui ſibi cavere voluerunt neceſſe fuit ut quamdam perpetuam quaſi vim facerent operationibus Calculi ſane neceſſariis, quæ nullis arbitrio terminis circumſcribi aut finiri poſſunt. Atque hinc in peculiaribus caſibus eæ regulæ & canones pro libito repudiantur, quos omnes aſſenſu ſuo tamquam generales comprobarant.

§. 7. Quod ſi quæ mente primum conceperam, ea methodo pertractaſ-

ctaſſem, qua ſe ſe mihi objiecerant, cum *Calculum*, quem dicunt *ſublimem* ad trutinam ipſe mecum privatim revocarem, & neceſſarias conſequentias per ſeriem numquam interruptam ad primas elementares notiones uſque, a quibus omnino pendet, traduxiſſem; nullus dubito quin ſucceſſive rei veritatem omnes approbarent, quam nunc impugnant. Sed præterquam quod hoc diu diſtuliſſet innovationem Calculi finiti, quæ prima eſt, & apprime neceſſaria baſis ac fundamentum vaſtiſſimi hujus Operis; aliæ etiam peculiares cauſſæ fuerunt, cur primum invitus, deinde conſulto inverſo itinere incedendum eſſe ducerem. Verum ideo nimirum, quia in id manum immiſi, quod cum omnibus commune eſt, tantam incurſionem ab iis ſuſtinere debui, qui inde abſurda & abſona oriri exprobrant.

§. 8. Nam tanta hæc, ut creditur, abſurditas, cum eadem clam ſe ſe offerat in calculis ſublimioribus, ex quorum complicatione non facile apparet violatam eſſe eam identitatem, quam unice requiri ajunt, ut legitima ſit æquatio; ea a nemine reſpuitur, imo vero inter veritates neceſſarias adnumeratur. Atque hinc ea obtinet opinio: id ſcilicet, quod ego arcte teneo ac defendo, poſſe quidem *tranſcendenter* teneri ac defendi; at ſomnium eſſe, ſi quis eo ſe poſſe pervenire per calculum finitum putet. Verum hæc opinio hoc uno fundamento nititur: nimirum calculum, quem dicimus *finitum*, aliis quibus *tranſcendentis* nomen datum eſt, magis eſſe circumſcriptum: & methodum, qua in hoc finito utimur, exhauſiſſe ſeriem poſſibilium hujus ordinis, ut abſolute inveniri nequeat novum aliquod artificium, quod ad eumdem finem nos inter hujus finiti calculi limites conſtitutos perducat. Et tamen fatentur omnes, nondum adeo perfectam in hoc rem eſſe, ut a difficultatibus & ambagibus, quæ paſſim occurrunt, ipſius auxilio liceat expediri. Quod ſi tamen ſerio, & æqua lance penſitare velimus quæ in hoc Opere, & deinceps dicentur, facillime intelligemus, eam, quam quidem prædicant, finiti calculi impotentiam, non intrinſecam eſſe, ſed effictam a præjudicata eorum opinione, qui in hoc abſolute abſurdum id exiſtimant, quod libenter cum calculo, quem diximus ſublimem, congruere concedunt. Quid mirum ergo, ſi cum calculo finito modus atque unica ratio dematur, quæ in aliis ad propoſitum finem ducit, id quoque debilitetur, & ineptum prorſus reddatur, quod ſuapte natura (ut me demonſtraturum ſpondeo) majorem vim habet, quam alii omnes, qui in eo continentur, & ab ipſo originem ſuam trahunt?

§. 9.

§. 9. Nunc autem obiter quæro ab iis, quibus contraria opinio tantopere arridet, quare in caſu, quem dicimus *Irreductibilem*, per methodum *tranſcendentem ſinuum*, & *coſinuum circularium* ad æquationem ab imaginarii impedimento ſolutam perveniatur? Nonne, primo intuitu nulla calculorum ope patet transformari non poſſe imaginarium in reale, niſi in calculum recipiantur illæ meæ æquationes, & negativum æquale fiat poſitivo? Fieri enim numquam poterit, quocumque utare artificio, ut imaginarium fiat reale, niſi poſitivum fiat quod prius erat negativum, & conſequenter alia ponatur formula realis, quæ nullo erroris periculo ſubſtituatur loco imaginariæ. Sed hujuſmodi ſubſtitutio legitima eſſe non poteſt; niſi nova illa formula tam arcte conjuncta ſit cum imaginaria, ut eadem omnino eſſe videatur, & indiſcriminatim altera pro altera poſſit uſurpari. Verum quænam, quæſo, poteſt alia conjunctio excogitari, quæ hujuſmodi transformationem efficiat, ſi illam excipias, quæ una æqualitatem admittit negativi cum poſitivo, a qua immediate fluit & oritur æqualitas imaginarii cum reali? Poterit, per me licet, quilibet meditari, cogitare, quærere alium modum, viam, ac rationem; nihil erit legitimum, niſi ab ea ratione eruatur, cui tantum bellum indictum eſt.

§. 10. Et ſane imaginarium oriri non poteſt niſi ab æquatione, cujus unum membrum ſit poſitivum, alterum negativum. Nam ſi membra ambo ſunt poſitiva, reales erunt & eorum radices; ſi vero ambo negativa concipias, eorum radices imaginariæ communi diviſione per $\sqrt{-1}$ ad realitatem ambæ facile reducuntur. Ergo imaginarium neceſſario ſupponit æquationem duobus conflatam membris, ſigno contrario affectis; ſive neceſſario ſupponit æquationem $1 = -1$, a qua extracta radix exhibet imaginarium a parte membri negativi, quod proinde diviſione per $\sqrt{-1}$ tolli non poteſt. Videant igitur quam in ſe, atque in Analyſim communem legem ſanciant iniquam, qui quicquid edidi falſitatis damnant, hac una permoti ratione, quod e mea ſententia conſequeretur poſitivum æquale negativo: abſurdum eorum judicio ita inſanabile, ut quicquid ad ipſum ducit, & quicquid ex ipſo profluit, tamquam ab infecta radice falſitatis, indicta cauſſa damnandum ſit. Nam hoc conceſſo tota prorſus Analyſis corruat neceſſe eſt: cum ipſi tantum Analyſi imaginarium, atque ejus notio unice accepta referenda ſit. Si enim imaginarium eſt neceſſaria conſecutio æquationis $1 = -1$, & hæc abſolute eſt abſurda; profecto

& abſurdum erit quicquid ex hac abſoluta repugnantia neceſſario proficiſcitur. Ergo non ſolum ultima æquatio, quæ complectitur imaginarium, conſecutio neceſſaria ac immediata æquationis abſurdæ $1 = -1$, erit & ipſa abſurda, ſed antecedentes omnes æquationes, a quibus imaginarium tandem eruitur, abſolutam contradictionem involvant neceſſe eſt: quæ tamen tamquam veræ atque legitimæ hucuſque habitæ nonniſi ſollicitos tenent Analyſtas de reducendis imaginariis ad realia: quod licet univerſim conſequi non potuerint, tamen cum id in aliquibus caſibus obtineri poſſe oſtendant, argumentum de veritate hujuſmodi æquationum ipſi exhibent cumulatiſſimum. Et tamen ſi res ſecus eſſet, non ſolum totus ille antecedentium formularum nexus, a quibus imaginarium deducitur, ſed etiam conſecutiones omnes, quæ ab ipſa imaginarii formula deſcendunt, tamquam falſæ atque repugnantes eſſent repudiandæ. Ergo tandem non ſolum Methodi illæ omnes ſublimiores, utputa illa Sinuum, atque Coſinuum, &c., & quicquid demum illuſtriores Mathematici tam artificioſo calculorum apparatu ex formulis imaginariis tam acute deduxerunt (inter quos immortalis Eulerus in ſua *Introd. in Analyſi Infinit.*) longe a veritate aberraret; ſed ipſa æquationum quadraticarum ſolutio, tamquam prima imaginarii cauſſa & origo, omnino eſſet rejicienda. Hiſce vero erroribus omnibus expurgata Analyſi, qua utimur, quid tandem in ipſa ſuperſit, contra me ſentientibus judicandum relinquo. Vide præcipue Cap. III. & IV. Lib. II.

§. 11. Qua ergo ratione id vetitum calculo finito erit, quod *tranſcendenti Sinuum* &c. conceditur; cum uterque calculus illo uno qui fieri poteſt modo utatur neceſſe ſit, ſcilicet æquationum? Et ſi illi id non permittis, quo uno alter ad exitum pervenit; mireris ſi per viam finitam algebraicam non ex ſententia ſuccedat ea, quam tam anxie quærimus, ſolutio? Quod ſi nulla ratio eſt cur alter altero potior ſit, reſtat ut evidenter demonſtratum ſit, vel per utramque methodum, vel per neutram poſſe id haberi, quod quæritur. Quid, quod (ut ego ſuo loco demonſtrabo) natura ipſa æquationum æqualium zero neceſſario ſuppeditat veram & abſolutam tranſcendentem methodum, qua fit mirabilis hæc transformatio? atque omnia artificia, ut res ex ſententia cadat, quæ ab aliis methodis aſſumuntur, quas *Tranſcendentes* dicimus, legitima ex eo tantum ſunt, quod vim ſuam ab hac abſoluta a me indicata methodo mutuantur: ſed cum illæ relativæ

ſint, non æque omnibus in caſibus ad id, quod petimus, obtinendum pares ſunt.

§. 12. Illud vero hic mihi objicitur, hujuſmodi abſtractas ratiocinationes, quandoquidem veritati opponuntur, corruere ex ſe, quamvis inde concluſio aliqua ſequi videatur; mihique interdicitur ratiocinando Analyſeos veſtigiis inſiſtere, cum tamen liberum aliis ſit Analyſi ipſi non ratione, ſed opinione vim inferre. Hinc cum redargui non poſſint principia, quibus nititur illa mea inchoata Theoria; prætermiſſo prorſus, vel male inſtituto horum judicio, quaſdam tantum longe petitas illationes exagitant, tamquam falſas; eo nimirum, quod minime conveniant cum anticipata opinione, de qua hucuſque dubitatum numquam fuit. Quare priuſquam rem ipſam exponam, eo me adactum video, ut pace eorum, qui contra ſentiunt, liberrime animi mei ſenſa explicem. Ut enim non ſum neſcius, mentis noſtræ conceptiones longe ab operationibus naturæ differre; ita in philoſophicis inveſtigationibus ſuſpectæ mihi ſemper fuerunt eæ ratiocinationes, quæ principiis demonſtratis non nituntur, & certa methodo deſtitutæ ad optata non provehunt. Itaque illud ſemper pro certo habui, Analyſim, quæ ſublimior quidem, & abſtractior Scientia eſt, ſed certis ac neceſſariis fulta principiis, ſequendam eſſe quocumque ducat; modo ne ejus conſequentiæ præveniantur, aut ejus principiis vis inferatur. Aliud enim nos, aliud natura ſibi vult. Hic canon, mea quidem ſententia, certiſſimus me ad amplectendas ſine ulla hæſitatione eas omnes conſecutiones adegit, quæ neceſſario a principiis communi conſenſu receptis, & inconcuſſis deductæ ſunt, quamvis nobis non omnia circumſpicientibus aliquam repugnantiæ ſpeciem præſeferre videantur. Quapropter, cum optime noſſem intellectus humani imbecillitatem, ſi ſibi tantum, ac ſuis viribus fidat, prapoſui ſemper ratiocinationes ope calculi ſuſtentatas, ſuſpectumque ſemper habui quodlibet contrarium generale principium, quod hac ope deſtitutum in univerſorum animos ſe precario intruſerit. Quoniam igitur ex vero falſum oriri nullo modo poteſt, poſt diuturnam meditationem mihi videor fidentiſſime pronuntiare poſſe, Analyſtas, qui apparentibus quibuſdam contradictionibus permoti, violento quodam modo Analyſim pertractarunt, in cauſſa fuiſſe, cur hujus Scientiæ, quæ mirum in modum excreviſſet, progreſſus retardarentur. Nonne ſatius erat fidenter eam ſequi, &, ejus veſtigiis inſiſtendo, illius rei, ſi fieri poſſet, ſolutionem quærere, quæ a neceſ-

neceſſariis principiis deducta nec repugnans nec abſurda eſſe poterat? Non ergo objiciant, aut exprobrent, voluiſſe me latius æquo ratiocinationes meas protendere: cum illud potius propoſitum mihi fuerit, ut liberum me a cœco ac violento imperio opinionis cuſtodirem, & animoſe ea incederem via, quam monſtravit Analyſis, quæ recta eſt, & ab omni erroris periculo tuta, quæque humanam mentem ſibi dicto parentem in ſuis inveſtigationibus ſuſtentat, erigit, atque confirmat.

§. 13. Nunc autem, quod ego tali ope ratiocinando effeci, quamvis minime conſonum cum ideis a calculo petitis putetur, ex æquo comparemus cum eo, quod univerſim admittunt, & tamquam neceſſario conſequens a calculo jactant. Nam ex eo quod volo cum falſum emergere videatur, novitati meæ inviſum eſt, & nulla reddita ratione conatus meos male excipiendos putant. Sed videamus quam longe a communibus principiis aſſertiones meæ diſtent, & utrum magis an minus quam communes illæ conſequentiæ inter ſe cohæreant; & utrum magis an minus meæ ſtent nixæ notionibus analyticis, quæ jam communiter receptæ ſunt, ut ſi hæ in invidiam adductæ ſunt, illæ communes liberæ ſint ab hac labe.

§. 14. Dixi ſuperius §. 6. ſignum æqualitatis hucuſque ſignificaſſe ideam identitatis nimis anguſtis circumſcriptam terminis, ac propterea primam originem fuiſſe, a qua omnia manarent æquivoca, quæ adhuc in calculo perdurant. Ubi enim ſigno $=$ ſemper ea affigatur notio, procul dubio repugnat æquatio $1 = -1$. Nam poſita unitate primi membri non ſolum æquali unitati ſecundi, ſed etiam ipſiſſima ac illa eſt, ſive habito reſpectu ad punctum originis, ſive ad poſitionem; abſurdum profecto eſt, cum unum & idem ſint, relationes ſibi invicem oppoſitas in eodem ſubjecto, & eodem tempore ſimul eſſe poſſe. Hoc igitur in cauſſa fuit, cur haud dubitantes condemnarent, quod nova videatur, æquationem $1 = -1$, ſimulque omnes illas illationes rejicerent, quæ ab ea neceſſario fluunt. Quicumque aliquam animi ingenuitatem præſefert, fatebitur, huic uni objectioni tantum momenti ac ponderis tributum eſſe, ut falſa, quæ ſcriptis edidi, judicarent, ne quidem his perlectis; minime præſentientes, ſe hujuſmodi ſententiam in ſe ipſos potius, quam in me pronuntiare.

§. 15. Nam ſi hæc æquatio $1 = -1$ non tantum eſſet conſequentia ex falſiſſimis meis principiis, ſed etiam eſſet conſequentia neceſſaria ex calculo communi omnium conſenſu recepto; quis non vi-

det, cum inter ſe ſimul cohæreant, aut omnino amandandum eſſe tamquam abſurdum totum analyticum calculum, ſi hac de cauſſa rejicitur quicquid ego protuli; aut de ratione cogitandum, qua ſimul concilietur id, quod contradictionem videtur involvere, & abſurdum eſſe: atque ita & communes, & meas conſequentias neceſſe eſt in tuto ponere, quas ab illis nullum mentis acumen, nulla ingenii vis poterit ſeparare. In progreſſu hujus Operis, præcipue Cap. III. & IV. Lib. II. pluribus modis, & ordine demonſtrabitur evidenter hujus formulæ neceſſitas, ac veritas, evaneſcente qualibet contradictione. (*b*) Nunc ut clarius appareat, neceſſario nos a calculo communi quaſi manuduci ad hujuſmodi illationes, quæ univerſim receptæ ſunt, ſine quibus corrueret principium, quo nititur ſolutio æquationum (quas quidem illationes ideo rejiciendas eſſe putant, quia a me ſunt); placet

hic

(*b*) Adde æquationem $1 = -1$, quam impugnant, neceſſario conſequi ex principio, quod apud omnes certiſſimum eſt, quo ſtatuitur $-1 . -1$ productum poſitivum exhibere; ac conſequenter tamquam abſurdam judicandam non eſſe, niſi principium, a quo neceſſario manat, falſum judicetur. Nam poſito $-1 . -1 = 1 . 1 = 1$, hinc orietur duplex analogia $\begin{matrix} 1 : -1 :: -1 : \frac{-1 . -1}{1} \\ 1 : -1 :: -1 : 1 \end{matrix}$. Ex hac poſtrema analogia (quæ ab omnibus quidem recepta eſt, ſatis vero explicata a nemine) manifeſte apparet, rationem ſecundam eſſe inverſam primæ, & ab hac inverſione neceſſario nos duci ad poſitivum æquale negativo, & contra. Nam poſitiva unitas, quæ loco antecedentis eſt in prima ratione, negativa eſt in antecedenti ſecundæ; atque ideo omnes illæ quantitates, quæ poſita prima ratione ſunt poſitivæ, fiunt negativæ ſi admittatur ſecunda ratio, aut contra. Sane ex duabus ſimplicibus rationibus $\begin{matrix} a : b \\ 1 : -1 \end{matrix}$ orietur compoſita $1 . a : -1 . b$, ſive $a : -b$; ſed ex conceſſis $1 : -1 :: -1 : 1$, ergo loco $1 : -1$ poteſt ſubſtitui æqualis ratio $-1 : 1$; hoc modo rationes primæ ſimplices erunt $\begin{matrix} a : b \\ -1 : 1 \end{matrix}$; & compoſita $-1 . a : 1 . b$, ſive $-a : b$. Ergo erit $a : -b :: -a : b$, quarum rationum producta facile quidem æquari concedam, ſed ſimplices quantitates affectæ ſunt a ſignis contrariis in qualibet ratione. Quare tam a, quam b poſitiva, vel negativa erit, prout a ratione $1 : -1$, vel a ſua æquali $-1 : 1$ oritur: quarum alterutram cum liberum ſemper ſit ſubſtituere, eadem quantitas & poſitiva & negativa cenſenda erit, prout componitur ab $1 : -1$, vel ab $-1 : 1$, quæ veritas ab ipſa æquatione $1 = -1$ aperte declaratur, tantum abeſt ut ſit abſurda.

Et ſane nemini dubium eſt duas haſce analogias $1 : -1 :: -1 : \frac{-1 . -1}{1}$;

1 :

hic præmittere integrum §. 4. Cap. V. Lib. I. Inſtit. Celeberrimi Comitis Vincentii Riccati: „ Si duo, inquit, incognitæ valores in „ partem, in qua ipſa eſt, transferantur, oriuntur ſtatim duæ æqua„ tiones zero æquales $x - \sqrt{aA} = 0$, $x + \sqrt{aA} = 0$, qui fa„ ctores appellantur æquationis ſecundi gradus propoſitæ, quia æqua„ tionem illam reſtituunt, ſi inter ſe multiplicentur; eorum enim „ productum eſt $x^2 + \sqrt{aA}.x - aA = 0$, ideſt $x^2 - aA = 0$.

$$- \sqrt{aA}.x$$

„ Hinc tamquam Corollarium infertur, ſummam valorum incognitæ „ $-\sqrt{aA} + \sqrt{aA}$ eſſe quantitatem multiplicantem incognitam ipſam „ in ſecundo termino, quæ cum in caſu ſit zero, ſecundus terminus „ evaneſcat oportet. Infertur terminum æquationis ultimum æquare „ productum valorum incognitæ „. Quod in hac re Auctor hic præſtan-

---

$1 : -1 :: -1 : 1$ eſſe compoſitas a duabus ſimplicibus

$$\begin{matrix} \sqrt{1} : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : \sqrt{\frac{-1.-1}{1}} \\ \sqrt{1} : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : \sqrt{\frac{-1.-1}{1}} \end{matrix} ; \begin{matrix} \sqrt{1} : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : \sqrt{1} \\ \sqrt{1} : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : \sqrt{1} \end{matrix}$$: nam ſi eas

ſimul multiplices, proveniet compoſita, quæ & ipſis ex æquo reſpondet. Atque ita ſi primæ legitimæ ſunt, erunt & ſimplices. Utraque igitur ſequentium conſona veritati erit; ſcilicet $\sqrt{1} : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : \sqrt{\frac{-1.-1}{1}}$; $\sqrt{1} : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : \sqrt{1}$. Sed in qualibet harum tres priores termini iidem ſunt: ergo per communem ſententiam quartus quoque æqualis eſſe debet quarto. Erit igitur legitima æquatio $\sqrt{\frac{-1.-1}{1}} = \sqrt{1}$; ſive $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{1.1}$, ſive tandem $(-1)^{\frac{2}{2}} = (1)^{\frac{2}{2}}$; atque hinc ſi volunt, ut abſolute velle videntur, $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$ non producere niſi -1, invenietur $-1 = 1$. Hæc conſequentia ex doctrina communi tam neceſſaria eſt, quam neceſſarium principium $-1.-1 = 1.1$, ſi velis ſemper $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$. Ergo ſi rejiciendæ ſunt illationes meæ, quia recidunt in æquationem $-1 = 1$; non video quare admittendæ ſint communes, quæ recidunt in eamdem, quam predicant, abſurditatem.

ſtantiſſimus docet communiter receptum, & Analyſtarum tum veterum, tum recentiorum conſtanti uſu confirmatum eſt. Neque quiſquam, ut ego arbitror, erit qui in dubium id revocet.

§. 16. Hiſce præmiſſis dico, non poſſe veram eſſe ſuperiorem doctrinam, quæ eſt ab omnibus admiſſa, niſi vera ſit æquatio $1 = -1$. Ut hoc evidenter demonſtrem, variabilem x ſecundi factoris lineola ſuffixa hoc modo effero, ſcilicet $x' + \sqrt{aA} = 0$, & productum factorum erit

$$\begin{aligned} xx' - x'\sqrt{aA} - aA = 0. \\ + x\sqrt{aA} \end{aligned}$$

Sed ut hæc æquatio, quemadmodum Auctor, & uſus univerſim docet, fiat $x^2 - aA = 0$, ſit oportet $- x'\sqrt{aA} + x\sqrt{aA} = 0$; vel $x\sqrt{aA} = x'\sqrt{aA}$, ſive demum $x = x'$: ſed inventa eſt $x = \sqrt{aA}$, $x' = -\sqrt{aA}$, ergo $\sqrt{aA} = -\sqrt{aA}$, & $1 = -1$.

§. 17. Quod evenit in hac ſimplici æquatione, eveniet in qualibet alia affecta ſecundi gradus: Nam data æquatione $x^2 - 2mx + a^2 = 0$, & una, quam nunc habemus, methodo ſoluta, inveniemus $x = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}$; ergo $x - m - \sqrt{m^2 - a^2} = 0$, & $x' - m + \sqrt{m^2 - a^2} = 0$, qui factores inter ſe multiplicati productum dabunt

$$\begin{aligned} xx' - mx' - x'\sqrt{m^2 - a^2} + m^2 - m^2 + a^2 \\ - mx + x\sqrt{m^2 - a^2} \end{aligned}$$

$= 0$; & facta $x'\sqrt{m^2 - a^2} = x\sqrt{m^2 - a^2}$, exſurget propoſita æquatio $x^2 - 2mx + a^2 = 0$. Verum hoc ſupponit $x' = x$; ergo $m + \sqrt{m^2 - a^2} = m - \sqrt{m^2 - a^2}$, ſive tandem $1 = -1$. Demonſtratio adeo ſimplex, generalis, communibus nixa principiis, & evidens eſt, ut falſitatis condemnari non poſſit, niſi funditus evellantur principia omnia ſolutionis æquationum uſu recepta, qui unicus ſcopus, ac finis totius Analyſeos eſt; aut (ut verius dicam) niſi penitus ruat totum hoc artificioſum, ac vaſtum ædificium. (c)

§. 18.

(c) Quid, quod idem præclariſſimus Auctor docet, quodlibet radicale, ex. gr. $\sqrt{q^2}$

§. 18. Experientia tamen edoctus, illud puto futurum, ut cum legitime poni poſſit in æquatione $\sqrt{-1.-1} = (-1)^{\frac{2}{2}}$ uter-

que

$\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}$ æquari $\sqrt{-1}\sqrt{-\frac{q^3}{4}+\frac{p^3}{27}}$, extra ſignum ponendo $\sqrt{-1}$? Nam §. 8, & 19 Cap. III. Inſt. Lib. I. Tom. I. ait eſſe $\sqrt{-b}=\sqrt{-1}.\sqrt{b}$; $\sqrt{-c}=\sqrt{-1}.\sqrt{c}$. In Lib. II. Cap. XII. §. 15. radicale compoſitum ex duobus terminis $\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}$ æqualem ponit in §. 21. $\sqrt{-1}\sqrt{a^3-\frac{b^2}{4}}$: & hinc e converſo $\sqrt{-1}\sqrt{a^3-\frac{b^2}{4}}=\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}$: ut omittam alios ſexcentos caſus, ac Auctores, qui alterutram pro una hanc formulam acceperunt. Erit igitur $\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}$ $=\sqrt{-1}\sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$: fiat $\frac{p^3}{27}=0$, & erit $\sqrt{\frac{q^2}{4}}=\sqrt{-1}.\sqrt{-\frac{q^2}{4}}$, &, dividendo per $\sqrt{\frac{q^2}{4}}$, $1=\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$: ergo neceſſario ex communi doctrina, vel $1=-1$, vel $-1=1$: quæ eædem omnino ſunt ac illationes meæ; & ſi falſæ ſunt, falſum id omne eſt, quod ab omnibus Auctoribus deductum eſt, & ambiguum, fallax, & falſum quodlibet bene fundatum principium analyticum.

Quæro inſuper num legitima ſit æquatio $\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}$

$$=\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right)\times\overline{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}$$

? Quis hoc audeat negare? Facta igitur actu multiplicatione ſe exhibet æquatio $\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}$

$$=\frac{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}-\frac{q}{2}\sqrt{-1}\;-\sqrt{-1}.\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}{1-\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{\frac{q}{2}-\sqrt{-1}.\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}-\sqrt{-1}\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}{1-\sqrt{-1}}$$

: & ex Ricc. loco cit.

=

que valor $\pm$, illum pro arbitrio, altero repudiato, mordicus defendant, qui, prout res fert, aptius quod ſuperius dixi eludat; corruat licet

---

$$= \frac{\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} - \sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{1-\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{(1-\sqrt{-1}).\frac{q}{2} - (1-\sqrt{-1})\sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{1-\sqrt{-1}} = \frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.(\text{I}^a).$$

Quod ſi fiat $\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \left(\frac{1+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\right) \times \overline{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$;

erit $\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^2}{27}} = \frac{\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\sqrt{-1} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}{1+\sqrt{-1}}$

$$= \frac{\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} + \sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{1+\sqrt{-1}}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\right).\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\ (\text{II.}^a).$$

Ex (I.^{a}) neceſſario oritur $\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, ſive $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q^3}{27}} = -\sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$: ex qua deducitur vel $\sqrt{-1}\sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = -\sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, & $\sqrt{-1} = -1$; vel $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = -\sqrt{-1}\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$, & $1 = -\sqrt{-1}$. Ex (II.^{a}) vero $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$; & vel $1 = \sqrt{-1}$, vel $\sqrt{-1} = 1$. Quod ſi (I.^{am}) cum (II.^{a}) conferamus, inveniemus $\frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$;

&

cet quodcumque bene conſtitutum placitum analyticum, univerſim, & ab ipſis alias receptum. Nimirum hoc audeo dicere, quod licet animo

& $-1 = 1$. Illationes hæ omnes tam neceſſariæ ſunt & legitimæ, quam neceſſarius & legitimus eſt progreſſus, quem ſequuti ſumus: quæ propterea rejici non debent, niſi falſa aut limitata demonſtrentur principia, ex quibus manarunt. Quod ſi illatio, quæ videtur abſurda, ſatis auctoritatis haberet, ut aut negare, aut limitare & aptare circumſtantiis principia generalia poſſemus; quis non videt, omnia in hac Scientia precaria, & incerta eſſe: atque (quod in aliis Scientiis eſt prorſus inauditum) in qualibet nova quæſtione neceſſe eſſet tamquam notam ſupponere illationem, quam calculi ope reperire volumus. Data enim una, aut altera ex ſuperioribus æquationibus primo poſitis, quo præcipuo momento membrum unum alteri præponendum erit, & quomodo unum verum, falſum alterum oſtendetur?

Hinc facile intelligitur quantum ponderis habeat illa objectio, quæ opponitur ad vitandum tale dilemma, de qua in Præfat. mei Opuſculi dictum eſt: nempe; *cum poſſit* 1 *ducere originem ab* $1 \cdot 1$, *&* *ab* $-1 \cdot -1$; *&* *cum* $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ *natum ſit ab* $-1 \cdot -1$; *ex duabus radicibus* ± 1 *non poteſt eligi niſi* -1: quoniam ex iis, quæ ſupra dicta ſunt, apparet, ſi hoc verum eſſet, neque $-1 \cdot -1$ æquari poſſe 1: ut omittam (cum utrumque unum & idem ſit, ſcilicet $\frac{-1 \cdot -1}{1} = \frac{1^2}{1} = 1$) non licere pro libito in circumſtantiis peculiaribus determinare unum potius, quam alterum per factorum, a quibus idem productum derivatur. Quamquam haud gravate legem mihi præſcriptam veram eſſe concedam, dummodo & mihi eadem æquitate illud detur; ſcilicet ex $\sqrt{1} \cdot \sqrt{1}$ non manare niſi 1. Cum igitur ſit $1 \cdot 1 = -1 \cdot -1$; quæro utrum id mihi liceat quod ſequitur $\sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{-1 \cdot -1}$? Non equidem credo quamquam, modo ne oblitus ſit quid in toto calculo jam noto ſequeretur, id negare velle, quod apud omnes in uſu eſt (non ſunt enim niſi radices indicatæ, non actu extractæ); quodque illud ipſum eſt, quod deduximus ex duabus analogiis in præcedente nota (*b*), de quo etiam infra dicetur. Erit igitur $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1 \cdot 1}}$: & $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{1 \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\ \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\ \sqrt{-1}}$ ergo $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\ \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1 \cdot 1}}$. At ſi $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ æquetur ſemper negativo -1, eadem ratione $\sqrt{1 \cdot 1}$ æquabitur ſemper valori poſitivo 1. Ergo $\frac{\sqrt{-1}}{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$, &, utrimque per -1 multiplicando, $\frac{-1 \cdot \sqrt{-1}}{-1} = \frac{-1 \cdot \sqrt{-1}}{1}$, ſive $\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$: vel, communem methodum ſequuti, $\sqrt{-1} = -\sqrt{-1} = -\frac{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = -\cdot\frac{-1}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$: hinc $\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$; ac tandem $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = 1 = (-1)^{\frac{2}{2}}$.

præſenſerim objectiones, eaſque rationabiliores, quibus mea ſcripta poterant impugnari, ſimulque earum ſolutiones; tamen nulla me umquam ſuſpicio perculit, mihi id identidem negatum iri, quod aliis univerſim conceditur, & in Scientia adeo neceſſaria patere aditum potuiſſe fatali cuidam arbitrio, quo ipſa eorum præcipue opera peſſum iret, qui ut eam defendant, contra errores meos arma ſumſerunt. (*d*)

§. 19. Adde (quod mirum videri debet non fuiſſe animadverſum) in qualibet æquatione mixta ex reali & imaginario, ad quam ſæpe du-

---

Ex quo neceſſario, & legitime ſequitur eſſe concedendum, aut $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1}$ æquale eſſe unitati poſitivæ, ſi velimus intactam ſervare identitatem neceſſariæ æquationis $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} = 1$, atque hinc falſum eſſe principium, quod ſemper ſit $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} = -1$; aut, ſi velimus inviolabile ac generale aſſumtum principium $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} = -1$, neceſſariam eſſe æquationem $-1 = 1$, & conſequenter ab omni veræ contradictionis ſuſpicione longe abeſſe. Nam ſi non conceditur tamquam legitima aliqua æquatio, niſi quando exhibet identitatem valorum, neceſſarium eſt ſemper aſſumere $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} = 1$: ex quo fit, ut in communi methodo ſimul copulentur quæ ſunt inter ſe omnino oppoſita, & contradictionem involvunt. Quod ſi firmum ſit $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1}$ ſemper æquari -1, admittitur ſemper æquatio $-1 = 1$, & excluditur neceſſario altera $1 = 1$: atque ita ſibi invicem opponuntur identitas æquationis, & ſuppoſitio $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} = -1$. Cum igitur negatur æquatio $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} = 1$, negatur etiam inſcienter identitas æquationis: ideſt illud unicum momentum, quo utuntur ad veritatem æquationis cujuſcumque adſtruendam: quod tamen defendi non poteſt, niſi admittatur æquatio $\sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = 1$. Atque ita armis iis contra me decernitur, quæ in ſe convertunt illi ipſi, qui potius ut ſe defendant, me tegere deberent. Hinc cernere eſt veritatis invictam vim!

Myſterium tamen hoc omne §§. 23. & ſeqq. Cap. III. Libri II. pleno in lumine collocabitur.

(*d*) Ut aliquo exemplo rem declarem: ut e medio tollatur ſimpliciſſima demonſtratio in mea III.ª Mem.ª, qua nititur realis ſolutio *Caſus irreductibilis*, quæ negotium ipſis faceſſit, nolunt me poſſe ſupponere in duabus æquationibus §. 19. $m^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$; $m^3\sqrt{-1} = \frac{q}{2}\sqrt{-1} \pm \sqrt{-\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, m^3 primæ idem eſſe ac m^3 ſecundæ, licet ſécunda diviſa per $\sqrt{-1}$ liquido appareat prima: nihil profecto ſuſpicantes non poſſe amplius in Analyſi (ut cetera omittam) datis duabus æquationibus indeterminatis duarum variabilium, alteram ex incognitis eliminare, ut inde ſtatuantur earum noti valores. Nam ſi non poteſt aſſumi eadem m^3 in utraque mearum æquationum, quæ oriuntur ab eadem ipſiſſima æquatione, facta tantummodo vel minima mutatione: quî tandem fieri poterit ut ſupponatur eadem variabilis deducta ex duabus omnino diverſis æquationibus, ut inde eruatur tertia unius tantum incognitæ, quæ ſupponitur & ipſa eadem in ambabus illis æquationibus? En igitur penitus revulſa methodus eliminationis, & ſubſtitutionis, ſine qua in eo caſu nullo modo inveniri poſſunt valores variabilium, & vel tantillum progredi ad id detegendum, quod tantopere quæritur.

ducunt notæ methodi, neceſſario reperiri reale æquale imaginario. Nam cum ſemper liceat in una quidem parte æquationis collocare omnes terminos reales, in altera vero omnes imaginarios, procul dubio membrum reale erit æquale imaginario. Et tamen quis has æquationes judicabit abſurdas, & ab Analyſi perpetuo ablegabit? Cur igitur hac tantum de cauſſa abſurdæ dicendæ ſunt, etiamſi ab una methodo mihi adhibita conſequerentur illæ illationes, cum in eo ipſo deficere eæ ſupponantur, in quo reliquæ omnes, quibus tam utiliter, & tanto Analyſeos bono celebriores Analyſtæ utuntur, præſertim in calculis ſublimiorum ſpeculationum? Hoc niſi notum omnibus eſſet, ſexcenta poſſem hujuſce rei exempla proferre.

§. 20. Neceſſitas igitur talium æquationum, quæ pendent a calculo communi, earum veritatem confirmat. In Operis hujus progreſſu quod arcanum eſt in bono lumine collocabitur. Nunc ſatis ſit ſtatuere jure dubitari amplius non poſſe num legitimæ ſint illæ æquationes, propter quas quicquid in ſcriptis meis editis exhibui repudiarunt; & non novas eſſe, neque ex penu meo tantum deprompta, ſed communes, univerſales, a primis analyticis principiis originem trahentes, & æque atque has neceſſarias: ideoque illam falſitatis ſpeciem aliunde oriri non poſſe, quam ab aliquo vero, ſed aut ignoto, aut nimis anguſte ſumpto principio, quod unde unde anquirendum eſt, ut enucleetur, &, prout ejus natura fert, extendatur: neque id eſſe negandum, quod neceſſarium eſt, licet appareat ſpecies quædam repugnantiæ, quam ideæ obſcuræ, confuſæ, nimis anguſtæ menti objiciunt.

§. 21. Ego interim, ut ſimul concilientur veritates neceſſariæ, quæ inter ſe videntur oppoſitæ, illud certe teneo, ſi neceſſariæ ſunt tales illationes, nimis anguſtam eſſe ideam, quæ communi conſenſu verbo *Æquationis*, & ei ſigno, quod eam repræſentat, adnexa eſt. Identitas ergo non illud unicum κριτήριον eſt, quo dijudicare poſſimus an legitimæ ſint æquationes analyticæ: ſed admittenda eſt neceſſitas earum tranſmutationum, de quibus ſæpe a me dictum eſt, præcipue vero in I. Mem. §. 32.: quarum ope licet membrum alterum pro altero ſubſtituere, quoniam per legitimas ſubſtitutiones unum in aliud transformatur. Neque inde ſequitur ulla perturbatio æqualitatis illius, quam Analyſis, non mens per errorem decepta, requirit; quemadmodum mihi videor demonſtraſſe in Mem. II., ut intelligatur neceſſitas harum transformationum, quod evidenter in progreſſu Operis demonſtrabitur.

§. 22. Contra vero ſi nomine æquationis nihil aliud venire putant, quam perfectam identitatem; cum nullo modo neceſſitatem ſuperiorum æquationum negare poſſint, fateantur neceſſe eſt hanc contradictionem non meam eſſe, ſed eorum, qui ipſam mihi exprobrant, qui cum admittere nullo pacto velint diverſam illam transformationem, fateri coguntur id neceſſarium eſſe, quod juxta propriam ſententiam omnino fieri nequit: ideſt coguntur admittere ipſam identicam poſitivam quantitatem ſub iiſdem relationibus ſibi ipſi æqualem, ſed negativam, & conſequenter reale identicum cum imaginario. Quapropter alterum de duobus dicendum: aut neceſſe eſſe totum analyticum calculum hucuſque notum rejicere, & male fundatum vaſtum hoc ædificium, ac male conſumptos labores omnes in eo extruendo fateri; aut fieri poſſe ut ex legitimis principiis abſurdum ſequatur: ideoque de medio ſublatum eſſe quemlibet modum, quo certi de veritate eſſe paſſimus, & incertam eſſe quamlibet conſequentiam legitime ex veris principiis deductam. Atque hinc aliorum judicium eſto, num jure dixerim in fine §. 78. Mem. II.: nempe *optare me, ut Analyſtæ animum inducant credere id, quod propoſui, aliqua conſideratione dignum eſſe, & (ſi dubitent, an aliqua cauſſa eſſe poſſit cur aliquod æquivocum latere poſſit in principiis communibus auctoritate jam confirmatis) ſerio perpendendum eſſe, utrum error oriatur ex æquationibus a me productis, an ex confuſione primarum notionum, quibus nituntur fundamenta calculi, quo utimur*. Nam æquationes a me productæ vel legitimæ ſunt, vel ſecus. Si tamquam legitimæ non admittuntur; profecto cum ſint conſequentiæ neceſſariæ calculi, malum oriri non poteſt, niſi ab aliquo errore, qui lateat in principiis, quæ tamquam certiſſima habentur, a quibus ipſæ manant. Quod ſi (ne principiorum veritatem negemus) cogimur eas tamquam veras admittere; neceſſe eſt aut obſcura hæc eſſe, aut male intellecta, ac proinde ſub ſpeciem falſitatis objicere veritatem. Quamcumque igitur partem amplectamur, difficile eſt hujuſmodi nodos ſolvere, niſi in eo latibulo, quod ego indico, malum hoc deliteſcens caute perſequamur, atque ſerio excutiamus ea principia, quæ ſive falſa, ſive male intellecta, in cauſſa ſunt, cur tales contradictiones ſive veræ, ſive veriſimiles enaſcantur.

§. 23. Hic nihilominus urgent: cum duobus prope antheac ſeculis tot Celeberrimi Viri ſuis ſtudiis ac laboribus Scientiam hanc amplificaverint tot methodis ſibi invicem auxilium & opportuniſſimam opem feren-

ferentibus; injuſtum, & contra rationem eſſe vel defectum, vel obſcuritatem ſtatuere in principiis, quibus innititur. At tamen ajo: In Scientiis demonſtrativis, quæ ſuapte natura nullis terminis circumſcriptæ ſunt, atque ideo indefinite extendi, & in melius augeri poſſunt, ſi quid novum excogitetur, bona fide examinandum eſt; æqua lance penſitanda vis rationum ejus, qui id ipſum proponit; & novatori non ſuffragia, aut fama eorum, qui via communi incedunt, opponenda. Quælibet nova inventio ſuum ſemper Auctorem habuit, & quilibet Auctor, antequam felicem exitum inventio haberet, ſemper fuit ignotus. Neque ego me arroganter cum Auctoribus novarum inventionum comparo: illud tantummodo mihi videor poſtulare poſſe, ut ſanæ veræque Philoſophiæ legibus, non præjudicata opinione, aut regulis probabilitatis judicer: quæ omnia nullum habere locum poſſunt, ubi ſuum tenent locum argumenta poſitiva. Quemadmodum autem neminem offendo, nec cuiquam injuriam facio, ſi rem tentare audeo, quæ aut, ſi vera eſt, Scientiæ tam ſublimis, & tantopere Phyſicis ſpeculationibus neceſſariæ extendere terminos poteſt; aut ſuo, & ſui Auctoris caſu antiquam doctrinam confirmare: ita jure petere poſſe videor (& ſpes me tenet impoſterum fore) ut hi conatus mei bona fide, atque ea urbanitate excipiantur, quibus ego in publicum prodiens mentis meæ ſenſa explicavi.

§. 24. Ceteroquin quilibet, modo hiſtorice cognita habeat principia, & progreſſum hujus Scientiæ, cognoſcet non a me primum hujuſmodi quæſtionem excitam eſſe, neque a me primum in hac Scientia, de qua loquimur, inenodabilia æquivoca, & principiorum obſcuritatem eſſe detecta. Protuleram enim in illa mea Præfatione jam publici juris facta quædam ſummorum Virorum teſtimonia, ut ego nihil novum, aut inauditum attuliſſe viderer, ſed rem a præſtantiſſimis Viris pro ſtudiorum ac ſententiarum circa principia diſſenſione ſatis aperte declaratam. (*e*) Hic tantum præclariſſimum exhibeam hujuſce rei

(*e*) His adde, quæ Hermannus Vir inter Mathematicos hujuſce Seculi celeberrimus (Ab: Cont. Tom. II. p. 10. Proſ. e Poeſ.) pronuntiare non dubitavit: *Felices ſcilicet eſſe Recentiores Mathematicos, quod Sceptici antiqui non extant. Sunt enim multa in recenti Algebra, de quibus nulla reddi ratio poteſt: quare Sceptici illi ſuis oppoſitionibus veluti triumphum agerent.* Et quæ Wolfius Elem. Math. Tom. V. Cap. IV. de ſtud. Algeb. . . . . . *Imo, nullum eſt dubium, quin plura irrepſerint* (in Algebram

rei exemplum. Principio hujus Seculi Cel. Rollius (cujus ingenii, & doctrinæ teſtis Reg. Acad. Pariſ. ad an. 1719) graviſſimas opponit difficultates contra communem methodum tractandi Analyſim. (*f*) Verum quidem eſt inſurrexiſſe celebriores ejus temporis Mathematicos, & controverſias ortas eſſe, quas numerus potius, quam ratio defendit. Ut autem intelligamus quam facile ſit decipi a quopiam principio, quod tamquam certum, & inconcuſſum receptum ſit; placeat ad hæc animum advertere. Ubi Geometris a calculo communi perſuaſum fuit, in æquationibus tertii gradus ſine ſecundo termino, & cum tertio poſitivo, & quarto negativo unam tantum eſſe poſſe radicem realem; hanc ſuppoſitam veritatem, de qua minime ambigebant, eo conſilio in Geo-

bram) *a veritate aliena; ita ut inventa recentiorum Mathematicorum reviſione quadam indigerent, & haud pauca firmiori fundamento ſuperſtrui mererentur. Nec alia ratio eſt, cur inter recentiores Mathematicos agitentur controverſiæ, quales veteribus erant ignotæ.*

Item, quod præclariſſimus Alembertius Tom. IV. Melanges &c. in *Eſſai ſur les Elemens de Philoſophie* Art. XIV. ſcriptum reliquit; qui, poſtquam Algebræ inter ceteras humanas Scientias, quæ certitudine nituntur, primas detulerit, ſubdit „ Néanmoins „ toute certaine, qu'elle eſt dans ſes principes, & dans les conſequences qu'elle en tire, „ il faut avouer, qu'elle n'eſt pas encore tout-a-fait exemte d'obſcurité a certains égards. „ Pour n'en citer qu'un ſeul exemple, je ne connois aucun Ouvrage, où ce qui regarde „ la theorie des quantites negatives ſoit perfaitement éclairci. Eſt-ce la faute de l'Algebre? Ne ſeroit-ce pas plutôt celle des Auteurs qui l'ont traitée juſqu'ici? „ Et tamen ex hac Theoria totum hoc, de quo agimus, negotium pendet, quæ certe niſi perficiatur, in ambages numquam extricandas nos conjiciat neceſſe eſt. Quo jure igitur me nunc tamquam novatorem principia calculi in tuto poſita, atque omnium conſenſu, ut ita dicam, ſacrata, periculoſa exempli contagione labefactare audentem prædicant, meaque exitialem tamquam hæreſim orthodoxa placita inſectantem, ne latius graſſentur opportune eſſe comprimenda? Cum neque nova, neque rationibus & auctoritate deſtituta eſſe quæ denuo profero, ſatis liquido conſtet.

(*f*) Eadem Academia Hiſt. ad an. 1708. hæc habet: „ Une demonſtration a priori „ de la cauſe des erreurs, que M. Rolle a marqués, & de la neceſſité des conditions, „ qu'il demande, dependroit d'une Theorie d'Algebre & fort nouvelle, & fort curieu- „ ſe, & les grands progrés, que l'on fait de jour en jour ſemblent promettre, que l'on „ ira bientôt juſques-la. „ Hæc eadem Academia Hiſt. ad an. 1719. in Elogio Auctoris hæc addit: „ il croyoit l'Algebre encore fort imperfaite, & ſuſceptible d'une „ étendue, que l'on ne penſe pas même y à deſirer. Il meditoit des elemens tout „ nouveaux, mais dans ce qu'il communiquoit à l'Academie, il rapportoit quelque- „ fois certaines choſes à ces Elemens inconnus, ou les ſuppoſoit, ce qui donnoit à „ ſes Ecrits une apparence de ſimples Projets, & même de l'obſcurité. . . . . . C'eſt „ dommage, qu'il n'ait fait ſes Elemens, ôu il auroit pû ſe developper en liberté, on „ ne peut douter que l'Ouvrage n'eût été fort conſiderable, & un homme capable „ comme lui de ſe ſacrifier entierement à l'Algebre n'eſt pas un preſente que la Na- „ ture faſſe tous les jours aux Sciences. „

Geometria inveſtigarunt, ut oſtenderent mutuam methodorum conſenſionem ad eamdem inquirendam veritatem mutuo conſpirantium: atque hinc, ſibi nimium confidentes, conſtructionem geometricam inſcii eo duxerunt, ut ad eorum voluntatem ac perſuaſionem reſponderet. In iiſdem autem æquationibus cum tertio tamen termino negativo, & quarto poſitivo, licet radices omnes a calculo nobis datæ ſint ſub forma imaginaria, tamen & Serierum, & aliarum deductionum ope tandem exploratum habuerunt, ea poſita conditione, aut tres reales eſſe, aut unam realem, & duas imaginarias, contra ac Calculus docet, qui optime tamen in primo caſu reſpondere viſus eſt, in quo una tantum determinatur realis, ut ex earum geometrica conſtructione apparet. Unanimis hæc conſociatio Analyſeos cum Geometria hanc generalem perſuaſionem conſtituit, cui contradicere nec tutum, nec rationi conſonum videtur, utpote quam ſequutæ ſunt Scholæ omnes, & in ſuis Inſtitutionibus Analyticis etiam Immortalis Vir Vincentius Riccatus, & ejus laborum Socius Celeberrimus Saladinus.

§. 25. Attamen in hoc Opere demonſtrabitur quantopere a veritate aberraverint. Illud interim in me recipio, ſi Geometriam non anticipata opinione interrogaſſent, & quid illa reſponderet diligenter attendiſſent, futurum fuiſſe ut facile intellexiſſent ab ipſis eam omnino diſſentire. Et ſane paucis examinemus notam methodum adhibitam in hujuſmodi conſtructionibus. Data æquatione primi caſus $x^3 + abx - af^2 = 0$; &, facta $x^2 = ay$, quæ eſt æquatio ad Parabolam, valorem hunc in prima ſubſtituunt, ex quo prima in hanc convertitur $\overline{b+y}.x = f^2$, quæ eſt ad Hyperbolam inter aſymptotos. Delineata Parabola, & recte cum Hyperbola conſociata, ſe offert figura, in qua oculis ipſis cernitur non niſi ramum unum Parabolæ cum uno tantum ramo Hyperbolæ in unico puncto ſe interſecare. Hinc Geometria atque Analyſi docente recte ſe demonſtrare credunt, hujus formæ æquationes nonniſi unam realem radicem habere poſſe.

§. 26. Altera vero $x^3 - abx - af^2 = 0$, earumdem Curvarum ope conſtructa, nos docet, cum $a > \frac{27f^4}{4b^3}$, jam ſemper uno hyperbolico ramo ramum alterum Parabolæ neceſſario ſecante, Hyperbolæ ramum in duobus punctis alterum Parabolæ ramum interſecare. At, ſi a

=

$= \frac{27f^4}{4b^3}$, Hyperbolæ ramus tangit Parabolicum, cum interim, ſi $a < \frac{27f^4}{4b^3}$, idem Hyperbolæ ramus nec tangit, nec ſecat Parabolicum. In prima igitur circumſtantia omnes radices & reales, & inæquales eſſe; in ſecunda omnes quidem reales, ſed duas æquales; in tertia denique realem unam, ceteras imaginarias, omnes ad unum ita aſſeverant, ut impoſſibile ſit radices alias huic æquationi tribuere.

§. 27. Hæc tamen omnium conſenſu confirmata opinio optime cum veritate congrueret, ſi nulla alia, quam jam modo indicata conſtructio, inſtitui poſſet. At, ſumpta Parabola ejuſdem æquationis $ay = x^2$, nemo non videt, eadem manente æquatione, me poſſe hanc ita ordinare $ma.\frac{y}{m} = x^2$, quo in caſu altera a prima oritur Parabola parametri ma, & abſciſſæ $\frac{y}{m}$. Quo major eſt ma parameter, eo major eſt Parabolæ amplitudo: ſed ma ad libitum augeri poteſt; ergo ſi in ſecundo caſu Parabola parametri a Hyperbolæ ramum tantum tangebat, hæc nova Parabola majoris amplitudinis certe quidem in duobus punctis Hyperbolæ ramum ſecabit. In tertio vero caſu, in quo ramus Parabolæ parametri a diſtabat a ramo Hyperbolico, ac proinde duæ radices imaginariæ erant, liberum ſemper erit Parabolam alteram talis amplitudinis aſſumere, a qua in duobus ſemper punctis Hyperbolæ ramus ſectus imaginarietatem radicum neceſſario tollet. Adde, quod $ay = xx$ idem eſt ac $-a.-y = xx$, in quo ultimo caſu tamen invenitur Parabola tota in contrariam partem: quo utroque artificio facile quidem eæ interſectiones cum Hyperbola obtinentur, quas fruſtra in caſibus ſupra dictis communi conſtructione quæſiveris.

§. 28. Atque hinc perdurat adhuc integra Rollii difficultas contra methodum inveniendi radices æquationum per interſectiones Curvarum. Objicit acute doctiſſimus Vir, poſſe fieri ut tali methodo interſectionum numerus minor ſit quam numerus realium radicum. Quare ſi Curvæ interſecentur, nullus dubitat quin reſpondeant quidem talibus ſectionibus tot radices reales æquationis; at contra non poſſe tuto affirmari contendit, alias non eſſe in æquatione radices, quam quæ a punctis interſectionum determinantur. Duobus exemplis id probat: altero

tero ſumto a Circulo & Parabola; a Circulo & Hyperbola altero: quæ ita evidentia ſunt, ut ipſe Riccatus ad §. 11. Cap. X. Tom. I. *ſuarum Inſtit.* ſuam hac de re ſententiam ſic explicet: „ Quapropter „ admodum caute opus eſt uti methodo conſtruendi æquationes ſecun- „ di gradus per interſectionem duorum Circulorum, aut duarum qua- „ rumcumque Sectionum Conicarum: nam accidere poteſt, ut æqua- „ tio ornata eſſet duabus radicibus realibus, tametſi Curvæ uſurpatæ „ nuſquam ſecarent. „ Non poterat Rollii difficultas clarius comprobari ab eo ipſo ſummo Viro, qui eam ſtatuerat impugnare. Sed contra Rollium ſtabant anticipata omnium judicia. Hoc unum vim ſuam ademit difficultati, quæ, tamquam vera recepta in conſtruendis æquationibus ſecundi gradus, non poterat non nocere aliis gradus ſuperioris.

§. 29. His adde ingenuam confeſſionem celebris de-la Hire, ut habetur ex Academia Pariſienſi ad an. 1710, qui & ipſe ſtudio partium Rollium impugnabat. Ait enim ab eo acute detectos eſſe quoſdam errores non ante ab aliis Geometris obſervatos, quibus obnoxii eſſe poſſunt qui arbitratu ſuo loca geometrica ſeligunt in conſtructione æquationum ad inveſtigandas radices formulæ alicujus algebraicæ. Nonne igitur ex his facile eſt intelligere ab una eorum auctoritate, qui ſibi tum regnare ac dominari videbantur, ortam nunc eſſe cœcam illam fiduciam, qua talem methodum adoptamus, antequam rem tanti momenti attente perpendamus? Nam neque de-la Hire, neque Sluſius, neque Wolfius, qui ejus veſtigiis inſiſtit, neque Hermannus, ut eſt in Actis Berolinenſis Academiæ Tom. III., neque Cramer in ſuo Tractatu de Curvis efficere potuerunt, ut graviſſima ſane difficultas a Rollio indicata, & ab omnibus admiſſa poſſit evitari.

§. 30. Et ſane, approbata unanimiter Rollii difficultate ab omnibus præſtantiſſimis Viris, hoc unum eſſe remedium omnes putant: ſi nempe una eligatur ex æquationibus, quibus ad conſtructionem uti velimus, ita ut variabilis y, quæ debet evaneſcere, unam tantum habeat dimenſionem. Tunc enim hæc variabilis, quæ ordinatas linearum repræſentat, quarum interſectione conſtruuntur æquationes, unum tantum habet valorem in æquatione, cum unam tantum habeat dimenſionem: ac proinde hic valor numquam poteſt eſſe imaginarius. Ergo cuilibet x reali reſpondet unica y, ſed realis: atque hinc tot interſectiones locum habeant, quot radices, neceſſe eſt. Verum ut hujuſce

unius traditi remedii inutilitatem paucis oſtendam; dico, ſelecta pro arbitratu Parabola ex. gr. $ay = xx$ tamquam una conſtructionis Curva, verum quidem eſſe abſciſſam y, cum ſit unius dimenſionis, non poſſe fieri imaginariam per extractionem radicis; ſed tamen veriſſimum & illud, ſine extractione radicis, fieri imaginariam in toto eo ſpatio, in quo nulla Curva eſt; ac conſequenter y negativa eſt ſemper imaginaria reſpectu Parabolæ primo ſumptæ $ay = xx$ poſitæ ex parte poſitivorum, tametſi y ſupponatur una dimenſione tantum ornata. Porro ſi radix æquationis, quam quærimus, deberet eſſe ex parte oppoſita aſſumptæ Parabolæ, ideſt ex parte negativorum, in quibus deſcripta non eſt Parabola; nemo non videt, fieri non poſſe ut tali conſtructione ea inveniatur, licet y in ea parte, in qua deſcripta eſt Parabola, ſit ſemper realis. Ubi enim Curva non eſt, ibi interſectio eſſe non poteſt. En igitur quemadmodum y unius dimenſionis naturam aſſumit imaginarii in ea parte, in qua rami Curvæ non ſunt; quamvis nihil opus ſit extractione radicis, ut deprimatur ad eam primam dimenſionem, ad quam principio determinata fuit.

§. 31. Quamvis igitur Celeberrimus Riccatus hac & ipſe ratione ductus §. *16.* ejuſdem Cap., Auctores ſuperius nominatos ſequutus, conetur demonſtrare in methodo, qua ipſe utitur Cap. ſup. in Conſtructione æquationum tertii & quarti gradus, nullum periculum eſſe hanc offendere difficultatem; tamen & quod ſuperius dixi, & conſtructio a me ſupra indicata manifeſte contrarium evincit. (*g*)

§. 32.

(*g*) Inſuper denuo ſumatur æquatio $x^3 + abx - af^2 = 0$, cui, ut dictum eſt non datur niſi unica radix realis: pro $ay = xx$ ponatur $-ay = xx$, ſalva tamen poſitione Curvæ, &, ſumpta tantum paramétro negativa, reliqua intacta maneant: quoniam $-ay = xx$ æque ſignificat $a.-y$, ſive parametrum poſitivam in negativam abſciſſam (quo in caſu invertitur Curva), & æque ſignificat $-a.y$, ſive parametrum negativam in abſciſſam poſitivam; & hoc in caſu Curva non mutat poſitionem, ſed parameter tantum tranſit a poſitiva ad negativam. Hoc igitur ultimo poſito, Hyperbola inter aſymptotos erit $\overline{y-b}.x = -f^2$ eadem poſitione & quantitate atque alia æquationis $x^3 - abx - af^2 = 0$: hac tamen differentia, quod in hoc caſu aſſumendi ſunt reliqui duo rami Hyperbolæ, quos altera omiſerat. Quod nos monet, radices indicatas ab hac conſtructione inverſas eſſe poſitione, contra ac aliæ alterius æquationis ſunt; ac proinde, quæ in uno caſu erant poſitivæ, aſſumendas eſſe negativas, & e contra.

Cum autem in caſu æquationum tertii termini negativi concedatur ab omnibus ſaltem

§. 32. Id unum hic innuo, ut hinc intelligatur non novam, non ratione alienam, non male ſundatam eſſe perſuaſionem, qua putamus aliquid de eſſentia gravioribus Algebræ partibus deeſſe, ne id eveniat huic Operi, quod alteri evenit. Nimia enim celebriorum Geometrarum circa principia communia ſecuritas, ac anticipata opinio in cauſſa fuit, cur mea ipſi poſthabentes, iis tantum non ſatis rei, de qua agitur, inſtructis, ac (ſi Diis placet) male animatis, perpetua petitione principii laceſſenda reliquerint. Et tamen hæc obſcuritas, quæ ab ipſo hujuſce Scientiæ exordio mentes illuſtriorum Virorum offendens in diverſa perpetuis contentionibus diſtraxerat: objectiones validiſſimæ præſtantiſſimi Viri, qui & rem in meliorem ſtatum redigi poſſe vidit, & reipſa, ſi ei datum eſſet, redegiſſet, quas intactas reliquerunt qui poſtea ſequuti ſunt: illationes a me publice indicatæ, quas nemo negabit, niſi quod certiſſimum eſt negare velit, perſuadere cuilibet poterant, non prius contemnendum eſſe quod propoſui, niſi antea ſeveriori trutina, & æquo animo examinatum ſit, licet quædam principia ab omnibus recepta hoc infirmare videantur. Niſi ita fiat, undenam huic malo remedium petendum erit? Tantum præjudicata opinio poteſt! Si remedium volunt, opinionem evellant, neque id ſtatim tamquam inviolabile putent, quod ipſam confirmat, nec falſitatis ſtatim condemnent quicquid ipſi opponitur, nulla alia ducti ratione, niſi quod cum opinione non congruit: quaſi vero aut confuſio, aut dubitatio ibi eſſe poſſit, ubi omnia clara & perſpicua ſunt; aut nulla ratio poſſit eſſe expediendi talem nodum, quem fruſtra toties enodare conati ſunt.

§. 33. Quare opportunum hoc loco eſſe judico totum a me mente conceptum, & quaſi adumbratum Syſtema, quod ſenſim, ac per gradus hoc, & ſequentibus Libris evolvendum mihi propoſui, quid-

tem poſſibilitas trium radicum realium; manifeſte apparet, in iis quoque tertii termini poſitivi locum habere eamdem poſſibilitatem, quæ & alteri conceditur, cum eadem omnino ſit conſtructio geometrica, poſita Parabola æquationis $- ay = xx$, mutatis tantum duobus ramis oppoſitis Hyperbolicis. Sed ſuperius §. 27. indicavi, in caſu tertii termini negativi, mutatis parametris Curvarum conſtructionis, reipſa inveniri ſemper tres radices reales: ergo etiam in caſu tertii termini poſitivi invenientur tres radices reales, dummodo ſeligantur eæ Curvæ, earumque poſitiones, quæ aptæ ſint ad obtinendas eas, quas quærimus, interſectiones.

quid illud eſt, aperte tandem indicare; ut manifeſte oſtendam, quæ & quanta huic Scientiæ adhuc deeſſe credam, quamvis tot, ac tam validis nixa methodis ſit, ut ad ultimam quaſi perfectionem perveniſſe videatur. Ex quo nemo poſtea miretur, ſi tot ſæpe occurrant difficultates inſuperabiles, ac undique contradictiones, quæ huic Scientiæ impedimento ſunt, quominus pari gradu incedere poſſit cum Geometria, cui dux in abſtruſioribus inveſtigationibus eſſe deberet.

§. 34. Tres igitur methodos, a quibus totum hoc Analyticum Opus conflatur, diu meditando arbitror præſenſiſſe, nempe primas, abſolutiſſimas, ſolas, a quibus omnes aliæ Methodi, ne excepto quidem *Calculo Differentiali*, & *Integrali*, aliæque, quæ inveniri poſſent, originem ſuam ducunt: quæ non poſſunt eſſe niſi limitationes harum natura ſua abſolutarum, quas nunc æquis Geometrarum auribus proponere audeo. Prima eſt, quam appellabo *Abſoluti zero*: *Abſoluti Infiniti* altera: tertia *Circulationis*: quibus a poſitivo ad negativum, vel viceverſa, tranſitus rite fieri poteſt. In prima *Abſoluti zero* fundatur Calculus, quem habemus, qui cum tendat ad inveſtigationem ejus, quod nobis ignotum eſt, ope ejus, quod eſt cognitum: neceſſario nos ducit ad æquationem mixtam ex datis, & incognitis, quæ quæruntur, ut eas detegere poſſimus. Sine his æquationibus inutilis eſſet totus ille artificioſus analyticarum veritatum apparatus, quæ nulli ſunt uſui, niſi ad detegendas variabiles in æquationibus contentas, quæ id repræſentant, quod quærimus. Omnis autem æquatio, ſive compoſita ſit ex variabilibus & quantitatibus notis algebraicis, ſive ex iis, quas dicimus *tranſcendentes*, ſive ex mixtis ex utroque genere, perducitur, aut perduci poteſt ad abſolutum zero, terminis omnibus ab una tantum æquationis parte collocatis. Methodus igitur communis æquationum hac profecto de cauſſa dici poteſt, & eſt Methodus *Abſoluti zero*, utpote quæ hoc uno principio tantum innititur. Quod autem dixi, & quæ in toto hoc Opere dicentur, aperte oſtendent, quam hæc Methodus *Abſoluti zero*, quæ una hucuſque ad analyticas inveſtigationes nos ducit, ſit manca, anguſtioribus, quam par eſt, limitibus circumſcripta; non recte ſæpius uſurpata, neque intellecta; ac tandem non raro Geometriæ male applicata. Rem igitur hanc unam a primis uſque deductam principiis hic pertractandam mihi propoſui, ut palam fiat quibus præcipue de cauſſis tam anguſtis cancellis ſepta fuerit Methodus hæc, quæ naturam communem habet cum abſoluto

(cum

(cum omnis æquatio par eſſe poſſit abſoluto zero), & a qua vim ſuam mutuatur quælibet alia methodus, quæ dicitur *tranſcendens*; cum, qualiſcumque tandem ea ſit, æquationibus zero æqualibus innitatur.

§. 35. Innueram ſuperius quidnam ſit, quod calculum æquationum, repugnante ipſius natura, limitet. Eſt autem nimis circumſcripta notio, quam verbo *Æquationis* tribuimus. Et tamen certum illud axioma, quo inter ſe æquari poſſunt omnes illæ cujuſcumque generis, ac naturæ quantitates, quæ ſeorſim ſive ſolæ, ſive ſimul cum aliis æquales ſunt zero, ſatis eſſe poterat, ut arbitrariam limitationem additam naturæ hujus methodi intelligeremus, abjuratis illis *tranſmutationibus*, ſeu *transformationibus*, ad quas Calculus neceſſario nos ducit. Etenim certiſſimum eſt, qualeſcumque numero aut natura ſint quantitates, poſitivæ, negativæ, reales, imaginariæ, æquari omnes, cum abſolute ad nihilum reducuntur. Ex quo fit ut, cum poſſint, dum æquales ſunt zero, aliæ pro aliis ſubſtitui, hinc extricatæ aliam omnino formam, analyticarum operationum ope, a prima diverſam omnino induant: ſive illæ ſe ſe prodant, quæ, donec æquatio erat zero, pro primis in ſubducendis calculis nobis etiam inſciis legitimæ ſubſtitutæ fuerant. Ex tali axiomate fit, ut legitimæ ſint illæ æquationes, quarum ego unus feror Auctor, quamvis neceſſariæ ſint & communes, probe re cognita, uti jam dictum eſt. Axioma autem hoc ab omnibus receptum eſt tamquam fundamentum neceſſarium in Calculo Æquationum, cum quævis æquatio per tranſpoſitionem terminorum zero abſoluto æquetur, in quo cum evanuerit debitis ſubſtitutionibus, alias ſubire poteſt formas, & ipſas zero æquales, quæ e nihilo demum erutæ mirabili quadam transformatione natura prima mutata, aliæ nobis ſtupentibus ſe ſe offerunt. Hujus legitimæ transformationis nondum cognitæ in toto hoc Opere comprehendetur, ut ſpero, neceſſitas atque extenſio, & admirabiles illationes, quæ inde oriuntur.

§. 36. Quamquam non admodum difficile eſſet, ſi ſerio ad examen revocentur notæ methodi, evidenter comprehendere neceſſitatem talium transformationum in pertractanda analytica methodo æquationum. Nam ſolutio omnium æquationum, quæ dicuntur *determinatæ*, quod in his una tantum eſt variabilis x, nonne hac ſuppoſitione tota innititur, ut ipſa variabilis eadem ſemper ſit, & tamquam identica perpetuo pertractetur? Hac enim hypotheſi non conceſſa, ſtatim æquationes indeterminatæ fiunt, nec locus amplius ſolutioni analyticæ æquationum

com-

communi methodo relinquitur. Quod ſi uti velimus conſtructione geometrica, præterquamquod validiſſimam Rollii objectionem offendimus, quam adhuc intactam relictam eſſe ſuperius dixi; perſpicuum ſuo loco erit, quam neceſſariæ ſint formulæ algebraicæ ea, qua par eſt, extenſione donatæ ad conſtructionem geometricam rite deducendam, atque ampliandam. Ut ut tamen ſe res habeat, certo certius eſt, ſublata variabilis identitate, ſublatam etiam eſſe facultatem uſitatæ methodo analyticæ ulterius progrediendi; eo quod id omne corruit, quod a celebrioribus Analyſtis circa ſolutionem analyticam æquationum excogitatum eſt. Contra vero nemo neſcit, licet variabiles tamquam identicæ pertractentur, diverſos tamen eſſe notos earum valores, ſive radices. In methodo igitur communi ſolutionis analyticæ æquationum, quædam quaſi neceſſaria contradictio eſt, cum inter ſe æquentur variabiles, licet earum noti valores non æquentur. Hinc illæ neceſſario ſe ſe offerunt æquationes, quæ licet illationes ſint calculi communis; tamen, quod a me ſint, condemnantur: & tamen veritas hæc, quam ſæpius inculcavi, aſtute ſemper diſſimulata fuit. Quod ſi non inveſtigandam eſſe exiſtimant rationem conciliandi quod in hac re pravitatis ac vitii videtur ineſſe (ut ego in hoc Opere conabor), invictis hiſce argumentis coacti falſum demum judicabunt quicquid de hoc tam gravi negotio, nempe de ſolutione analytica æquationum, tot præſtantiſſimi Viri conſcripſerunt: & hæc libido me unum incuſandi tandem tacite arguet tum Veteres, tum Recentiores Analyſtas ſe, tot tantiſque laboribus exantlatis in Analyſi provehenda, perperam inſudaſſe: atque implicatiſſimus error omnibus quidem communis, ſed mihi uni appoſitus, hoc tandem efficiet boni, ut tot acutiſſimæ mentis Viri impoſterum ſibi parcant, nec circa tot contradictiones, & falſitates inutili frangantur labore, donec nova principia, & novæ, ac veriores methodi detegantur.

§. 37. Si vero æqui rerum æſtimatores Geometræ novam ac temere prolatam propoſitionem hanc judicabunt, judicandum etiam iis erit falſum id numquam eſſe poſſe, quod a principiis communiter receptis legitime manat. Porro, ut cohæreant hæ, quæ videntur contradictiones, cum legitimis illationibus, quæ a principiis jam conceſſis oriuntur, atque ut huic malo remedium afferant, adoptandæ etiam erunt illæ transformationes, quas ego tantum primus indicavi, (atque in toto hoc Opere, niſi vehementer erro, me invictiſſime & evidentiſ-

ſime

ſime demonſtraſſe arbitror), non primus errore, aut arbitrio ductus in Calculum invexi; ſine quibus non poteſt, quin corruat totum hoc tam vaſtum, atque ſublime jam incœptum ædificium. Et ſane, ut id obiter attingam, quod in ipſo Opere ordine demonſtrabitur, dubitabit nemo, quin poſito factore $x - a = 0$, ſit etiam $2x - 2a = 0$, & conſequenter $x - a = - x + a = - 1.\overline{x - a}$; & dividendo per $x - a$, $1 = - 1$: vel $- 1.\overline{- x + a} = - x + a$; & dividendo per $- x + a$, $- 1 = 1$. Vel $\frac{x - a}{2} + \frac{x - a}{2} = 0$: ergo $\frac{x - a}{2} = \frac{- x + a}{2}$, & $x - a = - x + a$; &c. Quis quæſo negare audeat hujuſmodi conſecutiones, niſi negare velit quod ſimpliciſſimum & neceſſarium eſt ex principiis analyticis? Sunt igitur æquationes hæ illationes legitimæ eorum principiorum, quæ omnibus ſunt probata: Sunt ergo neceſſariæ. Ergo procul dubio veræ. Illud igitur a nobis quærendum tantum eſt, ut illa evaneſcat abſurditas, quæ ſe nobis objicit, quæque oriri profecto non poteſt, niſi ab aliquo non bene intellecto principio, vel a præjudicata opinione.

§. 38. At urges: poſita $a = - a$, inde ſequi $a + a = a - a$, ſive $2a = 0.a$, & $2 = 0$: abſurdum quocumque fœdius abſurdo. Tamen hoc, quod dicis abſurdum, eſt conſequentia neceſſario a §. præc. deducta. Nam ſi nequeat falſitatis inſimulari æquatio $x - a = - x + a$, erit $x - a = - x + a$, & additione facta $2x - 2a$

$x - a = \quad x - a$

$= \overline{1 - 1}.x + \overline{1 - 1}.- a = \overline{1 - 1}.\overline{x - a}$; &, dividendo per $x - a$, $+ 2 = 0$; vel $+ 2a = 0.a = a - a$. Contradictio tamen, quæ hic manifeſta creditur, ex alia falſa opinione ortum trahit; ex eo nempe, quod conjunctio duarum, vel plurium ſigno diverſo quantitatum, habita ſemper fuit ſubtractio earumdem quantitatum in origine poſitivarum, mutato ſigno iis, quæ ſubtrahuntur; cum tamen repræſentare poſſit ſummam poſitivarum cum negativis in origine talibus, ſive poſitis in directione contraria primis. Quare abſurditas, quæ exhibet $a + a = a - a$, ex eo oritur, quod in ſecundo membro falſo judicetur a debere ſemper eſſe eamdem identicam poſitivam a ſe ipſa ſubtractam, quo in caſu fit procul dubio $a - a = 0$.

$= 0$. Sed ſi $(-a)$ quantitas ſit æqualis quidem, ſed poſitione diverſa a prima, & in directione contraria primæ a; tunc $a - a$ ad nihilum redigi non poteſt, cum repræſentet ſummam poſitivæ & negativæ, ſumpto puncto communi originis in earum medio: & tunc $a - a$ fit $2a$, vel $-2a$, prout transfertur punctum originis ab una, aut ab altera extremitate earum. Quia in primo caſu relata ad punctum originis poſtremo aſſumptum ex negativa fit poſitiva, cum perſiſtat poſitiva in eadem relatione, etiam cum novo originis puncto aſſumpto; & contra in altero caſu. Sed in ambobus caſibus non ſunt amplius duæ lineæ ſejunctæ a puncto medio, verum conſtituunt unam tantum lineam poſitivam, aut negativam æqualem $\pm 2a$: ut ego innui in Appendicula alteri Libro meo addita; & plenius Capp. ſeqq., ac præcipue VI. Lib. I., & Lib. II. hujus Operis demonſtrabo; in quibus quæ in lubrico erant æquationum principia ſtabiliori, ac tutiori firmata ſolo, tamquam fundamenta ponuntur, ut iis jam in progreſſu de ſecundi & tertii ordinis æquationibus ſuperſtructum opus, ad altioris ordinis æquationes deinde felicioribus auſis perduci poſſit.

§. 39. Quicumque hucuſque dicta ſerio conſideraverit, intelliget æquationes neceſſarias, de quibus ſupra dictum eſt, quæ demonſtrant neceſſitatem earum transformationum, quas ego legitimas eſſe aſſero, immediate deduci a natura cujuſcumque æquationis, quæ ſit æqualis zero; atque ideo illationes illas proprias eſſe unius illius abſolutæ methodi, quam nunc habemus, quamque diximus Methodum *Abſoluti zero*: quod ſi non ita late producta fuerit, quo natura ſua produci poterat, id inde factum eſt, quod vim quamdam illi intulimus, male rejiciendo tamquam abſurdas veritates hinc neceſſario manantes, quæ facile viam aperuiſſent a poſitivo ad negativum, & contra ope æquationis $1 . \overline{1 - 1} = -1 . \overline{1 - 1}$: quæ proinde apta eſt ad transformandum imaginarium in reale, aut contra. Verum præter hanc unam methodum hucuſque notam in Analyſi *Abſoluti zero*, cujus tamen vim atque amplitudinem, objectis undique impedimentis, retundimus; alias oſtendam, quamlibet formulam analyticam, quo jure cum *zero* conſociatur, atque in nihilum abit, eodem artificiorum analyticorum ope cum *Infinito Abſoluto* commiſceri, atque ipſius *Infiniti Abſoluti* naturam induere poſſe: quod Infinitum indicatur ab altera æquatione

tione $\frac{1}{1.\overline{1-1}} = \frac{1}{-1.\overline{1-1}}$. Hinc $1 = \frac{1.\overline{1-1}}{-1.\overline{1-1}}$ $= -1.\frac{1-1}{1-1}$; ſive $1 = \frac{1}{-1} = -1$; & $-1 = 1$ $= -1.-1$; eædem ac in prima methodo æquationes. Sed in prima Methodo habetur o, in ſecunda $\frac{1}{0}$; quibus promiſcue aditus a poſitivo ad negativum recluditur, ſed legibus omnino diverſis. Alterum hoc & ipſum abſolutum eſt, quod ego appello *Methodum Abſoluti Infiniti*, cujus operationes inverſæ ſunt operationibus primæ, quemadmodum *zero* inverſum eſt $\frac{1}{0}$. Quare in hac pertractanda principiis & regulis utendum eſt oppoſitis primæ. Nunc de hac Methodo nullum verbum facio. In hoc tamen Opere (vide Caput VI. Lib. I. & Propoſ. 23. Cap. IV. Lib. II.) quædam pro re nata innuimus, quæ illius Infiniti *poſſibilitatem*, ac neceſſitatem indicabunt, quod hucuſque ab omnibus Analyſtis unanimi conſenſu rejicitur.

§. 40. Et tamen, ſi hac de re univerſim omnes Mathematicos conſulamus, aperte fatentur omnes non poſſe a poſitivo ad negativum tranſitum fieri, aut contra, niſi per *Zero*, aut per *Infinitum*: ac proinde in hiſce duabus Methodis admittendis univerſim mecum conveniunt, non poſſe ſcilicet per calculos, quos dicimus *tranſcendentes* tranſitum fieri a poſitivo ad negativum, & e contra, niſi unius aut alterius methodi ope, adjuvante ipſa natura omnium æquationum, cujuſcumque tandem generis ſint, quæ aut cum *Zero*, aut (ut ſuo loco oſtendam) cum *Infinito Abſoluto* comparari poſſunt. Sed, ubi res ad actum traducenda eſt, uterque tranſitus diverſo tamen modo calculo finito interdicitur. Nam primo huic unus (quod prius conceſſum fuerat) ſcilicet tranſitus per zero omnino intercluditur, rejectis illis transformationibus, quibus unice datum eſt, negativo in poſitivum mutato, imaginarium evitare: quæ tamen transformationes quotidie in tranſcendentes calculos clam irrepentes, benigne alio nomine excipiuntur. Nam, cum in Calculis vulgo dictis *tranſcendentibus* & artificia ſint longe petita, & æquationes plerumque involutiſſimæ, horum artificiorum opera, æquationibus primo ſumptis in aliam formam mu-

e tatis,

tatis, eæ radices etiam mutantur, quas tamen illis primis ante tranſformationem æquationibus falſo tribuimus, cum rectius formulis artificioſa ſubſtitutione mutatis eſſent tribuendæ. Hinc ita agentes ſatis eſſe putant demonſtrare ſe legitimam iniiſſe viam per ea, quæ in uſu ſunt artificia legitima, atque hinc legitime factum tranſitum a poſitivo ad negativum, nihil de jam facta in ſubducendis calculis transformatione ſuſpicantes.

§. 41. Alterum porro tranſitum per Infinitum, quem abſtracte ipſi quoque admittunt, non ſolum ignorant, ſed (quod mirum videri debet) omnino negant, & quacumque abſurditate abſurdiorem appellant. Etenim quemadmodum dari non poteſt tranſitus a poſitivo ad negativum ope cujuſcumque vel minimæ quantitatis cujuslibet ordinis Infiniteſimorum, quæ ſemper relativa ſunt, niſi fiat acceſſio ad ultimum abſolutiſſimum minimum, ideſt ad abſolutum zero: ita e contra numquam fiet tranſitus ab hoc ad illud per quemcumque ordinem Infinitorum relativorum, niſi fiat acceſſio ad ultimum abſolutiſſimum *Infinitum*, quod certe nihil aliud eſſe poteſt, quam inverſum abſolutum *Zero*. Nunc autem hoc abſolutum *Infinitum* (quamquam ubi admiſſum zero eſt, jure excludi ejus univerſum non poterat) licet alio ſub nomine non obſcure indicatum & propugnatum fuerit principio hujus Seculi a Celeberrimis Mathematicis; tamen (quis hoc crederet?) a recentioribus Auctoribus omnium conſenſione declaratum fuit abſolute abſurdum, ac metaphyſice *impoſſibile*. Atque inde factum eſt, ut proprietates, quæ de ejus eſſentia ſunt, quæque cum proprietatibus aliorum omnium infinitorum relativorum non cohærent, minime cognitæ fuerint. Atque hac ratione, dum conceditur etiam alter tranſitus per *Infinitum*, demonſtratur *impoſſibile* illud unicum *Infinitum Abſolutum*, quod hîc neceſſarium eſt: adeoque *poſſibilis* creditur tranſitus per *impoſſibile*.

§. 42. Liceat autem nunc mihi & hoc obiter addere. Si *impoſſibile*, & abſurdum eſſet hoc Abſolutum Infinitum, *impoſſibiles*, & abſurdæ etiam eſſent viæ omnes, quæ ad hunc ſcopum tendunt. Nam nulla via aut ratio dari poterit, quæ ad id quod fieri nequit nos ducat. Omnia porro Infinita relativa tendunt ad hunc ſcopum, & quamvis ad ipſum numquam pervenire contendas, tamen ipſum procul repræſentant. Eo ferme pacto, quo ſi abſolutum zero (ad quod, ut infra dicetur §. 45, conſentientibus celebrioribus Geometris, tendunt

dunt infinite parva, quæ ipſum repræſentant) abſurdum eſſet, abſurdæ pariter eſſent & imaginariæ omnes infiniteſimæ quantitates. Præterea, ſi abſolutum zero, & quantitates minimæ, quæ illud repræſentant, ſunt reales; quomodo imaginaria erit eorum inverſio? Nam, ſi in analogia $dx : 1 :: 1 : \frac{1}{dx}$ fiat $dx = 0$, erit quartum $\frac{1}{0}$ illud Infinitum abſolutum a me indicatum, quod certe abſurdum eſſe non poteſt, niſi & abſolutum Zero abſurdum ſit, quod poſitum in denominatore fractionis ipſum producit: quemadmodum non poteſt eſſe abſurdum $\frac{1}{dx}$ infinitum relativum, niſi ſit etiam dx, ex qua oritur. Quare admitti non poteſt abſurditas Infiniti abſoluti, niſi & abſoluti Zero abſurditatem admittamus. Quod ſi hoc reale eſſe velimus, neceſſario ſequitur ut & alterum tale ſit.

§. 43. Sed quid plura? *Infinitum* illud *Abſolutum*, quod e tota Analyſi omnium Mathematicorum votis exulare jubetur, profecto eſt unum, a quo in præcipuas ac primas, quibus unice utuntur in æquationum ſolutione, operationes inſcii vim derivant ac veritatem: quo damnato, & ipſæ cum tota æquationum theoria, quæ in uſu nunc eſt, proſcribantur oportet. Prima enim atque præcipua artificia unice vulgo uſurpata in ſolutione æquationum ſecundi, atque ulterioris gradus Infinito hoc Abſoluto ita nituntur, ut vera atque legitima eſſe nequeant, niſi verum atque legitimum hujuſmodi Infinitum concedatur: ut vere dicendum ſit, Analyſtas quod verbis, atque argumentis extra rem, ac longius petitis impugnant, reipſa comprobare; idque ipſis multum conferre ne quod re ædificant, verbis deſtruant: Infinito namque abſoluto ſublato, Analyticum ædificium hoc uno veluti fundamento ab ipſis ſuperſtructum, & ipſum corruat neceſſe eſt; quod tamen tot laboribus in unum collatis conſtructum tueri, atque ad majorem ſemper amplitudinem, novis ſibi invicem in diem ſuccedentibus methodis, efferre jure conantur. Hoc, quod mirum & vix credibile communi opinione imbutis videbitur, Cap. præcipue VI. Lib. I. evidenter, ut credo, demonſtrare incipiet, ac Cap. V., & VI. Lib. II. perficient.

§. 44. Ceterum ego ſpero futurum, ut ſuo loco demonſtrem, exiſtere tale *Infinitum Abſolutum* ſic reale, ut realis eſt exiſtentia *Abſoluti*

Zero (interim vide *Cap.* VI. *Lib.* I., & *Prop.* 23. *Cap.* IV. *Lib.* II.); & per contraria argumenta hucuſque allata nihil omnino concludi: itemque per hujus ignorationem aut excluſionem dimidiatum fuiſſe tranſitum a poſitivo ad negativum, & contra, ignoratis illis omnibus deductionibus, quæ ab illo ita manant, ut propriæ tantummodo ſint hujuſce ultimi *abſolutiſſimi Infiniti*. Præterea videor mihi illud jure poſſe affirmare, hac ſcilicet opinione obſtructam & alteram viam eſſe, ne umquam legitime & conſtanter Circulus cum Hyperbola conjungatur: quæ conjunctio noſtris hiſce temporibus ſuapte natura *impoſſibilis* habita eſt, eo quod ignorantur adhuc duo illi tranſitus, ſive, ut ita dicam, canales, ſine quibus fruſtra quæritur inter haſce duas Curvas libera, promiſcua, & conſtans communicatio. Sed de hac re ſuo loco.

§. 45. Illud inſuper maximo detrimento eſt, quod Calculus Fluxionum, communis, in quo quælibet vel minima quantitas quolibet ſigno affecta ſuapte natura exhibet duplex integrale tam poſitivum, quam negativum; ſigno hoc duplici integrali affixo, vicem illius abſoluti gerere potuiſſet, ad quod tali methodo, dum intra relativa conſiſtimus, non licet pervenire. Sed, cum *Integrali* ſolum ſignum minimæ fluxionis affixerimus, viam nobiſmetipſis obſtruximus, quam ipſa Calculi natura aperiebat; ſi tamen verum eſt quod in mea Præfatione jam edita dixeram, cui nemo hucuſque contradixit. Hic autem liceat hoc breviter obſervare. Immortalis Vincentius Riccatus Tom. II. Inſtit. Analyt. Lib. I. Cap. I. *De vera & genuina quantitatum infiniteſimarum idea*, poſtquam fundamenta Methodi Antiquorum in ſuo lumine collocavit, a qua poſteriores Methodi, & præſertim *Methodus Infiniteſimorum*, ſive *Fluxionum* originem trahunt, ita ſcribit §. 15. ......„ Nihil hac Methodo (ideſt Fluxionum) nihil omnino contemnimus. Etenim dum dicimus æquales quantitates, & rationes, „ quarum differentia eſt infiniteſima, aut minor quacumque data, non „ intelligimus eas æquales eſſe, donec earum differentia eſt aliqua, „ ſed in limite, ubi differentia omnino nulla eſt, quæ ſolummodo „ contemnitur. Quapropter negligere differentias infiniteſimas, ſeu quibuſcumque datis minores, & pro nullis habere, nihil eſt aliud, „ quam limitis veriſſimas æqualitates, & proportiones determinare. „ Quæ cum ita ſint, jure optimo Cel. Newtonus ſpectavit fluxiones „ aut quantitates infiniteſimas non ut determinatas, ſed ut evane-

„ ſcen-

„ ſcentes. „ Atque hæ veritates ſunt, quas toto Capite repetit, atque inculcat. Taylorus vero (quem citat Ab. Conti Tom. II. Proſe, e Poeſie) ita loquitur: „ Partes debent priores naſci, nec tales partes „ in natura ſunt, aut neque geometrice, neque phyſice pars infinite „ parva exiſtit, ut Antiqui ſuppoſuerunt in Methodo Exhauſtionum, „ & Cavallerius, & Wallis in Methodis Summatoriis. Sunt quidem „ rationes primæ partium naſcentium, & ultimæ evaneſcentium: ratio- „ nes primæ ſunt in ipſo momento, quo quantitates incipiunt naſci; „ ſed, natæ cum ſint, ceſſant eſſe primæ. Similiter rationes ultimæ „ exiſtunt eo momento, quo quantitates evaneſcunt, aut annihilantur. „ Hoc eſt fundamentum calculi incrementorum, & eorum integra- „ lium, aut Fluxionum, aut Fluentium. „ Quare addo, quantitatem minimam, vel minorem quacumque data nihil aliud eſſe, ſi recte judicemus, niſi Zero abſolutum, aut ut principium quantitatis naſcentis, aut ut terminum quantitatis, quæ ad nihilum redigitur. Itaque in zero abſoluto (ſive in quantitate minima, quæ ipſum tantorum Virorum auctoritate repræſentat) potentia continetur, & quodammodo commiſcetur tam poſitivum, quam negativum: poſitivum quod continuo decremento tandem ad nihilum redigitur, & fit idem ac zero negativum, quod eſt principium quantitatis naſcentis negativæ: & e contra. Quapropter fluxio ex. gr. dx abſtracte ſumpta vere, & abſolute repræſentat $o.x$: ſed $o.x = \overline{1 - 1}.x = \overline{-1 + 1}.-x = o.-x$; ergo natura ſua $dx = \pm o.x = \pm dx$ neceſſario, & vi ejuſdem Methodi *Infiniteſimorum* ſive *Fluxionum*: ideoque ejus Integrale $\pm x$. En igitur aliud argumentum ad confirmanda ea, quæ hac de re protuli in primi mei Operis Præfatione.

§. 46. Hinc ergo concludatur, Methodum *Fluxionum*, modo recte intelligatur, nihil aliud eſſe quam Methodum *Abſoluti Zero* a me indicatam, cui neceſſario ex oppoſito altera *Infiniti Abſoluti* reſpondeat neceſſe eſt: ex quo, alio licet artificio, eædem ultimæ illationes eruuntur; ideſt $\frac{x}{o} = \frac{x}{1 - 1} = \frac{x}{-1.\overline{1 - 1}} = \frac{-x}{1 - 1} =$ (ab infinito ad finitum facto tranſitu) $\pm x$: quod tamen tamquam abſurdum proſcriptum eſt, nec admittuntur tamquam poſſibilia, niſi infinita relativa. Sed ſi in hoc Calculo Infinitum eſt inverſum minimæ quanti-

tita-

titatis, ac ſi in origine ſua hæc minima quantitas ex præſtantiſſimorum etiam Virorum ſententia zero eſt; nemo non videt Infinitum, quod reciproce ipſi reſpondet, origine eſſe illud *Infinitum Abſolutum*, cui contradicitur, quod negari non poteſt, niſi negetur etiam fieri poſſe, ut tandem recidat in zero quantitas minima, quæ vere, & præciſe loquendo ipſum repræſentat. *Impoſſibilitas* igitur hujus *Infiniti Abſoluti* eſt tantum relativa, & ex eo oritur, quod contra ipſius Methodi naturam in Calculo Fluxionum ex imbecillitate artificiorum, quibus utimur, non conceditur ut minima quantitas in zero evaneſcat: quo ſecluſo, omnino dari non poteſt ejus inverſum: dummodo tamen Calculus primo hiſce minimis quantitatibus innixus fuerit, & ex ipſis deductus. Sed de hoc alias. Qui limitat igitur in Calculo Fluxionum integrale Fluxionis dx eo tantum ſigno, quo arbitrio affecta eſt dx; limitat, nihil tale ſuſpicans, methodum ipſam natura ſua abſolutam, quæ originem trahit a methodo æquationum, quæ (cum in his poſſit ſemper aſſumi pro ſecundo membro *abſolutum Zero*, aut *abſolutum Infinitum*, ut infra dicetur) methodus eſt *tranſcendentiſſima*, & *abſolutiſſima*, quæ in duas partes dividitur, ideſt in *Abſolutum zero*, & *Abſolutum Infinitum*, a quibus aliæ Methodi, quæ vocantur *tranſcendentes* vim ſuam, atque extenſionem mutuantur, modo pro arbitrio non circumſcribantur.

§. 47. Duæ illæ abſolutæ Methodi a me ſuperius indicatæ, ea præcipua conditione nituntur, ut valor incognitæ, quem quærimus, a ſpatio ab ipſa percurſo pendeat, cum ipſa ad idem ſpatium aliquam datam rationem fluendo ſemper ſequatur: ita ut in tranſitu ipſius a poſitivo ad negativum, aut contra, cogatur variabilis ſucceſſive minui tranſiens per omnes gradus minimos, uſque dum minor fiat quacumque data, ideſt abſolute ad nihilum redigatur: vel ſucceſſive creſcat per omnia genera magnitudinum, uſquedum quacumque data fiat major, ideſt fiat abſolute infinita. In primo caſu illa pertinet ad Syſtema *Abſoluti zero*; in ſecundo obnoxia eſt legibus *Infiniti Abſoluti*. Verum in utroque caſu moveri non poteſt, niſi fluat, ſive decreſcat, aut creſcat. Atque ideo diſtinguitur nomine *variabilis*, aut rectius *fluentis*; quo nomine ſimul oſtenditur & eſſe variabilem, & ejus valorem neceſſario ab ejus motu pendere. Hac de cauſſa incomparabilis Newtonus Calculum Differentialem appellavit Methodum Fluxionum: etenim eo ſpectat, ut pertractet minima incrementa, aut decrementa

pro-

proportionalia minimis ſpatiis a fluente percurſis. Eadem etiam ratione Calculus Æquationum appellari poſſet *Calculus Fluentium:* in hoc enim nulla habetur ratio Fluxionum minimarum, ſed quæritur valor, ſeu valores fluentium finiti, qui ſubſtituti in æquatione ipſam determinent. Hi porro valores, cum varient, ut dicetur, pro variis ſubſtitutionibus, variant etiam æquationes; atque ideo variabiles, aptæ ad conſtituendam æquationem, quocumque tandem modo transformetur, variant & ipſæ ſimul in valore finito, quin per omnes fluxionum minimarum gradus minui cogantur. In prima Methodo *Fluxionum* fit tranſitus a fluxionibus ad fluentes, & contra: in ſecunda, miſſis fluxionibus, quæruntur valores ultimi fluentium finiti, qui ſatisfaciant conditioni præſcriptæ ab æquatione, prout varie modificatur: ſive datis valoribus, fit tranſitus ad æquationem ipſis congruentem. Utraque tamen pendet hactenus a Methodo *Abſoluti zero:* nam in prima, ut diximus, fluxiones minimæ abſoluto zero, quod referunt, revera æquales ſunt; in ſecunda æquationes omnes abſoluto zero æquales fiunt: quoniam in prima fluxiones infinitæ, neque certis legibus hactenus ſubactæ, neque cum abſoluto Infinito comparatæ fuerunt; in ſecunda numquam æquationes huic *Infinito Abſoluto* æquales ponuntur: quamquam (ut ſuperius innui) methodus ab iis adhibita hoc neceſſario requirat. Et tamen diverſa hæc comparatio varie modificatur formulas analyticas, ut ſuo loco demonſtrabitur.

§. 48. Præter duas haſce Methodos, videlicet *Abſoluti Zero*, & *Abſoluti Infiniti*, §. 34. tertiam aliam eſſe aſſero, quam *Methodum Circulationis* appello. Cap. I. §. 27, & ſeqq. demonſtravi datas quantitates poſſe moveri, quin ullam valore mutationem patiantur, atque ideo *conſtantes* appellari. Ita ope hujus methodi variabiles ipſæ, non variando valorem, variare tantum poſſunt poſitionem. Hac methodo variabilis tranſire poteſt a poſitivo ad negativum, quin cogatur continuo mutare valorem, uſque dum fiat abſolute nulla, aut infinite abſoluta: uno verbo quin fluat. Id ego ope circuli haberi poſſe ſuo loco demonſtrabo, in quo incognita vicem tangentis aſſumens, licet centrum circumeat, ab hac circulari revolutione nullam patitur mutationem. Hinc methodus hæc nihil influit in quantitatem, ſed ſolummodo in ejus directionem, & poſitionem: qua fit, ut Circulus *Vector* cujuſcumque quantitatis appellari jure ac merito poſſit. Et tamen hac una in æquationibus, ſi Methodum communem ſequamur,

mur,

mur, qua variabiles ut conſtantes tractantur, ut tranſitus fiat a poſitivo ad negativum, uti licere ſuo loco oſtendam. Methodus hæc adumbrata eſt a methodo *Sinuum*, & *Coſinuum*, ſive rectius *Tangentium*, quæ in Analyſi ignota non eſt; cujus tamen (ſi quicquam video) nondum cognita eſt vera natura, nec extenſio, nec officium, aut præcipuus uſus eidem de eſſentia aſſignatus.

§. 49. Et tamen, niſi longe a veritate aberro, hanc Methodum ſublimiorem, & abſolutiorem judico, utpote quæ ultima meta eſt, quam ſibi humana abſtractio proponere poſſit. Ipſa enim aliis omnibus vi ſua præſtat, & una præ ceteris poteſt difficultates explanare, & obſcuritates illuſtrare, quas omnes & agnoſcunt, & fatentur. Sane cum hujus methodi proprium officium ſit ducere tantum quantitatem, quin ipſa mutationem patiatur; inde ſequuntur utilitates hæ, quæ a duabus aliis methodis jam indicatis haberi non poſſunt. Primo enim, cum in aliis duabus Methodis valor variabilis pendeat a ſua fluxione, & in his fluendo nonniſi ſibi ipſi parallela ſupponatur; difficile factu eſt, ut eam proſpero ſucceſſu in quacumque directione, & ſub quocumque angulo proſequamur. Comprobat id neceſſitas in ſimilibus caſibus confugiendi ad Methodum *Sinuum*, atque *Coſinuum*, quam habemus, quæ ſi ad ſuum naturalem finem dirigeretur, detegendi nempe proprietates angulares, nullum dubium eſt, quin duceret ad mirabiles, & novas veritates eruendas. Deinde aliæ duæ Methodi, licet ſua origine abſolutæ ſint, auxilio hujuſce tertiæ deſtitutæ, ſupponendæ plerumque ſunt relativæ. Nam cum pendeant valores variabilium a ſpatiis percurſis, quotieſcumque tranſire velis ad Abſolutum Zero, aut ad Abſolutum Infinitum, ut a poſitivo ad negativum, vel e contra te transferas, evaneſcit utroque modo quantitas: ad nihilum enim redigitur, aut fit infinita, ſive utroque modo infinite indeterminata: atque inde æque incerti ſumus, ac illa eſt infinita indeterminatio: hinc anguſtiæ illæ, impedimenta paſſim objecta, paradoxa, controverſiæ perpetuæ, quibus ſummi Viri dolent Analyticam hanc provinciam implicari, ac ſæpius obſtrui. Contra vero hæc Methodus Circulationis, de qua verba fecimus, cum non afficiat quantitatem, efficit ut nulla mutatione facta, liber pateat tranſitus per Zero, aut per Infinitum abſolutum: quo artificio quantitatis non mutatur niſi directio, ac monemur, quid aliis evenire debeat Methodis, ubi fines excedunt relativi, & in abſolutum ſe immergunt.

§. 50.

§. 50. Sed, quod caput eſt, Methodus hæc poteſt nos tutiſſime ducere ad eam ultimam rationi conſonam abſtractionem, ad quam humana mens pervenire poteſt. Ego in ea ſum hæreſi (nec unum hujus rei ſpecimen præſto eſt) ut putem hujus ope ſtabiliri, ac fundari poſſe novam quamdam Scientiam Analyticam ſimpliciter angularem, omnino liberam ab omni eo, quod dicitur *quantum* in dimenſione: ac conſequenter minime obnoxiam imaginario, quod Analyſim omnem nunc miſcet, perturbat, contaminat. Nam angulus non eſt quantitas illius naturæ, qua concipitur dimenſio, ſive extenſio; ſed ſolum (ut ita dicam) *Ductor* quantitatis: at ubi quantitas non eſt, ibi imaginarium eſſe non poteſt, cum angulus nihilo plus, quam nullus concipi poſſit. Hoc artificio demonſtratis firmatiſque quibuſdam veritatibus abſtractiſſimis angularibus, quæ tamquam baſis, & fundamentum ſint Syſtematis angularis, aptari ipſis poterit quælibet unitas poſitiva, negativa, realis, imaginaria, tranſcendens cujuſcumque ordinis, quæ ſemper, quocumque modo ſubducantur calculi, atque formulæ analyticæ pertractentur, ejuſdem tamen generis ac naturæ perſeveret, quin cogamur in ſingulis operationibus tranſire a natura ad naturam, a genere ad genus, ut ſæpe in calculis nobis evenire ſolet. Quare reale unius naturæ primo ſumptum erit ſemper reale ejuſdem; imaginarium unius originis, ſemper erit imaginarium illius; negativum ſemper erit negativum, quin continuitatis diſpendio abrumpatur curva; rami punctis imaginariis interſecentur; noſque in incerto relinquant utrum imaginarii an reales cenſendi ſint, ſententiis Illuſtrium Virorum in diverſa diſtractis. Tandem hac Methodo aperiri ſemper poterit libera, ac certa communicatio inter Methodum *Abſoluti Zero*, & *Abſoluti Infiniti*; &, prout res fert, utramque nullis natura terminis definitam determinare. Quæ communicatio, cum ignota hactenus fuerit, eo quod aut ignotus, aut repudiatus eſt unus ex terminis, qui reciprocantur, præcipuum, meo quidem judicio, ejus munus ademptum fuit. Horum autem ſubſidiorum ope, quæ nobis exhibent hæ tres abſolutæ Methodi, nempe *Abſoluti zero*, *Infiniti Abſoluti*, & *Circulationis Angularis* (ex quarum mutua conſpiratione veritates omnes, quæ a notione quantitatis manant, erui poſſe non temere credo) nova naſci poſſet Algebraica Scientia, quæ eadem ſagacitate atque certitudine, quibus quantitates finitas, ipſum quoque *Abſolutum Zero*, & *Abſolutum Infinitum* regat, atque moderetur: &, ab

 uno

uno ad aliud gradum faciens, viam tandem ſternat ad id, quod abſolute *impoſſibile* declaratur, quia fruſtra quæſitum methodis, quas habemus, nimis anguſto limite circumſcriptis.

§. 51. Hic autem non poſſum quin mirer prævilam eſſe hanc ſpeciem *Infinitatis*, cujus capax eſt Scientia, qua de agimus, ab Immortali, & toties a me laudato Viro Vincentio Riccato; qui in Epiſt. III. *De Logarithmis numerorum negativorum*, ut in altera mea Præfatione adnotavi, maxima cautione adhibita, id abſolute impoſſibile non declaravit, quod ex noto Calculo nullo umquam prorſus modo fieri poſſe demonſtratur. Velle enim ſemper eumdem valorem aut negativum, aut imaginarium in baſi primo ſumpta aut negativa, aut imaginaria, negotium eſt, quod, cum requirat abſolutum illud, cui contradicit Analyſis qua nunc utimur, nequit ullo modo ad felicem exitum perduci. Quare poterat magnus ille Vir potiore jure hoc abſolute *impoſſibile* declarare, quam qui noſtris hiſce temporibus *impoſſibilem* declararunt *Caſum irreductibilem*, a ſummis Viris qui præierunt, ſpe ſemper, licet ſemper fruſtra quæſitum. Ille tamen, qui in *Caſu irreductibili*, præter ea, quæ paſſim proſtant, nihil de ſuo ad dirimendam quæſtionem præcipue adjecit, ita hic ſententiam exprimit: „ Hanc formulam difficilem judico, & *fortaſſe impoſſibilem*. „ Per verbum *fortaſſe* videtur noluiſſe id abſolute *impoſſibile* declarare; ſed non deſperaſſe tamen id obtineri poſſe inventione alius methodi, quæ omnium, quas nunc habemus, aptiſſima eſſet.

§. 52. Expoſui hoc loco libere quid in re tanti momenti ſentiam, nihil plus veritus ab iis, qui veritatem in me magis timent, quam falſitatem inſectantur. Sed ſi omnes præſtantiores alicujus novi Syſtematis Auctores validiſſimis oppoſitionibus obnoxii fuerunt; optime intelligo, experientia etiam doctus, quanam æquitate & gratia a quibuſdam excipiendus ſim, nunc præſertim cum audeo integrum Syſtema Analyticum proponere, quod tam longe a communi opinione & communi cogitandi ratione abeſt. Scio tamen futuros æquos rerum æſtimatores, qui nullo partium ſtudio, ea qua præditi ſunt æquitate, hominem ſi forte decidat auſis, commiſeratione potius, quam vituperatione dignum judicabunt; qui ſuo periculo rem tentat in Analyſi tanti ponderis ac momenti: non enim errorem in meis principiis prius quærent, quam mature expendant, num precaria ſint & imaginaria, an vero pendeant a Calculo, quo utor. Quæ quidem principia rejici

non

non poſſunt, niſi Calculus ipſe falſus, aut male firmatus demonſtretur. Alia enim eſt via, qua progreditur methodus inveniendi, alia eſt ratio demonſtrandi quod inveneris. Nam nemo ignorat, retrogredi neceſſe ei, qui novum quid detexerit, & cum aliis idipſum velit communicare. Utatur enim ſæpe neceſſe eſt veluti principiis, quæ tamquam fundamenta ponit, iis ultimis illationibus, ad quas primo meditando pervenerit. Nihil autem dubito, quin veri Scientiæ cultores hic ea principia tantum ſeveriori trutina perpendant, quæ deducta ſunt tamquam neceſſariæ conſequentiæ Calculi, de quo in hoc Libro agere aggredior, quique una cum ſuis principiis, aurificis, quod dicitur, ſtatera ab iis qui veritatem amant ac ſequuntur, examinandus eſt. Cetera vero innui tantummodo, ut, veluti compendio facto, appareat totum hoc meum generale Syſtema, quod, qua melius ratione potero, pedetentim impoſterum extricare conabor: quo facto ſevera tunc diſcuſſione opus eſſe judico. Scio quidem operoſum hoc negotium vires meas mirum quantum ſuperare: ideoque in priori Opuſculo ſæpe dixeram, me unum non ſufficere, ut felicem finem conſequatur. Aliud enim eſt viam intento veluti digito præmonſtrare, aliud ipſam quanta quanta eſt inoffenſo pede percurrere, ejuſque capita omnia recognoſcere. En igitur adumbratum, qualecumque tandem ſit, meum hoc generale Syſtema Analyticum.

§. 53. Antequam huic Præfationi finem imponam, ut deſignato huic Syſtemati majorem probabilitatem conciliare poſſim, liceat mihi demonſtrare, non eſſe tandem a vulgo receptis principiis ita alienum, ita novum, ut hujus non obſcura quædam indicia rem attente conſideranti identidem ſe prodant in Scriptis præſtantiorum Mathematicorum, quamvis non immunia ab iis erroribus, quos verum mixtum falſo neceſſario ſolet perducere. Unum hic cito teſtem (ut omittam nunc Euleros, Riccatos, &c.) Celeberrimum Alembertium, quem nuper fati neceſſitas abripuit, ex cujus Operibus non ſine magna admiratione manifeſta ſparſim ſemina illarum veritatum, quas propugno, deprehendi. Præter eam ipſiſſimam, quam mecum communem habet præclariſſimus Vir formulam, a me Mem.ª I.ª §. 37. citatam (quam non ita facile eſt, ut quidam ſibi ſuadent, aut utramque falſam, aut, quod magis incredibile & abſonum eſt, meam falſam, illam veram defendere: tantum partium amor, & opinio poteſt!), id unum referam, quod Tom. I. Suorum Opuſculorum Mathematicorum Mem. 6.

Sur les Logarithmes des quantitates negatives ſcriptum reliquit. Hic ille ob difficultates hucuſque inſuperabiles, atque inſeparabiles ab hac Quæſtione, & a proportione $1 : -1 :: -1 : 1$, eo adactus fuit, ut abſolute negaret definitionem quantitatum negativarum, quæ minores zero putantur, omnium Geometrarum conſenſione probatam, & unice ab omnibus receptam.

§. 54. „ Quare (inquit ille Art. 1.) liceat mihi animadvertere „ quam falſa ſit idea, quæ quantitatibus negativis tribuitur, dum di- „ cuntur hæ quantitates minores zero. Ut omittam obſcuritatem hu- „ jus ideæ metaphyſice conſideratæ, illi, qui ope Calculi ipſam con- „ futare volent, ſatis eſſe putabunt hanc proportionem conſiderare „ $1 : -1 :: -1 : 1$, quæ proportio realis eſt, nam productum „ extremorum æquale eſt mediorum producto; & item $\frac{1}{-1} = -1$, „ & $\frac{-1}{1} = -1$. Nihilominus ſi conſiderentur quantitates nega- „ tivæ ut minores zero, eſſet $1 > -1$, & $-1 > 1$; atque ideo „ nulla haberetur proportio. „ Mitto nunc explicationem hujus arcani, quod adhuc ſubeſt in hac proportione, quæ pendet ab iis, quæ monui in primo meo Opuſculo, in hac Præfatione §. 15. nota (*b*), & univerſim in hoc Opere. Verum antequam difficultatem contra definitionem communem quantitatum negativarum examino, parumper digrediar neceſſe eſt. Certum eſt eſſe $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$; ſed ex Alembertio $-1 = \frac{1}{-1}$, ergo uno pro altero ſub ſigno radicali ſubſtituto, erit $\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$, & $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{1}$: at $\sqrt{1} = \pm 1$; ergo $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \pm 1$, ſive $(-1)^{\frac{2}{2}} = \pm 1$. Præſtantiſſimus Auctor iſte non poterat nec ſimpliciori nec veriori ratione, quæ negari non poteſt, niſi meridiana luce coecutire velimus, ſcilicet niſi velimus negare æquationem $-1 = \frac{1}{-1}$, conſecutiones a me propugnatas tutari. Quod ſi tamen obſtinato animo re-

reprobetur $-1 = \frac{1}{-1}$, etiam altera $1 = -1 . -1$, a qua neceſſario $\frac{1}{-1} = -1$ deducitur, reprobetur neceſſe eſt; quam tamen utriſque, ut dicitur, ulnis amplectuntur.

§. 55. Sed ad rem redeamus, monendo Auctorem infra confeſſum eſſe quoſdam Geometras neceſſario in errorem inductos eſſe, ubi agitur de valore quantitatum negativarum. „ Obſervarunt, inquit, $a < 2a$ „ exhibere $a - 2a < 0$, ſive $-a < 0$: ex quo concluſum eſt „ quantitates negativas minores eſſe zero. Sed in hunc errorem non „ impegiſſent, ſi animadvertiſſent, quantitatem negativam minorem „ zero abſurdam eſſe, & $-a < 0$ nihil aliud ſignificare, niſi „ $B - a < B$, B cum ſit quantitas qualiſcumque ſubintellecta, & „ major quam a. „ Hactenus ille. Verum pace tanti Viri fidenter dicam, conſecutiones neceſſarias a veris principiis manantes non poſſe eſſe abſurdas, &, ſi verum eſt a minorem eſſe $2a$, procul dubio verum eſſe oportere ut ſit $-a < 0$. Et ſane (ut eodem utar calculo, quo impugnat Auctor hanc ſuppoſitam abſurditatem) ſi ipſe vult eſſe ſemper $B > a$, erit etiam ſemper $B - a < B$, quæcumque ſit quantitas B. Verum ſi dat hoc, dandum etiam ei erit quod ex hoc evidentiſſimo axiomate oritur: *Si nempe a quantitatibus inæqualibus ſubtrahatur æqualis quantitas, remanere inæqualia reſidua, & minus ſemper id eſſe, quod oritur a minori quantitate æque diminuta.* Ergo ſi $B - a < B$, ſubtracta utrimque B, erit juxta axiomata reſiduum primum minoris quantitatis minus reſiduo ſecundo majoris. Ergo $B - a - B < B - B$, ſive $-a < 0$. Tantum igitur abeſt, ut poſita $a < 2a$, repugnet $-a < 0$, ut contrarium ſi afferas, tollatur e medio axioma illud evidentiſſimum.

§. 56. In hoc tamen una mali cauſſa eſt, ignoratio duplicis tranſitus a poſitivo ad negativum per abſolutum Zero, & per Infinitum abſolutum, cum non admittatur niſi primus. Hac enim ratione confunditur relativum cum abſoluto, & improprie transfertur attributum, quod uni eidemque quantitati tranſeunti a poſitivo ad negativum per zero tantum competit, ad alterum tranſitum per Infinitum: atque ita, quod uni modo proprium eſt, alteri incaute tribuitur. Ex eo quod monui §. ſup. intelligi poteſt $B - a$ relative

tan-

tantum minorem eſſe B dum poſitivum tranſit ad negativum per Zero, quod cum verum in uno hoc caſu ſit, nihil facit cum tranſitu per Infinitum. Nam ſi B eſt zero, tum veriſſima eſt ſuppoſitio $-a < 0$. Supponit enim prius exiſtere quantitatem poſitivam, quæ ſi quanto magis retrocedit eo minor fit, & fit nulla in puncto zero, profecto ſi ulterius procedat ultra zero, quo in caſu fit negativa reſpectu primæ poſitionis, minor ſit zero neceſſe eſt. Sed ſi B eſt illud *Infinitum Abſolutum*, de quo §. 42, & ſeqq., tunc falſa erit propoſitio, & poteſt vera eſſe contraria $B - a > B$. Nam $B - a$ indicat quantitatem, quæ ſemper viam poſitivorum incedens, exhauſtis omnibus poſitivi limitibus, fluens ſemper poſitive ad plagam negativam per ſpatium æquale a pervenit: atque ita $B-a$ ſuperat B per totam quantitatem a, cum ſit $B-a$ ſumma B poſitivi $+ (-a)$ ex parte negativorum: unde $B - a = B + a > B$; &, dempto communi infinito B, $-a = a$. Illa ergo quantitas a, quæ poſito tranſitu per zero erat negativa, poſito tranſitu per Infinitum fit poſitiva, cum a per plagam ſemper poſitivam in regionem quantitatum primi tranſitus per zero negativarum ingreditur. Secluſa hac duplicis tranſitus a poſitivo ad negativum, & contra, notione, numquam conciliari poterunt repugnantiæ, atque contradictiones, quæ in confeſſo ſunt apud omnes Analyſtas, quæ tamen ab illationibus neceſſariis deducuntur, ac conſequenter falſitatis condemnari non poſſunt.

§. 57. Et ſane ſi Celeberrimus Auctor duos hoſce fluendi modos diſtinxiſſet, & cum ſuppoſuerit quantitatem poſitivam B, quæ negativam $-a$ præcedit ſemper majorem ipſa negativa $-a$, animadvertiſſet etiam quid hæc ſuppoſitio neceſſario requirat; facile intellexiſſet, quantitatem B, quæ ſemper ſuperet quamlibet datam negativam, ut $B - a$ (quæcumque ſit quantitas a) ſit ſemper poſitiva, nihil aliud eſſe poſſe, quam Infinitum illud Abſolutum, quod indicatum a me eſt. Nam ſi $B-a$ ſemper poſitivam velis, cum $-a$ quamcumque quantitatem etiam infinitam referre poſſit, profecto non poteſt univerſim vera eſſe aſſertio Auctoris, niſi B ſit ultimum illud *Abſolutum tranſcendentiſſimum Infinitum*, ad quod ultimo pervenire poteſt quantitas negativa $-a$: quo in caſu ultimo, cum $B - a$ fiat zero, nunquam negativa, patet in hac tantum ſuppoſitione $B-a$ ſine errore ſemper poſitivam aſſumi poſſe, cum ad ſummum $B - a$ æquetur zero, nec ultra procedere poſſit, cum per hypotheſim nul-

lum

lum Infinitum ſuperare poſſit abſolutiſſimum, & ultimum illud Infinitum B; ut ſuo loco clarius cognoſcetur. Inſcius igitur Auctor per hanc ſuppoſitionem tranſitum per *Infinitum Abſolutum*, ac proinde neceſſitatem illius *Infiniti Abſoluti*, quod tamquam inſanabile abſurdum a Calculo excluditur, non obſcure indicavit.

§. 58. At recepta, & conceſſa hac una Auctoris notione, & origine quantitatum negativarum, omnino excluditur tranſitus per zero, tranſitus ſcilicet ille unus a poſitivo ad negativum, quo innititur Calculus, quem nunc habemus. Nam, ut addit Auctor, ſi demonſtrari ratio non poteſt, qua & b, & $-b$ det idem quadratum poſitivum, niſi ponatur b orta ex differentia duarum quantitatum $a - c$, quarum ſecunda c ſit minor a, ſi b eſt poſitiva; major autem a, ſi b ſit negativa, quæ tamen, ut ipſe ait, in hoc caſu quantitatem poſitivam $c - a$ repræſentat; non videt hinc excluſas omnino eſſe a Calculo quantitates negativas, ac conſequenter prorſus excluſum tranſitum a poſitivo ad negativum per zero?

§. 59. Ex quo neceſſario fit ut Auctoris ſententia tollantur a Calculo quantitates imaginariæ, quæ hac doctrina omnes eſſent reales. Nam ſi concedatur $-b$ ſemper ſignificare quantitatem poſitivam $c - a$; neceſſe etiam eſt concedatur radicem $c - a$ eſſe realem; atque ideo ſublatas omnino quantitates imaginarias, quæ ab ipſo, & ab aliis omnibus univerſim habitæ ſunt abſolute tales, & aptæ ad ſignificandam *impoſſibilitatem* abſolutam earum inveſtigationum, quarum affectiones analyticæ ab imaginariis contaminantur. Quomodo vero res hæc ſe habeat, §. 23. & ſeqq. Cap. III. Lib. II, & paſſim in toto hoc Opere oſtendetur.

§. 60. Illud inſuper animadverto, ſi ſupponatur, ut ſupponit Auctor, $-b = c - a$ ($c - a$ poſitiva), erit etiam extracta radice $\sqrt{-b} = \sqrt{c - a}$: atque inde conſequenter poſitivum erit æquale negativo, & reale imaginario. En igitur formula $\sqrt{-1} = 1$ ab Auctore confirmata, in quam demonſtravi neceſſario recidere aliquas conſecutiones a communi Calculo rite deductas. Non ſunt igitur quantitates imaginariæ tales abſolute, ſed tantum relative: neque illationes *impoſſibilitatis* adeo neceſſariæ, ut non liceat tranſire ab imaginario ad reale, & contra, alteram pro altera formula ſubſtituendo: ex quo colligitur verbum *Æquationis* eam habere, quam ego propugno,

gno, ſignificationem. Quare ipſa ſuppoſitio $-b = c - a$ ſatis Auctorem admonere poterat de hoc duplici tranſitu per *Zero*, & per *Abſolutum Infinitum*; atque id, quod uno in caſu imaginarium eſt, in alio poſſe fieri reale. Definitionem igitur communem quantitatum negativarum non erat cur repudiaret, ſed potius erat cur hac nova notione amplificaret, ac latius produceret.

§. 61. Ex his, quæ hactenus dixi, ſatis intelligi poteſt meas aſſertiones cum tanti Viri aſſertionibus rite explicatis convenire. Licet autem quod ipſe de quantitatibus negativis ſcripſit, non aliqua menda careat; tamen patet ſubeſſe veritatem, & arcanum illud adhuc ignotum circa quantitates negativas aliquo modo ſuſpicatum eſſe, ad id nempe ductum neceſſitate Calculi, cujus principia opinione communi præoccupatus non ſatis mature perpendit, non evolvit, non ſatis fide ſequutus eſt. Quapropter vere affirmari poteſt vel ipſos ſummorum Virorum errores magnum quid in ſe continere, quod præſtantiſſimo eorum ingenio ex æquo reſpondet.

§. 62. Poſtquam ea ex Scriptis tanti Viri collegeram, quæ ſin minus ipſe extricavit, ſaltem ſuſpicatus eſt; non injucundum ſane mihi fuit id legere, quod propoſuit Celeberrima Berolinenſis Academia, ei in annum 1786 præmium aſſignatura, qui *Theoriam* invenerit *claram, & exactam ejus, quod a Mathematicis dicitur Infinitum*. Quo quidem, niſi vehementer erro, adumbrata eſt neceſſitas hujus mei novi Syſtematis. Cum enim optime noverit Sapientiſſima illa Academia, ſi vera eſt opinio, quæ univerſorum animos opplevit *terminos magnitudinis infinitæ apertam contradictionem involvere*, non poſſe intelligi quanam ratione ex tali contradictione oriri poſſint tot Theoremata, quæ vera ſint: ut ſalvam Scientiis Mathematicis tueatur *denominationem*, qua *Scientiæ per excellentiam exactæ dicuntur* (quo nomine appellatæ ſemper fuerunt ab omni antiquitate, quæ tamen *ſerio ſemovit quicquid proximum eſt infinito*) illud proponit: ut ſcilicet inveniatur *certum, & clarum principium, verbo Mathematicum, quod loco Infiniti poni poſſit*.

§. 63. Ego vero arbitror mentem & cogitationem Sapientiſſimæ illius Academiæ aſſequi, & ex æquo vaſtiſſimum hoc, & difficillimum Problema ſolvere poſſe neminem, niſi de reformanda tota Analyſi prius cogitet, & veſtigia non inutiliter fortaſſe a me impreſſa perſequatur. Ubi enim demonſtrata vere ſit *Poſſibilitas* Infiniti Abſoluti,

ejuſ-

ejuſque *Realitas*, quæ pari paſſu cum *poſſibilitate*, & *realitate* Abſoluti Zero procedit (hi enim termini reciprocantur), tota illa evaneſcit contradictio, propter quam dubitandum videbatur, quanam ratione tot hinc certiſſimæ veritates deducerentur: atque hinc jure ac merito veram denominationem tuebuntur, hæ Scientiæ, quæ, ſi ita res eſt, non niſi a poſſibili & vero poſſibile & verum deducunt.

§. 64. Hoc primum peracto, neceſſe eſt invenire Canones, quibus pertractentur hæc duo *abſoluta realia*, qui, ut ego arbitror, & inter ſe ſunt longe diverſi, & longius producti, quam ii, quibus pertractantur quantitates infinite parvæ, & infinite magnæ, quæ non niſi relative tales ſunt. Ubi vero fixa, ſtabilitaque ſunt prima harum duarum Methodorum principia, opus eſt legitimum ab una ad aliam tranſitum anquirere, & certam ac liberam inter ipſas communicationem aperire. Quod ſi quæras quonam adjumento hic tranſitus poſſit haberi, quin in Abſolutum Zero, aut in Abſolutum Infinitum noſmet immittamus, & illud ſit *principium certum & clarum*, quod loco alterutrius poſſit poni; illud ego eſſe exiſtimo, quod *Circulationem* appello, ab illo Sinuum, & Coſinuum adumbratum: ſed, ut ſupra dictum eſt, hactenus nimis limitatum, & a vero ſuo fine detortum, eo quod unus ex abſolutis terminis, qui reciprocantur, tamquam abſurdus rejectus eſt.

§. 65. Hoc illud eſt, quo Sapientiſſimæ Academiæ fieri ſatis poſſit: & hoc nimirum eſt illud meum adumbratum Syſtema, quod adeo extenſum eſt, ut vix cogitatione percipiatur. Opus tamen hoc tantum felici exitu inchoare dubito quis poſſit, niſi prius Calculus, qui dicitur finitus, in meliorem ac ampliorem formam reſtauretur: hic enim eſt baſis ac fundamentum, quo innititur vaſtum hoc analyticum ædificium. Hic tamen Calculus anguſta nimis ratione derivatus eſt a Methodo Abſoluti Zero, quæ licet ab omnibus recepta, non tamen, ut credo, ſatis bene explorata. Digna res eſt, in quam omnes ingenii nervos hujus Seculi Analyſtæ omnes conjunctis viribus conferant, ut ad maturitatem ſuam perveniat, atque tandem perficiatur. Hoc ego uno contentus ero, ſi quo modo potero quædam proferam, quæ veritatem, ac neceſſitatem hujuſce tam vaſti Syſtematis evincant, atque tandem excitent celebriores Mathematicos ad illud proſpere urgendum. Inde enim eveniet certa & plena ſolutio ejus Problematis,

g a quo

a quo tota pendet Algebræ perfectio, quodque ea Societate, quæ ipſum proponit, digniſſimum eſt.

§. 66. Certe quidem, ut finem faciam, niſi audeamus conſilio & methodo duce, prætergreſſis longe infiniteſimorum, & infinitorum relativorum terminis, quantitatem fluentem certis legibus ſequi, ac pene perſequi uſque in ſinum, ut ita dicam, abſoluti, in quo vel hac, vel illa de cauſſa quantitatis nomen, & eſſentiam amittit, ut inde extrahatur in novam naturam per indicata artificia; fruſtra conabimur eas difficultates omnes, atque impedimenta ſuperare, quæ identidem in Analyſi offendimus. Axioma illud, quo fertur quantitatem fluentem numquam terminare in *Abſoluto Zero*, aut in *Abſoluto Infinito*, quicquid abſolutum eſt a Calculo ſemper ablegavit. Et tamen, ſi rem mature expendamus, noverimus Calculum, quem dicimus finitum aut æquationum, ſuapte natura recidere in *Zero Abſolutum*. Hoc dato, ſomnium nemo dixerit ejus inverſum *Abſolutum Infinitum*: & ex his duobus inexhauſtis tamquam fontibus, ac pene intactis tertium *Circulationis* derivatum ſi in ſubſidium adhibeamus, *impoſſibile* non erit novas quaſdam, & fœcundas veritates promere ad extricandos atque amplificandos terminos Calculi, qui hodie in uſu eſt. Ab hoc igitur qui dicitur finitus Calculus, qui unus & idem cum abſoluto eſt, audeo mearum inveſtigationum principium ducere, ut inde eas ad aliarum Methodorum finem, Diis hominibuſque adjuvantibus, perducam.

§. 67. Ex his omnibus alterutrum ſequatur oportet: aut ſeries errorum, qua non abſurdior eſſe poſſit; aut Series veritatum, quas ſua meditatione, & ſtudio dignas Geometræ omnes judicent. Utcumque erit, ab omni privata controverſia certe liber ero. Alterum longiſſime aberraſſe me a veritate convinceret, nulla ſpe in viam redeundi, omnique juſtæ defenſionis cauſſa erepta, ad juſtius ſilentium adigeret: alterum doctiorum, æquiorumque Geometrarum ſuffragio a malevolorum incurſionibus vel me tacentem ſatis defendet. Ingenui hi veritatis amatores æquo, ac tranquillo animo judicium ſuum ferentes vel os mihi in perpetuum obſtruent, vel conjunctis viribus addent animos ad graviſſimum hoc negotium expediendum. Illud interim certum habeant, ut ut res ſe habitura ſit, me neque errores meos obſtinato animo defenſurum, neque adverſus præjudicatam opinionem, aut malevolentiam parum decenter pugnaturum. Atque ſpero futurum, ut Celebriores Mathematici, quos ſemper qua decet veneratione ſum proſequu-

ſequutus, me ab omni appoſita arrogantiæ ſuſpicione, quod omni relicta de meis rebus cum ipſis communicandi occaſione, latendi conſilium ceperim, & mecum hactenus in labore ac meditatione verſandi, me inquam æquo animo vindicent; poſtquam re ipſa cognoverint totum hoc negotium judicari plenius non poſſe, niſi prius quaſi novum chaos univerſas quidem Mathematici Mundi formas complexu ſuo continens evolveretur in naturalem ſpeciem ordinis: ita ut ex ipſo inde manantium doctrinarum uſu, atque apparatu judicium habeatur de earumdem principiis, quæ vix profecto ſperandum erat ut bene acciperentur, donec cruda, ac ſterilia prodirent, & communibus Analyſeos facultatibus detrahere potius, quam addere plurimum cenſerentur. Hinc illa denique me ſpes tenet fore, ut qui non privata ſtimulatione, ſed Scientiæ, quam in commune profitemur, emolumento ducuntur, me, ſi modo quæ aggredior tanto non ſint aliena auſu, nova audentem ea qua decet moderatione excipiant: & ſi quæ aut non ſatis clare percepta, & explanata, aut minus recta, aut leviter in tanta rerum mole adumbrata offendant, non probro mihi tribuant, ſed collatis ſtudiis explanent, emendent, perficiant: experientia enim doctus „ jam provideo animo, *ut verbis Livii utar*, veluti qui pro-
„ ximis litori vadis inducti mare pedibus ingrediuntur: quicquid pro-
„ gredior, in vaſtiorem me altitudinem, ac veluti profundum invehi,
„ & creſcere nunc opus, quod prima quæque perficiendo minui vi-
„ debatur „.

INDEX CAPITUM

LIBRI PRIMI.

CAP. I. *De notione abſoluta, ac relativa quantitatis.*
CAP. II. *De primis Analyſeos abſtractæ notionibus.*
CAP. III. *De Æquationibus linearibus limitis, ac de duplici earum Syſtemate.*
CAP. IV. *De diviſione unius Syſtematis in plura, & de plurium in unum conjunctione.*
CAP. V. *De legitima Syſtematum conjunctione in æquationibus linearibus.*
CAP. VI. *De Syſtemate indeterminato, ex quo eruuntur veræ Infiniti, & Infiniteſimi tam abſoluti, quam relativi notiones.*
CAP. VII. *De ſolutione æquationum linearium.*

LIBRI SECUNDI.

CAP. I. *De æquationibus ſecundæ dimenſionis ortis a producto duarum variabilium Syſtematis linearis baſis datæ; deque earumdem limitibus rectilineis.*
CAP. II. *De limitibus rectilineis æquationis ſecundæ dimenſionis ortæ a producto duarum variabilium Syſtematis linearis baſis variabilis.*
CAP. III. *Alia methodo quæ ſuperius de limitibus rectilineis demonſtravimus confirmantur.*
CAP. IV. *Primæ, quæ ex ſuperioribus principiis manant, conſecutiones traduntur.*
CAP. V. *De limitibus curvilineis æquationum ſecundæ dimenſionis utriuſque Syſtematis, ac de completa earum ſolutione.*
CAP. VI. *Methodus in ſolvendis æquationibus primæ & ſecundæ dimenſionis vulgo uſurpata ad examen revocatur.*

LIBER PRIMUS.

CAPUT I.

De notione abſoluta, ac relativa quantitatis.

§. I. DE primis Analyſeos elementis, deque ſolutione æquationum primi, ſecundi, ac tertii gradus, nova, qua utor, methodo tractaturus, ea quæ paſſim proſtant, quæque cum his quæ jam meditatus ſum, cohærent, ne actum agam, omittam, ac in iis tantum immorabor, quæ aut viam, licet communia, ſternunt ad id, in quod tendo; aut ſunt nova prorſus, aut aliquo modo a probatis univerſim notionibus diſcrepantia. Quod ut perficiam, ſequentes Definitiones ſunt præmittendæ.

DEFINITIO I.

§. 2. *Quicquid, in genere & abſolute loquendo, incrementi & decrementi capax eſſe concipitur*, quantum *dicitur*.

§. 3. Ex hac definitione, omnium jam Philoſophorum recepta conſenſu, eruitur, quicquid ſemel hanc duplicem habet proprietatem, numquam ipſa carere poſſe, licet vel in immenſum aut augeatur, aut quavis diviſione minuatur; niſi notionem ipſam *quantitatis* tollas, ac falſo velis rei alicujus eſſentiam a modo, quo res ipſa afficitur, pendere. Quicquid igitur in genere ſemel *quantum* eſt, ſemper *quantum* ſit oportet, quocumque tandem modo hæc in ſe indeterminata *quantitatis* notio definiatur. Quod enim, manente ſemper eadem *quantitatis* notione, univerſim ac ſine ulla determinatione *quantum* eſſe concipitur, iis tantum modis determinari poteſt, qui ipſam *quantitatis* ideam afficiant, circumſcribantque, non vero tollant: ſecus notiones inter ſe oppoſitæ de *quanto*, & *non quanto*

to ſimul copularentur; quod fieri nequit: alterutra namque manente, altera tollatur neceſſe eſt. Hinc jure Mathematici, ac Phyſici *quantitatem* cujuſcumque generis, quæ hac una a nobis definitione concluditur, nec in *nihilum* diviſione deſinere, nec ad *ultimum infinitum* additione pertingere poſſe aſſeverant. Quare *quantitatis* nomine in genere, id tantum intelligendum eſſe contendimus, quod natura ſua, & intima ſui eſſentia ita augeri, vel minui poteſt, quin hanc augendi, & minuendi facultatem unquam amittat.

§. 4. *Abſolutum* igitur *zero* (cujus quidem notionem poſitivam ac realem habemus, dum hoc augeri poſſe, minui vero nequaquam poſſe concipimus) & *Infinitum abſolutum* (cujus ideam æque realem, & poſitivam eſſe, ac ejus inverſa *abſoluti zero* notio, alias demonſtrabo) quod ulterius reſpuere incrementum, diminutionem vero ſubire poſſe concipitur, in ſuperius tradita *quantitatis* notione minime concluduntur; cum utrumque una, aut altera ex iis proprietatibus careat, quas ſimul *quantitatis* eſſentiam conſtituere diximus; proindeque ſi abſolute ſpectentur, ex albo *quantitatis* ſunt expungenda: utrumque enim notionem poſitivam *quantitatis* tollit, ſive *quantitatem* ipſam. Hæc tamen, ſi bene noveris, ſunt quidam veluti limites abſolutiſſimi, mente concepti, quos ultra citraque nequit conſiſtere *quantum*; quæ Mathematici, uti in Præfatione innuimus, nomine *quantitatis quavis data minoris, majoriſve* deſignant: methodi tamen, qua utuntur, imbecillitate intra *relativi* fines coguntur continere.

§. 5. Hæc, quam ſupra explicavimus, *quantitatis* in genere abſtracta notio mente concepta, nos docet *quantitatem* actu exiſtentem binis utrinque limitibus circumſcribi oportere. Quod enim infinitis utrinque modis determinari poteſt, nequit actu, ac ne mente quidem exiſtere, niſi uno tantum modo definiatur. Ut vero rite tractentur hujuſmodi *quantitates*, quæ actu exiſtunt, aut exiſtere concipiuntur, proindeque, in ſe & abſolute conſideratæ, finitæ cenſendæ ſunt; regula quadam opus eſt, quæ earumdem quantitatum affectiones inveſtiget, atque theoremata tradat univerſalia, quæ cuicumque tandem quantitati ſingulari applicari poſſint. Hujuſmodi vero Scientia univerſalis *quantitatis* in genere ea eſt, quæ *Algebra*, ſive *Analyſis* paſſim audit. Quoniam vero Scientiæ cujuſque munus & finis eſt, ex datis ignotum, quod quæritur, inveſtigare, atque conſequi; ideo aliqua prius cognita, atque ex una *quantitatis* in genere notione deducta principia ſumenda ſunt, quæ ſimul cum iis, quæ quæruntur, artificioſo methodorum ſubſidio recte conjuncta, ad ea ipſa nos vel inſcios, atque invitos veluti manu ducant. Porro principium, quo cetera omnia principia nituntur, eſt primus ille modus determinandi *quantitatem* in genere, qui quidem, licet ſi abſolute rem ſpectemus, pro arbitrio ſumi poſſe videatur, tamen a varia ratione, qua ab Analyſi formulæ algebraicæ tractantur, neceſſario pendet.

§. 6. Hæc vero prima quantitatis determinatio eſt ea, quam nomine *unitatis* deſignamus: quæ quidem natura ſua in ſe non eſt individua, ſed aut pro arbitrio talis a nobis initio ſumpta, aut ab adjunctis peculiaribus circumſtantiis neceſſario determinata. Cavendum igitur, ne nomine *unitatis* aliquid *abſoluti* intelligamus, ſed tantum *relativi*. Nam & quæcumque tandem *unitas* conſiderari ſemper poteſt ut aggregatum ex ſuis partibus, quarum ſingulæ pro *unitate* ſumi poſſunt:

ſunt: & (quod diligentius notandum) fieri poteſt, & ſæpius fit, ut quod pro uno atque individuo uſurpatum initio fuerat, mutatis circumſtantiis modum quoque exiſtendi mutet, ac diverſam etiam naturam induat. Hinc & illud probe animadvertendum, non ſemper ſcilicet eam, quam primo ſumpſimus, *unitatem* conſtanter perſeverare. Nam cum formulæ analyticæ opportunis adhibitis ſubſtitutionibus infinite variari poſſint, infinitis etiam modis *unitas* primo ſumpta in alteram converti poteſt. Hinc nulla datur *quantitas*, quæ aliquando *unitatis* vices gerere, & pro *unitate* uſurpari nequeat. Quin imo ipſum quoque *zero*, ipſumque *infinitum abſolutum* (quæ ſuperius non *quantitates*, ſed limites *quantitatis* abſolutiſſimos diximus) nomen hoc *unitatis* ſumere aliquando poſſe conſtabit: dummodo Analyſim non prævertamus, aut illi vim inferamus, ſed illam fidenter ſequuti, ad ea, quæ ipſa nos docet, diligenter attendamus; ut infra patebit.

§. 7. Illud vero veſtigiis Analyſeos tantum inſiſtenti perincommode accidit, quod formulæ analyticæ, ea qua pollent infinitate, cum varios, atque etiam infinitos exiſtendi modos a variis, atque infinitis, ſed ſucceſſivis ſubſtitutionibus pendentes ſub ſe comprehendant, definiri omnes uno eodemque tempore minime poſſunt, neque omnes una produci. Hinc ad alia artificia confugiamus oportet, quibus ſingulos ſeorſim caſus ſingulis ſubſtitutionibus reſpondentes uno intuitu mente percipere, atque oculis ipſis liceat intueri: ex quibus facile ſit illos cognoſcere, atque ſecernere, qui ad uſum pro re nata veniunt. Quod quidem una nobis ſponte offert ac præſtat Geometria, opportuna figurarum deſcriptione. Quare hæc admirabilis Geometriæ cum Analyſi conjunctio, non ſolum, meo quidem judicio, ad elegantiam, ſimplicitatemque demonſtrationibus conciliandam conducit, atque ad ea per conſtructionem oculis ſubjicienda, quæ analytice, aut nullo modo, aut ægrius obtineri poſſunt; ſed (quod caput eſt) prorſus eſt neceſſaria ad ea indefinita explicanda, atque ſimul uno, eodemque tempore delineanda, quæ ex formula analytica non niſi ſingillatim, ac ſucceſſivis ſubſtitutionibus eruerentur. His adde quæ Cap. III. §. 3. uſque ad 7. dicimus.

§. 8. Hoc, quod dixi, ſemel ignoratum in cauſa fuit, cur præcipiti omnium judicio ac conſenſu ſtatutum fuerit, formulas quaſcumque analyticas ex iiſdem ſemper variabilium valoribus conflatas eſſe, qui ex prima, qua ſe ſe offerunt forma deducuntur; fierique non poſſe ut plures, quam quæ per exponens maximum æquationis indicantur, radices mutata forma habeantur. Atque ex hac quidem præjudicata opinione præcipuus, ac maxime neceſſarius, quem a Geometria cum Analyſi conſociata conſequi poſſemus, fructus omnino tollitur. Qui enim aut haſce inter ſe natura conjunctas divellunt, aut maxima, quæ in utraſque inde dimanant commoda, hujuſce veritatis ignoratione, non ſatis habent perſpecta, atque cognita; utraſque in arctum compingunt, & anguſtioribus ſane limitibus, quam quibus natura ſua continentur, maximo utriuſque damno concludunt. Hoc a me dictum ne ita leviter, ut factum fuit, excipiatur, rogo; quin potius ea, quæ infra dicam ad hanc meam ſententiam calculis ipſis confirmandam, libera & attenta mente excutiantur.

§. 9. Quare ex hac mutua Analyſeos cum Geometria conſpiratione illud conſequitur, quod quantitas, cujuſcumque naturæ tandem illa ſit, quæ ſymbolis,

atque ſignis in Analyſi repræſentatur, ſumpta ad libitum linea, quæ ipſius unitatis vices gerat, lineis geometricis exprimi poſſit, ejuſque affectiones mutationeſque tamquam in tabula delineari: quod ita omnibus notum eſt, ut hîc attigiſſe ſufficiat. Hinc licet quantitatem in genere conceptam ſemper augeri, minuique poſſe, limitibus hinc inde infinite diſſitis, in prima definitione aſſeruerimus; tamen cum non repugnet punctum aliquod in quavis linea arbitrio determinare, ex quo initium ſumere lineam ipſam, vel in quod deſinere concipiamus: ita non repugnat in quantitate quacumque limites illos mente concipere, quos ſupra diximus abſolutiſſimos, tamquam extremos ipſius quantitatis finitæ terminos. Punctum enim geometricum quod, omnium conſenſu, nullius dimenſionis, ſed *ſignum* tantum in quantitate recte definiri poteſt, commode *abſolutum zero*, illiuſque locum exhibebit, ex quo quantitas quæcumque initium ſumens, aut in ipſum deſinens, *nulla* cenſenda eſt. Quomodo vero *abſolutum Infinitum* geometrice adumbrari poſſit, cum de hoc Infinito agam, indicabo.

DEFINITIO II.

§. 10. Poſitivi & negativi *notio, quam nobis exhibet Analyſis, relativa tantum eſt, non abſoluta.*

§. 11. *Poſitivi* & *negativi* notio, communi methodo, tota nititur poſitione illius puncti ſuperius memorati, ex quo originem ducere, aut in ipſum deſinere ſuppoſuimus quamcumque quantitatem fluentem, linea expreſſam. In prima poſitione a non quanto ad quantum, in ſecunda a quanto ad nihilum tranſitus fit. Hinc conſequitur, valorem linearis cujuſcumque fluentis quantitatis a ſpatio emenſo ita pendere, ut in hoc puncto *nullus* ſit, aliquis vero ſtatim ſit, magiſque augeatur, quo magis hinc inde ab hoc puncto linea recedit: & e contra cum hinc inde linea ſit quanta, quo propius adverſis frontibus hinc inde ad punctum hoc accedit, eo magis minuitur, donec in ipſo puncto nulla prorſus evadat. Hoc modo conſiderata quantitatis geneſi, linea *fluentis* nomen aſſumit, cum non niſi fluendo augeri vel minui poſſit, ejuſque fluxus a quocumque minimo ſpatio emenſo pendeat. Quare luce clarius patet, licet in puncto dato linea abſolute nulla ſit, tamen non niſi relative nullam dicendam eſſe: cum enim nihil impediat, quominus excurrere ſemper hinc inde indefinite poſſit; niſi prius arbitrio punctum illud ſtatuatur originis, ſemper erit quanta, cum nullus natura ſua neceſſarius ſit terminus, in quo vere & abſolute nulla ſit. Licet igitur *zero* notionem abſolute negativam ex adverſo oppoſitam notioni quantitatis in mentem excitet, ac proinde *zero abſolutum* recte dicatur, aliquid tamen *relativi* continet hæc *abſoluti zero* notio: cum punctum illud, in quo lineæ fluxus nullus omnino ſit, pro lubitu ſumatur oportet. Non repugnat igitur, mutato hujuſce puncti loco, id quod in primo caſu nullum erat, eſſe in hoc aliquid & quantum.

§. 12. Inſuper, cum & ex hoc puncto originem ducere, & ſimul in ipſum deſinere quantitas concipiatur, in ipſo & initium primum linearis incrementi, & terminus ultimus decrementi promiſcue ſumi poteſt. Primo concipiendi modo nulla ſupponitur ante fluxum linea, quæ tamen fluente puncto ſtatim quanta fit, con-

continuo fluxu ſemper augetur: ſecundus vero modus jam exiſtentem & quantam lineam neceſſario requirit, quæ tamen continuo contrario fluxu ſemper decreſcens, tandem in puncto nulla fit. In primo caſu linea, in puncto nulla, ſe ſe exerit atque explicat, magiſque augetur continui fluxus additione: in ſecundo caſu, jam quanta decreſcit fluxus ſubtractione. In primo enim caſu fluxus gignit non genitam quantitatem, in ſecundo fluxus oppoſitus in jam genita quantitate, quod a primo fluxu acceperat minuendo, tandem omnino deſtruit. Verum cum hinc inde a puncto linea ſemper quanta ſit, hinc inde a puncto lineam vel nullam fluxu gigni, vel jam genitam contrario fluxu deſtrui, liberum eſt cuique ſupponere. Quare primum arbitrio neceſſe eſt determinare plagam illam, in qua ponitur quantitatem jam a fluente puncto genitam exiſtere; quæ proinde e ſinu, ut ita dicam, zero, fluxu continuo ad quantitatem educta, notionem quantitatis poſitivæ nobis exhibet, cum ex adverſo illinc a puncto nulla alia quantitas prius exiſtens ponatur. At hac poſita quantitate poſitiva, ſi ultimus adverſo itinere gradiatur fluxus, qui proinde negativus reſpectu primi eſt, tantum a quantitate poſitiva detrahit, quantum eidem poſitivus addiderat: remanet tamen quantitas poſitiva ultimo fluxu diminuta. Rurſus ſi ab hac fluxus negativus tollat alterum ſui æqualem fluxum poſitivum, remanet iterum quantitas poſitiva, ſed duplici diminuta fluxu: & ſic ad infinitum procedendo quantitas poſitiva ſucceſſive minor fit, donec a repetitis fluxibus negativis, tota denique in dato originis ſuæ puncto deſtruatur. Ulterius per eamdem viam rurſus gradiens fluxus negativus, cui nullus occurrit amplius præexiſtens fluxus poſitivus, non ut prius deſtruit, ſed ædificat; gignatque lineam ſuæ ipſius naturæ, ideſt negativam, neceſſe eſt. Quare negativi notio prius ſupponit poſitivi notionem: cum negativa quantitas non gignatur niſi a fluxu negativo, qui poſtquam in parte oppoſita verſus punctum accedens, fluxus omnes contrarios, a quibus poſitiva quantitas fuit conflata, deſtruxerit; illinc a puncto progrediens quantitatem tandem gignit ſui ſimilem, ſcilicet negativam. Quare *poſitivi* & *negativi* nomen relativum eſt. Nam antequam definiatur utrum quantitas aliqua ſit poſitiva, aut negativa, libere determinetur primum oportet punctum originis, a quo hinc inde procedentes fluxus contrario motu progrediantur: deinde videndum utrum prius exiſtat, aut exiſtere concipiatur terminus, cui quantitas comparetur, an ipſa ſit primus comparationis terminus. In hoc caſu abſolute conſiderata ſemper poſitiva ſumi poteſt, altera in plaga oppoſita negativa; in primo eſt negativa reſpectu quantitatis in plaga oppoſita prius exiſtentis, cui comparatur. Uno verbo, quæ relate ad aliam erat negativa, abſolute conſiderata fit poſitiva, cum nullus antecedens ſit terminus cui comparetur, ſed ipſa ſit primus comparationis terminus, ad quem altera in plaga oppoſita relata fit negativa.

§. 13. Juvat rem exemplo illuſtrare. Intelligamus datam pecuniæ quantitatem alteri debitam: quærenti utrum hæc quantitas poſitiva haberi debeat, an negativa; non prius recte reſpondeas, quam ſtatuas utrum eam velis inter pecuniam debitam, an creditam numerare, & utrum ad debitorem, an ad creditorem ea referatur. Si inter bona, quæ poſſidentur, ponas, & ad creditorem referas, poſitiva certe quidem erit; auget enim numerata creditoris bona: at ad debitorem relata,

erit

erit negativa; cum a bonis debitoris deducta eorum ſummam minuat. Quod ſi eam inter pecuniam debitam colloces, cum debitore collata, erit poſitiva; auget enim illius æs alienum: eſt vero negativa reſpectu creditoris, cum minuat aut tollat, ſi quod debet, hoc eſt augeat illius bona. Quare nulla quantitas abſolute & in ſe conſiderata dici poteſt poſitiva, aut negativa eo ſenſu, quo ab Analyſi hujuſmodi verba uſurpantur: quod enim relativum eſt, caret hoc adjuncto, ſi terminus relationis auferatur. Hinc cavendum eſt, ne *τὸ poſitivum*, quod intelligit Analyſis, cum abſolute poſitivo, ſive cum re vere, aut mente exiſtente confundas. In primo enim caſu nihil abſoluti intelligas velim, ſed tantum attributum relativum, quod poſito relationis termino poteſt applicari quantitatibus omnibus cujuſcumque naturæ, ac etiam illis, quæ imaginariæ ab Analyſi nuncupantur. Nam hoc ſenſu etiam quantitates imaginariæ dici poſſunt modo poſitivæ, negativæ modo, pro diverſa earum natura, & termino, cui comparantur: licet ſpeciem quamdam repugnantiæ præſeferre videantur.

§. 14. Ex hac una definitione rem attentius conſideranti patebit, non dari in Analyſi *imaginarium abſolutum*, hoc eſt aliquid quod abſolutam involvat contradictionem: hinc ſuperius diximus imaginarium *ſpeciem quamdam repugnantiæ præſeferre*. Cum enim imaginarium oriatur ab extractione radicis quadratæ quantitatis negativæ, & cum notio poſitivi & negativi ſit tantum relativa; quæ prius dicebatur negativa, ſi diverſo modo reſpiciatur, & ad diverſum terminum referatur, poſitiva cenſenda erit: quæ igitur in primo caſu, extracta radice, imaginarium dabat, hæc eadem in ſecundo realis erit. Sic in allato exemplo extractio radicis quadratæ a pecunia debita, dabit quantitatem, quæ & realis & imaginariæ vices ſubeat neceſſe eſt, pro diverſa ratione, qua ſuperius pecuniam illam conſideravimus.

DEFINITIO III.

§. 15. *Via eſt ſpatium a quantitate percurſum, dum ipſa movetur: fluxio vero eſt incrementum illud, aut decrementum minimum, quo in quovis ſpatio minimo percurrendo quantitas afficitur.*

§. 16. Hæc duo in Analyſi caute ſunt diſtinguenda. Si concipiatur ex. gr. linea A B (*Tab.* 1. *fig.* 1.) ſibi ipſi parallela moveri directione A C, quin nulla magnitudinis mutatione afficiatur, nec ullum de ſe veſtigium relinquat, hoc eſt ſuperficiem non gignat; linea hæc hoc modo concepta nec directionem nec magnitudinem, nec dimenſionem, ſed tantum locum mutat a primo remotum per ſpatium A C: hìc fluxus nullus eſt, ſpatium vero percurſum eſt A C. Sic dato puncto fixo A, (*fig.* 2.) linea A B revolutione perveniens in A D, ſi, ut ſupra, invariata permaneat, linea quidem ex directione A B translata fuit ad directionem A D, ſed quantitas hæc nec magnitudinis nec dimenſionis ullam patitur mutationem. Hinc licet angulus augeri vel minui poſſit, ac proinde ſub nomine quantitatis veniat, tamen nullus eſt in dimenſione, cum totum hoc ſpatium B A D omni prorſus extenſione carere concipiatur: nec mutatur, niſi inclinatio ipſa mutetur, licet augeantur, aut minuantur latera. Quare ſpatium non eſt idem

idem ac fluxio: hæc tamen aliquam ſemper ad primum rationem ſervat, quæ ratio cum infinitis modis variari poſſit, & eſſe etiam nulla, infinitis modis fluxio a ſpatio differre poteſt, ac nulla eſſe; quemadmodum nulla eſt in exemplis allatis. Hujuſce veritatis ignorationi, aut negligentiæ, neſcio an non tribuenda ſit præcipua cauſa illarum difficultatum, quarum ſolutionem fruſtra uſque adhuc in Analyſi quæſitam fuiſſe dolemus. Sed de hoc infra aliquid dicam.

DEFINITIO IV.

§. 17. *Quantitas illa, quæ quoquoverſum mota nullam in ſe mutationem ſubit, dicitur* conſtans, *ſive* data.

§. 18. Ratio enim fluxionis ad ſpatium percurſum tunc eſt ut zero ad quamcumque quantitatem. Ita in Analyſi a & b dicuntur *conſtantes*, quia eamdem ſemper, quam initio habent, magnitudinem ſervant, ſive motæ, ſive non. Licet enim natura ſua continuo minui, & augeri poſſint (ſunt enim quantæ), tamen in calculo invariatæ perſeverant.

DEFINITIO V.

§. 19. *Illa vero quantitas, quæ vel per minimum ſpatium in data directione mota continuo mutatur, fluitque ea lege, qua minima fluxio & minimum ſpatium ſe ſe reſpiciunt, dicitur* Variabilis, *ſive melius* Fluens.

§. 20. Quantitas hæc vel aliqua eſt & conſtans, antequam moveatur, vel nulla: in primo caſu *Variabilis* erit aggregatum conſtantis & fluentis, ut puta $a + x$ (a conſtans, x fluens): in ſecundo caſu erit x fluens tota. Prima, antequam moveatur, eſt a, ſecunda zero. Illud quoque notandum, quantitates conſtantes finitas hinc inde terminari, ac proinde duobus ſemper limitibus datis circumſcribi: variabiles vero perſæpe uno tantum fixo limite, in quo evaneſcunt, gaudere, altero indefinito: fieri tamen poteſt ut nullo dato gaudeant, quemadmodum in quibuſdam lineis aſymptoticis; puta in Logiſtica.

PROPOSITIO I.

§. 21. *Nulla quantitas* data *ſive* conſtans, *in ſe tantum conſiderata, & abſtractione facta a ſpatio immobili, & a prima poſitione, directionem mutare, & a poſitivo ad negativum, aut viceverſa tranſitum facere cenſenda eſt, licet quoquoverſum moveatur.*

§. 22. Quantitas quæcumque conſtans ex dictis moveri quidem poteſt, quo lubet, ſed cum non fluat, nullum de ſe veſtigium primæ ſtationis relinquit, quo inter hanc & novam inſtitui poſſit comparatio, nullumque in ipſa punctum quieſcit, ſed tota ſimul, nulla remanente primæ directionis ſemita, quovis transfertur. Quare omnia & ſingula ejus puncta in eadem ſemper inter ſe directione, & diſtantia perſeverent neceſſe eſt, ſive moveatur, ſive quieſcat: relate igitur ad puncta, quæ in ipſa ſunt, nihil refert utrum moveatur, an quieſcat. Sit ex. gr. (*fig.*

(*fig.* 3.) A B = *a* conſtans : ſtatutaque ab A verſus B poſitivorum plaga, erit a B verſus A plaga negativorum. Concipe nunc moveri ipſam dextrorſum, ſiniſtrorſum, ſurſum, deorſum, ac demum per omnes, quot dari poſſunt, directiones. Quoniam ex hypoteſi nullum in hac multiplici translatione ſui veſtigium relinquit, nullum aliud nobis ſupereſt ad ejus poſitionem cognoſcendam argumentum, quam relatio extremorum punctorum A, & B cum intermediis: quæ tamen omnia, cum relative quieſcant, ne indicium quidem præbent, utrum tota ſe moverit, an in primo quietis ſtatu perſeveraverit. Quare omnia, perinde ac in primo ſtatu, quærenti ſe exhibent; ita ut ſemper ab A verſus B poſitivæ quantitatis plaga ſtatuatur, a B verſus A negativæ: licet inverſam lineam B A (*fig.* 4.) ſupponas, in qua tamen, ſi ſpatio immobili comparetur, plaga poſitivorum nunc refert negativorum plagam. Eo ferme pacto, quo in toto Syſtemate noſtro Planetario, quod circa Solem tamquam centrum circumagitur, utcumque centrum moveretur, nulla eſſet habenda ratio poſitionis unius ad aliam totius Syſtematis poſitionem; cum corpora omnia cæleſtia intra ejuſdem Syſtematis fines eaſdem ſemper inter ſe viciſſitudines ſubeant.

PROPOSITIO II.

§. 23. *Quæcumque variabilis uno conſtanti limite definita, abſtrabas licet ſpatium immobile, fluendo facit tranſitum a poſitivo ad negativum, & viceverſa.*

§. 24. Quæcunque variabilis, ut §. 20. animadvertimus, quæ uno tantum conſtanti limite continetur, ea lege fluat neceſſe eſt, ut punctum A (*fig.* 5.), a quo originem ſumere ponimus, immobile, & cognitum ſemper conſiſtat, licet alio tota linea transferatur. Hinc ſi ex A verſus B poſitiva plaga ponatur, erit A B poſitiva; decreſcens vero ipſa tandem in puncto A fit nulla; in puncto vero b fit A b. Sed a puncto A manente immoto indicium ſumimus, A b hinc eſſe a puncto A in directione prorſus contraria primæ A B, ac proinde negativam.

PROPOSITIO III.

§. 25. *Quantitas quæcumque conſtans, quæ motu ſibi ipſi parallelo tantum movetur, nequit, habita ratione ſpatii immoti, a poſitiva ad negativam plagam tranſitum facere.*

§. 26. Prop. I. Oſtenſum fuit, quantitatem datam non poſſe ex poſitiva fieri negativam, niſi comparetur cum ſpatio immoto indefinito. Sed quantitas conſtans quæcumque A B (*fig.* 3.) poſitiva reſpectu ſpatii immoti, quæ non niſi motu ſibi ipſi parallelo movetur, eamdem ſemper ad idem ſpatium immotum directionem ſervat, ac ſi abſolute quieſceret; ergo ex poſitiva numquam fieri poteſt negativa ad ſpatium infinitum relata.

PRO-

PROPOSITIO IV.

§. 27. *Quantitas conſtans quæ (§. 25.) manens ſemper ſibi parallela, relata ad ſpatium immotum a poſitiva ad negativam plagam tranſire nequit, hunc tamen tranſitum facere poteſt, ſi quodvis ejus punctum deſcribat ſemicircumferentiam verticalem, aut horizontalem cujuſcumque radii.*

§. 28. Nam a puncto A, vel B (*fig.* 6, & 7.) erecta quacumque normali A A′, vel B B′, ac bifariam in C diviſa, radio C A, vel C B deſcribantur ſemicirculi A D A′, B D B′: ipſis oculis patet hac ſemicirculari, ac verticali revolutione, lineam A B poſitionem primæ ex adverſo oppoſitam obtinuiſſe; ut quæ prius dexteram ſpatii immoti, nunc ipſius ſiniſtram reſpiciat: nam in prima A B locum occupat A′B′, & B A translata fuit in B′A′.

Simili modo in directum addita lineæ B A, (*fig.* 8.) vel A B (*fig.* 9.) linea quacumque A A′, vel B B′, & radio C A vel C B, deſcripto ſemicirculo horizontali, linea A B, hac facta revolutione, transfertur in A′B′, vel A B in B′A′. Quod E. D.

§. 29. Porro ſi in utriſque hiſce caſibus ponatur radius C A, vel C B = o, lineæ A B repetitæ, tam in caſu revolutionis verticalis, quam in caſu horizontalis eam inter ſe poſitionem obtinent, quam figuræ oſtendunt: hoc tantum diſcrimine, quod in primo caſu (*fig.* 6, & 8.) B′B extrema, A′A medium, in ſecundo vero (*fig.* 7, & 9.) contra B B′ medium, A A′ extrema tenent. In primo igitur caſu erit B′B = B′A′ + A B; A′A = o; in ſecundo A A′ = A B + B′A′; B B′ = o, prout circuli diameter lineam datam A B in utroque caſu in puncto A, vel in B contingit.

§. 30. Quam ob rem lineæ datæ B′B, A A′ triplicem relationis terminum, cui comparari poſſunt, habent, pro diverſo modo, quo genitæ concipiuntur. Primo tamquam quantitates non compoſitæ, ſed ſimplices atque unæ, nullo in ipſis, vel extra præcipuo puncto determinato, comparari poſſunt ſpatio immoto indefinito, ſtatuta in hoc jam prius ad libitum poſitivorum, negativorumve plaga. Vel dato intra ipſas puncto A, vel B, tamquam fluxionis initio, ipſarum originem hinc inde ab A, vel B a fluxu infinities ſumpto, fluentium more, ducere licet, donec hinc inde æqualibus datis intervallis A′B′, A B diſtent. Tertius tandem modus huic affinis in ſtatuendo puncto A, vel B, & bifariam dividendo lineam B′B, A A′, in eo differt a ſecundo, quod hic datas A B, A′B′ variabilium more genitas perpetuo fluere conſiderat, earumque ſummam æquari B′B, vel A A′: ille vero, poſita A B ſtatim data, ac integra a ſemicirculari revolutione circuli radii zero, totam B′B, vel A A′ a dupla A B genitam concipi jubet, nullo habito reſpectu ad ſpatium indefinitum, ſed tantum ad puncta A, B, quamcumque directionem acquirat linea A B.

§. 31. Triplex hæc linearum B′B, A A′ geneſis & origo diverſimode, & oppoſita prorſus ratione, ſi ad negativum vel poſitivum attendamus, afficit lineam B′B, vel A A′, ejuſque partes. Nam primus modus (poſita ex. gr. dextrorſum reſpectu ſpatii indefiniti poſitivorum plaga, & conſiderata B′B, & A A′ non compoſita, ſed integra) B′B, A A′ poſitivas, negativas B B′, A′A declarat.

In ſecundo vero generationis modo, a puncto A, tamquam fluxionis centro, dextrorſum procedunt poſitivæ, ſiniſtrorſum negativæ quantitates, proindeque A B, B' A' poſitivæ, A' B', B A negativæ. In tertio denique. (ſervato ſemper religioſe in litteris A, B eo ordine, quem revolutio circularis docet) poſitivi plaga ab A verſus B ſemel ſtatuta, ſemper ab A verſus B ſervabitur, quocumque transferatur linea A B, aut quovis modo cum altera conjungatur: nullum enim aliud, abſtractione facta a ſpatio immoto, remanet indicium poſitiva a negativis ſecernendi, niſi quod a punctis A, & B repetitur.

§. 32. Et ſane poſita in *figura* 6. A B poſitiva, & facta ſemicirculari revolutione, A B transfertur in A' B', quæ quidem non eſt cur poſitiva non dicatur: item (*fig.* 7.) B A negativa per B D B' revoluta, locum B' A' occupat, in quo non video cur abſolute, & in ſe conſiderata negativa non perſiſtat. At facta A A' = o, B B' = o, fiunt in *fig.* 10. A B, A' B' ambæ poſitivæ; in *fig.* 11. B A, B' A' ambæ negativæ: eoque magis, quod hac methodo tollitur ambiguitas termini *a* — *a*, in quam ſecunda neceſſario incidit methodus: ni melius dicamus quantitates datas, atque initio determinatas, alia ratione tractari debere, qua fluentes. A diverſa igitur origine, a qua deducitur quantitatum geneſis, diverſa pendet in ſignis earum determinatio. Sed quoniam non eſt cur una alteri anteponenda ſit, ab hoc triplici tamquam fonte repetenda eſt cujuſcumque quantitatis origo. Sed hæc uberius, & enucleatius infra.

§. 33. Nunc deſcripta concipiatur curva quæcumque D A d (*fig.* 12.), cujus axis ſit in directione A B (idem contingeret, ſi diameter, vel quæcumque alia linea poſitione data acciperetur), & in hac intercipiatur abſciſſa A B cujuſcumque dati valoris, cui ordinatæ B D, B d reſpondentes, ab æquatione curvæ & ipſæ determinantur. Producta B A in A' ad libitum, bifariam dividatur A' A in C. Centro C, radio C A per horizontalem ſemiperipheriam in gyrum agatur C A cum tota curva D A d, quam quiſque videt tranſlatam in D' A' d' directione oppoſita, ramis hinc inde ad eamdem partem convexitatem obvertentibus, ita, ut ramus A' D' ſit non ſolum æqualis, ſed idem numero ac A D; A' d' idem ac A d, mutatione tantum loci facta.

§. 34. Porro quoniam radius C A ad libitum ſumptus fuit, ſumi etiam poteſt æqualis zero; in quo caſu eadem prorſus revolutio perficitur, ut *figura* 13. oſtendit: ſed puncta A' A ſe ſe contingunt, curvamque exhibent quatuor præditam ramis ſe ſe in uno puncto A decuſſantibus. Hæc tamen Curva hoc modo genita, duo diverſa ac ſolitaria Syſtemata repræſentat, nullo continuato fluxu conjuncta: cum revolutio per ſemiperipheriam circuli radii zero facta manifeſte oſtendat, totam curvam non aliud eſſe, niſi eamdem curvam in oppoſitam plagam delatam: ac proinde utramque eodem modo tractandam, ac ſi utraque una ac ſolitaria eſſet.

§. 35. Idem continget, ſi, producta linea ex parte B, fiat centrum in C, uti in *figura* 14; hoc tantum diſcrimine, quod hic rami concavitatem obvertant: & facto radio C B æquali zero, transformatur in *fig.* 15. Quod ſi revolutio per ſemiperipheriam verticalem fiat, radio a puncto A, vel B normaliter erecto, rami eam poſitionem obtinebunt, quam indicant *figuræ* 16, & 18. Facto

au-

autem radio æquali zero, curvæ erunt eæ quas exhibent figuræ 17. & 19, quæ differunt a primis revolutione horizontali actis, quod hîc ipſiſſimos ramos e diametro oppoſitos invenies, qui illic verſus eamdem partem ſibi obviam frontibus oppoſitis occurrebant.

§. 36. Quare cum hujuſmodi Curvæ in hac methodo ſint duo diverſa Syſtemata, nulla inter ſe affinitate conjuncta, ſive potius unum & idem Syſtema revolutione alio translatum; unum ab altero minime pendet: cumque nihil in hac translatione in lineis ad unum Syſtema pertinentibus immutatum fuerit (ſunt enim omnia in abſoluta quiete relativa); eadem profecto ratione ſe ſe reſpicient lineæ inter ſe in Syſtemate translato, qua ſe reſpiciebant in primo. Hinc licet linea A′B′, ſi comparetur lineæ AB primæ poſitionis, negativæ nomen aſſumat, poſita AB poſitiva; tamen ſi conferatur cum lineis ſui proprii Syſtematis, eamdem omnino cum his, quam in primo Syſtemate, relationem habet. Non video igitur cur, toto illo primo Syſtemate poſthabito, lineæ ſecundi Syſtematis inter ſe tantum comparatæ eodem ſigno affici nequeant, quo in primo afficiebantur. Cum enim hoc artificio lineæ unius Syſtematis non fluant, ut in communi methodo, ad alterius Syſtematis generationem producendam; unum Syſtema in alterum minime influit, nec unum ab altero pendet: quin imo hujuſce circulationis vi atque natura, nullo veſtigio primæ poſitionis manente, nullum remanet in primo ſitu Syſtema, cui hoc ipſum alio translatum comparari poſſit. Hinc & a ſpatio immoto, & a quacumque alia prioris Syſtematis poſitione licet abſtrahere; totoque negotio intra Syſtematis translati fines definito, id tantum curandum, quod hîc ſeorſim contingit. In quo, ſi omnia in eadem relatione maneant ac in primo, eamdem profecto denominationem relativæ lineæ inter ſeſe ſervent oportet, quam in primo Syſtemate obtinebant.

§. 37. Et ſane in *fig.* ex. gr. 13. facta AB = A′B′; BD = B′D′; erit AB : BD : : A′B′ : B′D′, cum triangulum ABD non ſolum ſit ſimile & æquale, ſed etiam idem ac triangulum A′B′D′. At communem methodum ſequuti, ſcimus A′B′ eſſe negativam reſpectu AB, utpote ortam ab AB contrario motu progredientem, quæ fluendo in A fit zero, in B′ negativa; B′D′ vero eamdem plagam quam BD reſpicientem, eodem ſigno eſſe afficiendam: ergo erit AB : BD : : — AB : BD, ſive 1 : 1 : : — 1 : 1, & 1 = — 1, vel — 1 = 1; id quidem jubente, atque cogente una methodo, quæ huc uſque innoteſcit. Rurſus in *fig.* 13. ramus Ad idem eſt ac ramus Ad′, quemadmodum in *fig.* 17., at in hac e diametro opponuntur: ergo AB : Bd : : A′B′ : B′d′. Verum in *fig.* 13. A′B′ = — AB; B′d′ = Bd: at in *fig.* 17. AB′ = — AB, B′d′ = — Bd; ergo in *fig.* 13. 1 : — 1 : : — 1 : — 1; at in *fig.* 17. 1 : — 1 : : — 1 : + 1. Hæc ultima omnium conſenſu paſſim uſurpatur, licet ita gravibus difficultatibus circumſepiatur, ut Leibnitio, & primoribus Mathematicis multum negotii perperam faceſſerit, ut videre eſt in *Commercio Philoſophico & Mathematico*: illa vero altera, nemine ſuffragante, prorſus exploditur. At una conceſſa, non video cur altera repudiari poſſit.

§. 38. Quin potius dicamus, Analyſim communem transformatione harum ſingularum rationum nos velle docere, liberum eſſe cuique unam pro altera in

calculo, prout res fert, uſurpare; ut harum omnium ope ab uno in alterum ramum tranſitus fieri poſſit, quem univerſim ab una formula, ipſa fluxionis methodo repugnante, obtinere non poſſumus. Ita quemadmodum data analogia 1 : 1 : : — 1 : — 1, ſubſtituta ſecunda pro prima ratione, noſmet a primo A D in *fig.* 13. ad ramum A′d′, & in *fig.* 17. ab A D ad eumdem A D′ transferimus; & analogia 1 : — 1 : : — 1 : 1 in *fig.* 13. a ramo A d ad ramum A′D′, in *figura* vero 17. ab A d ad eumdem A d′ tranſitus fit; ita analogia 1 : 1 : : — 1 : 1, ſubſtitutione alterius rationis facta, indicat tranſitum in *fig.* 13. a ramo A D ad eumdem numero A′D′, & in *fig.* 17. a ramo A D ad alterum A d′. Quibus, ſi recte animadvertas, innuitur transformatio illa a me paſſim inculcata in iis, quæ publici juris feci, ſed præcipue in *Mem.* 2.[da]

§. 39. Quæ quamquam in methodo communi inſanabilem repugnantiam præſeferant, tamen ab hac labe hac mea circulationis methodo penitus liberantur. Nam ſi hanc ſequamur, cum ex. gr. (*fig.* 13.) A′B′ non a fluxu contrario lineæ A B per zero tranſeunte genita ponatur; ſed ipſa ſit A B revolutione ſemicirculari radii zero cum toto Syſtemate converſa, qua converſione & B′D′ ſit ipſiſſima B D, & A′D′ idem prorſus ramus ac A D; omnia iiſdem ſignis afficientur, eamdemque inter ſe relationem habeant neceſſe eſt, ac ſi nulla facta eſſet converſio, aut nullus extitiſſet ramus A D, quocum comparatio inſtitui potuerit.

§. 40. In quo vero a communi hæc methodus differat, ex eo patet, quod in hac uno eodemque tempore quatuor (a ſuperiori conſtructione) promiſcue rami deſignantur, qui tamen a vario circulationis, quem concipimus, ordine ſingillatim erui poſſunt: hinc (quod caput eſt) omnis prorſus evaneſcit repugnantia, cum lineæ omnes eadem ſigna præſeferant: in communi vero, unaquæque ſeorſim indicatur plaga, a ſingulis rationibus indicata. Cum tamen hujuſmodi rationes non *æquivalentes*, ſed æquales & ipſiſſimæ huc uſque acceptæ fuerint, graviſſimis nos ambagibus implicarunt. Sed hæc nunc attigiſſe ſufficiat.

§. 41. Hæc tamen licet leviter perſtricta, non obſcura indicia nobis præbent illius methodi generalis, quam *Circulationis* nomine definivi, quamque Analyſtæ calculo ſinuum, coſinuumque leviter adumbrarunt; cujus tamen tractationem, præcipuumque uſum hactenus ipſos ignorare §. 48. Præfationis indicavi: quam quidem methodum a communi prorſus imaginatione alienam, cum novis indigeat principiis, quibus firmiter ſuperſtruatur, multamque, ac peculiarem operam requirat, in aliud tempus producam. Nunc quædam ſparſim ſemina, pro re nata, a methodo communi evidentiſſime indicata, jaciam; quibus huic novitati, tamquam periculoſæ, concitatam invidiam aliquo modo imminuam.

DEFINITIO VI.

§. 42. *Quantitas negativa illa dicitur, quæ a fluxu contrario lineæ poſitivæ per zero tranſeunte genita concipitur.*

§. 43. Definitione ſecunda diximus poſitivi ac negativi notionem relativam eſſe, & quomodo quantitati attributum hoc legitime adjudicetur, oculis ipſis ſubjecimus. Nunc accuratius rem agenti multum refert conditiones illas ſingillatim

latim enumerare, quibus omnibus quantitas, natura ſua indeterminata, negativæ naturam, & nomen induat: quas quatuor a me jure video ſtatuendas eſſe, ita neceſſarias, ut, una ſublata, attributum etiam negativum tollatur.

Primo: poſitivæ quantitatis determinatio, ſive poſitivorum plaga ſtabili, ac dato limite prius conſtituenda eſt: ſecundo inſtituenda alterius cum hac comparatio, ſine qua negativum nullum eſt: tertio comparatio fiat cum quantitate poſitiva, non tamquam conſtanti & data, ſed ut fluente, a cujus proinde fluxu originem ducat quantitas negativa: quarto denique fluxus tamen hic ſit negativus reſpectu quantitatis poſitivæ.

§. 44. Nam ſi nulla prius determinata fuerit poſitiva quantitas, cui comparetur, quantitas comparanda indeterminata manet; nec poſitiva, nec negativa dici poteſt eo ſenſu, quo Analyſis jubet, niſi notionem poſitivi cum abſoluti notione, ut animadverti, confundere velis. Poſito vero comparationis termino, comparatio actu inſtituenda eſt: at, ſi recte animadvertas, tunc comparatio revera inſtituitur, & neceſſaria eſt, cum poſitiva quantitas in negativam revera influat, atque a poſitivæ fluxu ejus origo repetatur. Si enim inter ſe quovis commercio diſſocientur, nulloque communis generationis vinculo conjungantur, ut ſolitariæ ſpectandæ ſunt; non eſt igitur cui, una ſublata, altera comparetur. Illud denique ad conſtituendam quantitatem negativam accedat neceſſe eſt, ut fluxus quantitatis poſitivæ, a quo ortam volumus quantitatem negativam, ſit & ipſe negativus, imminuatque continuo regreſſu quantitatem poſitivam, donec, hac in puncto zero evaneſcente, ulterius progrediens producat quantitatem, quæ cum a fluxu revera negativo genita fuerit, natura ſua, non vero arbitrio in hac hypotheſi negativa dicenda eſt. Hæc omnia ad quantitatem negativam conſtituendam ſunt prorſus neceſſaria; quæ omnia, aut ſingula ſi tollas, quantitas non amplius negativa cenſenda eſt.

§. 45. Mirabitur fortaſſe quiſpiam, me in hiſce conditionibus eruendis, explicandiſque tantopere immorari, perinde ac ſi liberum cuique eſſet, in eadem ac ſupra poſitione quantitate manente, quam dicimus negativam, aliam originem comminiſci: quod tamen vulgatis imbutus doctrinis negabit. Verum ſi ad novam, quam paulo ante commemoravi *Circulationis* methodum pauliſper attendat, facile cognoſcet, ab hac revolutionis methodo prorſus tolli alterum Syſtema, atque adeo prorſus tolli comparationis terminum. Non enim illud ipſum Syſtema alio translatum remanet in primo ſitu, cui proinde translatum comparari poſſit. Hinc in ſecundo iiſdem, ac in primo ſitu, ſignis lineæ afficiantur oportet. Quare hac methodo numquam a poſitivo ad negativum tranſitus fit: omnia enim inter ejuſdem Syſtematis fines continentur.

§. 46. Rurſus: eſto: fluat quantitas poſitiva, ac ab ejus fluxu quantitas hinc a limite poſitivo oriatur; eritne hæc neceſſario negativa? Caveſis hoc dicas. Fieri enim poteſt, ut a fluxu poſitivo quantitatis poſitivæ verſus eamdem poſitivam plagam ſemper progrediente, hæc, quam primo modo a fluxu negativo genitam, negativam jure appellavimus, ortum ducat; quo in caſu, primo relicto negativo attributo, poſitivum ab origine ſua aſſumat neceſſe eſt. Scilicet præter revolutionem circularem, aliam contendo dari methodum, quam methodum *Infiniti abſolu-*

ſoluti appello, qua licet a poſitivo ad negativum per plagam ſemper poſitivam tranſitus fieri. Nimirum fluxus poſitivus, poſitivorum viam perpetuo inceſſu inſiſtens, tandem major fit quacumque data quantitate, ideſt ad ultimum illud abſolutiſſimum *Infinitum*, exhauſtis omnibus relativis, tandem pervenit, & hinc in negativorum regionem ingreditur, negativamque illam aggreditur, & aſſequitur ita, ut ſublato Infinito abſoluto, remaneat tantum quantitas æqualis quidem (quantitate) negativæ, ſed natura & origine poſitiva.

§. 47. Verum inquies, quis temerario auſu talia jactanti non jure ſuccenſeat? At hîc tantum ajo, me quomodo a poſitivo ad negativum tranſitus fieri poſſit per plagam ſemper poſitivam tum demonſtraturum, cum de hoc *abſoluto Infinito* agam. Nunc vid. Cap. V. & VI. Interim, ne a communi ſententia hæc ita abhorrere quis credat, ut tamquam hæreſis diris omnibus merito ſint devovenda, dico, hæc adeo abeſſe a graviſſimo, cujus arguuntur, crimine, ut potius recepto paſſim omnium Analyſtarum axiomate mirifice fulciuntur. Nonne enim Analyſtæ omnes ad unum docent, circulum radii infiniti tamquam lineam rectam infinitam uſurpari poſſe? Ergo propoſitione converſa, lineam infinitam uſurpari poſſe pro circulo radii infiniti quis neget? Ergo ad poſitivam plagam in linea recta infinito progreſſu, tandem in circularem peripheriam radii infiniti incidi-tur: at in circulari peripheria a poſitivo in negativum per poſitivum, revolutione jubente, datur ingreſſus: ergo etiam per lineam rectam infinitam, tamquam circulum radii infiniti, a poſitivo ad negativum per poſitivum tranſitus fieri debet. Ergo vulgatis etiam præceptis hæc, quæ toto cœlo a veritate diſtare videbantur, cohærent mirum quantum!

§. 48. Hinc rurſus colligitur, Methodum *Circulationis* eſſe quid medium inter *abſoluti Zero*, & *Infiniti abſoluti* methodos. Nam cum prima per *zero*, ſecunda per ejus inverſum, ideſt per *infinitum* abſolutum, a poſitivo ad negativum transferant quantitatem; & uterque a *circulationis* methodo, radio modo *zero*, modo *infinito* perficiatur tranſitus: quis inficias ibit ab hac una tertia *circulationis* methodo utriſque ſatisfaciente, id quod in hac eſt adumbratum, erui atque explicari poſſe? Adde quæ de hac re §. 48. & ſeq. præfati ſumus. Sed jam progrediamur.

DEFINITIO VII.

§. 49. *Quantitas negativa, nimirum illa, quam a fluxu contrario quantitatis poſitivæ præexiſtentis per zero tranſeunte ſuperius genitam* §. 42. *definivimus, jure dicitur minor zero: ſecus non.*

§. 50. Quantitas negativa prius ſupponit poſitivæ exiſtentiam, cujus geneſim ita paſſim geometrice deducitur. Eſto linea A B (*fig.* 20.) & ab A verſus B ſit poſitivorum plaga: ſi ab A B ſubducatur quantitas poſitiva B C, erit poſitiva A C minor A B, & eo minor, quo C B major; ita ut A C′ minor ſit A C: donec facta B C″ æquali A B, tandem A C′ fit zero, minor omnium antecedentium. Ergo facta B C′ majori A B, diminutione ſemper creſcente, erit A C″ tandem negativa, minor & ipſa zero. Alio etiam modo hoc demonſtratur. Differen-

ferentia, quæ intercedit inter puncta B, & A, in quo ponitur A B zero, eſt diſtantia B A: rurſus differentia inter A & C″ eſt A C″: ergo differentia, quæ intercedit inter puncta B, C″, eſt B A + A C″: ergo quantitas negativa plus diſtat a poſitiva, quam zero ab ipſa poſitiva; ergo quantitas negativa minor zero cenſenda eſt. Quare univerſim concluditur, quantitatem negativam minorem eſſe zero. Concluſio hæc generalis in eo tamen laborat, quod tota nititur illi principio, quantitatis ſcilicet negativæ originem ab uno tantum fonte repetendam eſſe: quod tamen falſum eſſe aſſeruimus. Nam ſupra §. 45, & 46. oſtendimus, quantitatem, quam, communi ratione genitam, jure diximus negativam, ſi ejus originem a methodo *Circulationis*, vel ab *Infiniti abſoluti* methodo repetamus, nomen naturamque poſitivæ quantitatis retinere. In prima enim, cum in partem contrariam in orbem ſemper verſus eamdem partem agatur, eodem ſemper ſigno afficiatur oportet. In ſecunda, tantum abeſt ut ſit minor zero, ut imo etiam ſuperet quantitatem poſitivam, ab eaque differat *infinito* prorſus *abſoluto* intervallo; ut major quacumque data, poſitivorum plaga tota tandem exhauſta, in partem negativarum ſe recipiat, fluxuque ſemper poſitivo negativam tandem adæquet: quo in caſu *infinite abſolute* major eſt zero.

§. 51. Quare negativi nomen relativum eſt: reſpicit enim communem rationem, a qua negativa quantitas ortum ducit: qua mutata (quoniam id licet, & ſæpe neceſſario fit) quod dicebatur negativum, poſitivum dicatur oportet. Id ita verum eſt, ut eodem modo demonſtrare poſſim, quantitatem poſitivam eſſe zero minorem; dummodo (*fig.* 20.) eam A B, quam ſuperius conſideravimus poſitivam, nunc negativam dicamus. Tunc enim A C negativa, quæ creſcente B C ſemper in ſuo genere minuitur, donec in A ſit zero, erit, eodem quo ſupra argumento, in C″ minor zero. Sed nunc eſt poſitiva; ergo poſitiva quantitas minor eſt zero, facto primo comparationis termino negativo. Videſis, quæ in Præfatione (§. 53. & ſeqq.) in Alembertium, definitionem paſſim traditam quantitatis negativæ repudiantem, animadvertimus. Quapropter hiſce diligenter animadverſis, minime mirum cuiquam videri debet, ſi eadem quantitas poſitivæ modo, modo negativæ vices ſubire queat, omniſque tollatur repugnantia, quam præſeferre videntur conſecutiones quædam Analyticæ, licet a principiis certiſſimis neceſſario nexu conjunctis dimanent.

§. 52. Sed ut totum hoc negotium (difficillimum ſane, majoriſque indaginis, quam cuique prima fronte videri poſſit, ac maximi prorſus momenti, a quo ſcilicet difficultatum omnium, omniumque ambagum, in quas in calculo identidem offendimus, ſolutio omnis pendet) pro dignitate expediatur; illud in primis diligentiſſime animadvertendum, in formulis analyticis artificia, quibus utimur, ſæpe comparationis terminum, ac quantitatis originem ita immutare, ut liberum nobis amplius non ſit utrumque, quod intacta formula primo ſumpta determinavimus, hac in aliam formam per legitimam ſubſtitutionem converſa, retinere. Ex hujuſce veritatis ignoratione, quid mirum ſi ea ſimul ſæpe inter ſe copulentur, quæ evidentiſſime ſecum pugnant? Illum enim primum comparationis terminum, primamque originem mordicus tenemus: quæ duæ res ab Analyſi, mutatis circumſtantiis, penitus repudiantur.

§. 53.

§. 53. Quod ut ſenſim, & ordine, propius ad rem de qua agimus accedentes, demonſtremus: ſumatur (*fig.* 21.) quævis linea A B = *a*, binis utrimque limitibus datis circumſcripta. Hæc, ſi abſolute ſpectetur, nullo præcedente comparationis termino, nihil nobis menti offert, niſi lineam geometricam datæ magnitudinis *a*, quæ tamen referre poteſt quantitatem cujuſcumque vel diſſimillimæ naturæ, ut corpus, ſpatium, velocitatem, ſonum, & quicquid demum abſoluti imaginatione excogitari poſſit, ne excluſa quidem quacumque abſurda, aut imaginaria quantitate. Nequit tamen hujuſmodi linea attributo ullo affici relativo, nec poſitiva, aut negativa reſpective cenſeri, ni prius arbitrio poſitivorum plaga ſtatuatur, cui poſſit comparari. Porro duplici modo hæc comparatio inſtitui poſſe videtur: vel enim comparatur ſpatio immobili indefinito, vel quibuſdam punctis in ipſa linea contentis.

Primo modo, dextrorſum ſumpta in ſpatio immoto poſitivorum plaga, donec A B immota manet, vel motu ſibi parallelo movetur; erit per §. 25. A B = *a*, poſitiva; B A = — *a*, negativa: neque fieri poteſt, ut A B ſemper ſibi parallela ex poſitiva fiat negativa, niſi cum in orbem per ſemiperipheriam agatur, ut vidimus §. 27.

§. 54 Videamus modo, quomodo res ſe habeat in directione in ſpatio immoto dextrorſum obliqua. Sit igitur (*fig.* 22.) A B (per arcum quadrante minorem acta) poſitio illa obliqua: in hoc caſu, licet ad ſpatium immotum dextrorſum non ſit normalis; tamen cum ab A verſus B incedens dextrorſum ſemper procedat, A B poſitiva cenſeri poteſt, B A negativa. Videas tamen, quod ſi in duas A C, B C reſolvas, A C quidem in hac hypotheſi poſitiva erit, C A negativa: at quo tandem attributo C B afficies, cum nulla determinatio in verticali facta fuerit? Adde quod, ſi excedat quadrantem circumvolutio, tunc A B, A C, quæ erant in primo caſu poſitivæ, fiunt negativæ, manente B C itidem indeterminata. At in verticali poſitione (*fig.* 23.) quæro utrum A B cum ſpatio priori immoto comparata, ſit poſitiva, an negativa? profecto nec poſitiva, nec negativa, vel potius poſitiva, & negativa ſimul jure dici poteſt. Nam in hac poſitione ſingula ejus puncta hoc duplici attributo gaudeant neceſſe eſt: tunc enim verticalis A B eſt limes, dividens poſitivum a negativo: proindeque ſingula lineæ puncta tam ſunt in extrema poſitivorum plaga, quam in extrema negativorum: jure igitur in hoc caſu indeterminata cenſenda eſt. Hinc fieri poteſt tam A B $= \pm a$, quam B A $= \mp a$.

§. 55. Ut igitur hujuſmodi indeterminatio tollatur, ad aliam arbitrio ſuppoſitionem confugias, oportet; videaſque utrum ſurſum, vel deorſum verticaliter plagam poſitivorum accipias. Si ſurſum: linea obliqua A B, (*fig.* 22.) quæ eodem tempore verſus dexteram, & ſurſum procedit, poſitiva cenſenda erit, & A C, C B poſitivæ; B A, & B C, C A negativæ. Sed ſi deorſum poſitivorum plaga (liberum eſt enim) determinetur; linea A B, quæ in ſitu horizontali erat poſitiva, in ſitu verticali negativa, quo tandem nomine obliquam appellabis? A B enim relata ad ſpatium dextrorſum ſumptum eſt poſitiva, negativa ſi cum ſpatio deorſum ſumpto compares. Quo vero potiori jure poſitivam potius, quam negativam, aut e converſo nuncupabis? cum nulla ſit ratio, cur ſpatium

dex-

dextrorſum ſpatio deorſum ſit anteferendum, vel contra, ut ambigua ſignificatio tollatur. Vide igitur quam in lubrico, & ambiguo loco verſetur ille, qui a ſpatio immoto, tamquam termino comparationis, relationem lineæ A B quoquoverſum motæ cenſet deſumendam.

§. 56. Reſtat ut ad alteram, quam ultimo innui, comparationem inter puncta quædam præcipua tantum, amoto prorſus ſpatio infinito, inſtituendam accedamus. Ac primo ſumatur punctum A (*fig.* 24.) ſolitarium, a quo tamquam centro, quantitas quæcumque linearis, in ipſo puncto A zero, fluendo hinc inde propagetur, ac quanta fiat: hæc, ut animadverti, ab ejus origine variabilis ſive fluens dicenda eſt. At qua in parte poſitiva vel negativa ſit, non prius definies, quin prius qua in parte primum fluere velis, ſtatuas: ab hoc enim primo fluxu, qui (nullo alio præexiſtente in parte contraria) poſitivus cenſendus eſt, poſitiva variabilis oriatur neceſſe eſt. Itaque ſi hujuſmodi primus fluxus erit ab A verſus c, A c $=$ *x* variabilis erit poſitiva, A c′ vero $= - x$, negativa; contra ſi primus fluxus in parte contraria ſumptus fuerit: dummodo tamen communem methodum ſequuti (ut dixi §. 42.) tranſitum a poſitivo ad negativum per A zero ſtatuamus.

§. 57. Hoc poſito, fluat A c uſque in B, ac determinetur diſtantia puncti B ab A, quæ ſit A B $= a$; determinata etiam erit fluens $x = a$. Hinc præter A, aliud punctum B datum erit, quocum novus comparationis terminus inventus. Quare in hoc caſu, cum duo diverſa data puncta aſſignata fuerint, variabiles cum utroque puncto comparari poſſunt. Si igitur in primo puncto A habetur A c $= x$ poſitiva, prout orta a prima fluxione poſitiva; eadem ratione B C′ a fluxu primo genita reſpectu puncti B (nulla ratione habita ad punctum A) poſitiva cenſenda erit; licet in partem reſpectu puncti A negativam procedat. In hoc igitur rerum ſtatu, erit A c′ negativa reſpectu puncti A, præexiſtente poſitiva A c, & etiam B C reſpectu puncti B, præexiſtente poſitiva B C′: punctis A, & B tamquam centris duorum Syſtematum nulla inter ſe affinitate conjunctis, ac tantum diſtantia A B dimenſionis nullius, ſive non quanta inter ſe diſſitis, ut inferius dicemus.

§. 58. Quod ſi tam A fluendo indefinite verſus B, quam B fluendo verſus A veſtigium ſui relinquat: tunc fluxionum, & fluxuum originem a ſingulis punctis A, vel B, tamquam a diverſis principiis, neceſſario repetendam eſſe quis non videt? Nam ex. gr. A c′ promiſcue conſiderari poteſt tam genita a puncto A verſus c′ fluente, & tunc in noſtro caſu A c′ negativa; quam genita a B c′, fluente puncto B, a qua tamen ſubtracta fuerit A B, quo in caſu A c′ erit poſitiva. Porro cum in hiſce circumſtantiis utrumque neceſſario occurrat; non eſt cur alterutram potius originem ita eligamus, ut alterutram perpetuo, Analyſi ſæpius fruſtra reclamante, repudiemus. Itaque reſpectu puncti B, erit B A $+$ A c′ $= a + x$: fluit enim poſitive fluxus a B verſus A, quo perventus fluentem gignit *x* datæ *a* æqualem, ac inde a puncto A verſus eamdem partem procedens, indefinite fluendo, rurſus gignit A c′ $= + x$. At reſpectu puncti A, eodem inſtaurato ratiocinio, A B $+$ A c′ $= a - x$: fluit enim punctum A poſitive uſque in B, in quo determinatur, fitque fluxio $=$ A B $= a$: & idem A fluit

negative fluxione indefinita $= - x$. Ita reſpectu puncti B, $BA + BC = a - x$; reſpectu puncti A, $AB + BC = a + x$. Quare, eadem manente variabili x, ſignum ei præfixum mutatur pro diverſa punctorum comparatione: at eodem in literis valore manente mutatur linearum poſitio. Nam reſpectu puncti B, $BA + Ac' = a + x$; $BA + BC = a - x$: reſpectu puncti A, $AB + Ac' = a - x$; $AB + BC = a + x$: quas omnes infra inter ſe comparabimus. Nunc id unum colligatur velim, nihil repugnare quominus una & eadem quantitas eodem tempore & negativa & poſitiva ſit: dummodo diverſa & originis puncta, & diverſæ poſitiones, ut ſatis aperte declarat geometrica ſuperior conſtructio, intelligantur.

§. 59. Superius duo tantum puncta præcipua A, & B, tamquam termini noti ipſius lineæ datæ $AB = a$, inter ſe comparavimus, ita ut linea data AB, ejuſque fluentes ab alterutro horum punctorum A, vel B tota originem ſuam deſumant. Fieri tamen poteſt, ut eadem linea AB (*Tab. II. fig.* 25.), quam ut integram ſuperius conſideravimus, ita a quovis alio puncto dato C interjecto in duas dividi partes poſſit, ut una pars AC a puncto A, altera BC a puncto B, ſingulis data velocitate invicem ſibi occurrentibus, peculiarem originem ſuam ac propriam ſingulæ acceptam neceſſario referre debeant. Nam, poſita velocitate puncti A ad velocitatem puncti B ut $m : n$, erit $AC = \frac{ma}{m+n}$ ſpatium poſitivum eo tempore percurſum a puncto A, quo punctum B ſpatium $BC = \frac{na}{m+n}$ itidem reſpectu ſui poſitivum deſcribit: quibus ſingulis emenſis, puncta A, & B in puncto C congrediuntur. In hoc caſu tota linea AB, a dato puncto C in duas partes diviſa, erit quidem $= a$, cum ſit $AC + CB = \frac{ma}{m+n} + \frac{na}{m+n}$; at hic valor hac ultima forma exhibitus, non eſt cum integro a ſui æquali indiſcriminatim accipiendus: diverſa enim puncta, pro diverſa ratione qua partes lineæ integræ ſe ſe reſpiciunt, in conſtructione determinat. Quod non diligenter animadverſum, mirum quot, & quantis difficultatibus Analyſtas omnes huc uſque implicaverit!

§. 60. Quo vero modo hoc, quod perpetuo docet Analyſis, aſſequamur, diligentius eſt explicandum. Quoniam $AC + CB = AB = \frac{ma}{m+n} + \frac{na}{m+n} = a$; unam, aut alteram hanc ſcribendi formam uſurpari promiſcue poſſe quis inficias ibit? Sumatur $AB = a$: hæc autem a, tamquam integra conſiderata, nihil aliud eſt, niſi quantitas finita, duobus tantum terminis circumſcripta A, & B; qua diſtantia abſoluta inter utrumque punctum A, & B innoteſcit, abſtractione facta a quocumque alio exiſtendi modo: nequit enim definiri utrum ipſa ſit poſitiva, an negativa, quin prius eligatur punctum alterutrum A, vel B, quocum inſtitui poſſit comparatio; diximus enim poſitivum, ac negativum non niſi relativum quid eſſe. Hinc nequeo communi doctrinæ aſſenſum præbere,

quæ

quæ docet, ubi quantitati nullum ſignum præfigitur, ſemper ſignum + ſubintelligi debere: cum potius quantitatem indeterminatam quoad plagam ſignificet, a peculiaribus circumſtantiis determinandam. Sumpto igitur A, tamquam primo comparationis termino, erit $AB = + a$ poſitiva, & $BA = - a$ negativa: contra vero, ſi ſumatur primo punctum B. Quare a, vel $\pm a$ nullo, vel duplici ſigno affecta, ſpectanda eſt tamquam indeterminata, non quantitate, ſed origine, dummodo tamen integra permaneat. Hæc tamen indeterminatio ab Analyſi ſuarum formularum variatione, prout res fert, omnino tollitur; ut infra patebit.

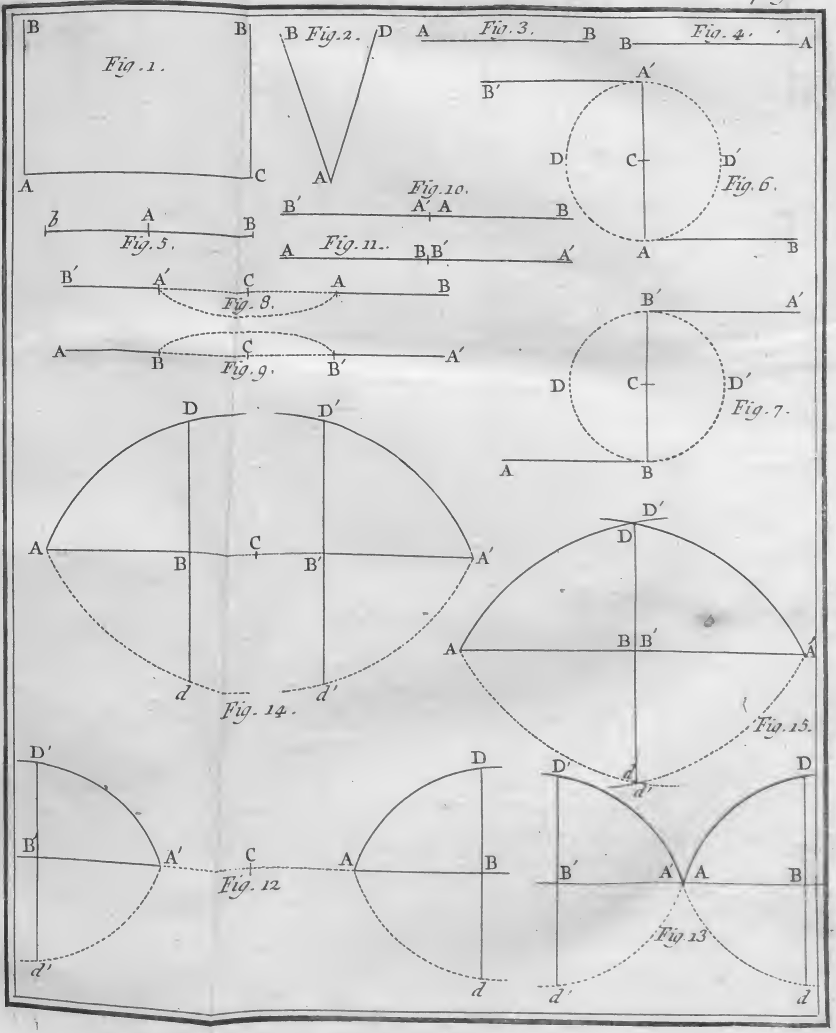
§. 61. Quæ vero integra a duorum tantum punctorum A, & B exiſtentiam ſignificabat, tertium punctum datum ac præcipuum C conſtituet cum prioribus comparandum, ſi hoc modo efferatur $\left(\frac{m\,a}{m+n}\right) + \left(\frac{n\,a}{m+n}\right)$, quæ ita eſt intelligenda, ut indicet additionem duarum partium inter parentheſim indeterminatarum, ſive quæ ſingulæ ſigno $\pm$ affici poſſunt. Itaque, ſic expreſſa formula, originem lineæ a duplici puncto, tamquam fonte, repetendam eſſe docet: etenim pars AC ab A in C fluente, & pars BC a B in C orta cenſenda eſt, ſi ſingulæ partes ſigno poſitivo, vel negativo affectæ intelligantur. Quod ſi ſigna alternentur ita $\frac{m\,a}{m+n} - \frac{n\,a}{m+n}$: hæc rurſus duplicem habet ſignificationem: vel enim $\frac{n\,a}{m+n}$ eſt quantitas poſitiva a quantitate poſitiva $\frac{m\,a}{m+n}$ ſubtrahenda, quo in caſu $\frac{m\,a}{m+n} - \frac{n\,a}{m+n}$ eſt minor a, differentia alterutrius partis poſitiva, vel negativa, prout $\frac{m\,a}{m+n}$ major, vel minor $\frac{n\,a}{m+n}$, uti docet communis ſubtractionis regula: vel eſt $\frac{m\,a}{m+n} + \frac{(-n\,a)}{m+n}$, ſcilicet quantitas poſitiva, cui addenda eſt quantitas negativa, quæ additio tantum abeſt ut ſit minor a, ut eidem a poſitivæ, vel negativæ æquetur. Nam hac ultima formula tertium originis punctum C ſtatuitur, hac lege, ut a C verſus A intelligatur fluens CA poſitiva, negativa vero CB a C verſus B. Verum, re ita manente, erit $\frac{m\,a}{m+n} + \frac{(-n\,a)}{m+n} = \pm a$: vel enim $BC = \frac{n\,a}{m+n}$ transfertur in AD (*fig.* 25.), & fit $\frac{m\,a}{m+n} + BC = \frac{m\,a}{m+n} + \frac{n\,a}{m+n}$ $= CA + AD = CD = a$, ſublato puncto A: vel $AC = \frac{-m\,a}{m+n}$ tota

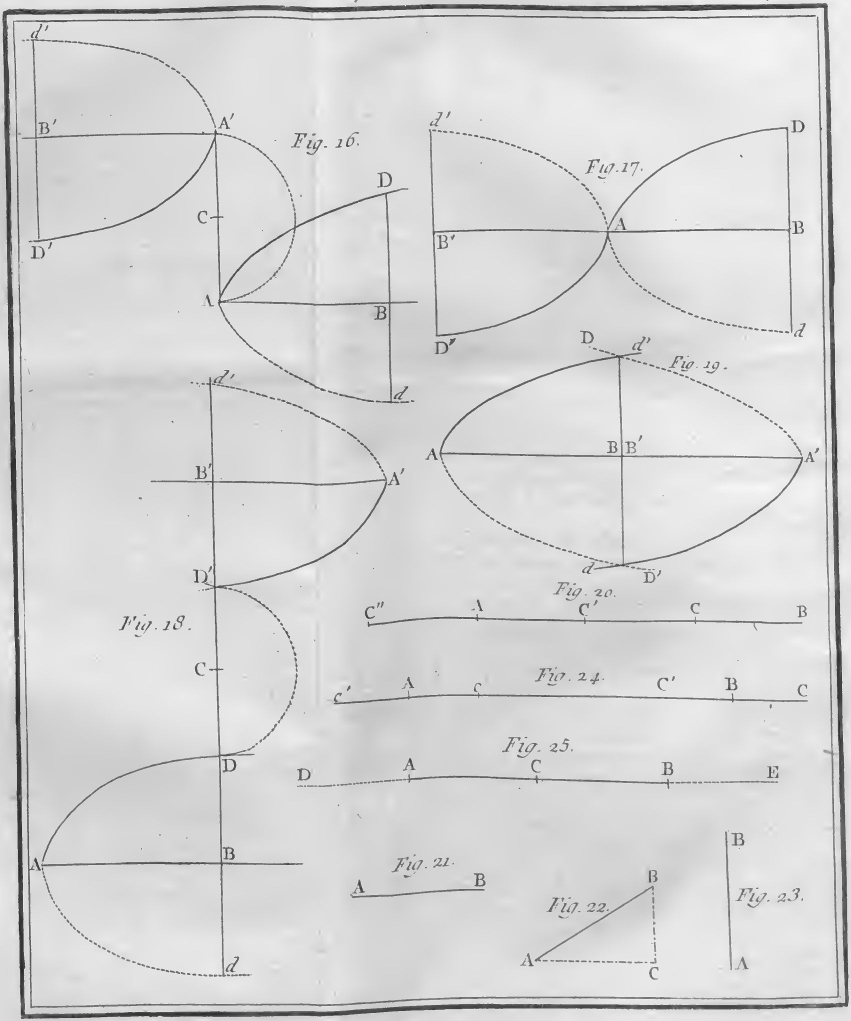
transfertur in BE, & fit $CB + BE = CE = \frac{-na}{m+n} - \frac{ma}{m+n} = -a$, ſublato punƈto B: in ſingulis hiſce caſibus a punƈto uno C oritur fluxio. Sed quoniam etiam $BC + CA = \frac{na}{m+n} + \frac{ma}{m+n} = BA = a$, ſublato punƈto medio C; & $AC + CB = \frac{-ma}{m+n} - \frac{na}{m+n} = -a$, ſublato itidem punƈto C: hæc formula etiam BA poſitivæ $= a$, & AB negativæ $= -a$ æquatur: illic punƈto originis B fluente verſus A, ad plagam reſpeƈtu C poſitivam, hic punƈto originis A fluente verſus B ad plagam negativam, eodem habito reſpeƈtu ad punƈtum C. Quare hæc omnia ab hac formula ſimul comprehenduntur, atque indicantur, præter eam omnibus notam ſignificationem, quæ ab una tantum notione numerica ſubtraƈtionis deducitur.

§. *62*. Quoniam vero indefinite ratio $m : n$ variari poteſt; ab hac una quantitate a in duas partes diviſa deſignari indefinita punƈta C poſſe quis non videt? Adde quod & linea integra, & quælibet ipſius pars & ipſa multifariam dividi poteſt: quo faƈto, punƈtorum datorum numerus augetur indefinite, augeturque indefinite numerus combinationum, comparatione inter hæc inſtituta. Ad hæc tamen omnia aſſequenda Analyſis, artificiis quibus utitur, ni vim patiatur, nos veluti manu ducit: quemadmodum, quæ impoſterum dicenda ſunt, apertius ac certius oſtendent. Nunc ſufficiat ex hiſce leviter perſtriƈtis non levia tamen indicia illius veritatis præmonſtrare, quæ in hoc Capite innuimus, a diverſis ſcilicet unius formulæ transformationibus (intaƈta ſemper æqualitate) diverſa originis punƈta, diverſas linearum poſitiones, diverſoſque variabilium valores exhiberi: quod reƈte animadverſum viam aliquando ad ſublimiora ſternit.

§. *63*. Neque putes hoc a me diƈtum, ita inauditum eſſe ut nullum aliud ſimile in Scientiis exemplum proferri poſſit. Huic enim veritati in Dynamicis, neceſſitate compulſi, libentiſſime aſſenſum præbemus. Corporum enim, quæ oppoſitis velocitatibus congrediuntur, leges communicationis motus, non a differentia velocitatum $V - v$, ſed a ſumma $V + v$ omnium conſenſu repetendas eſſe ſtatuimus, licet inter ſe comparatas alterutram negativam eſſe non negemus. Quare in hoc caſu non $V - v$, ſed $V + v$, vel $2v$ ſi æquales, paſſim uſurpamus. At quis non videt velocitates corporum eodem tempore congredientium, eſſe uti ſpatia percurſa, atque ab hiſce poſſe repræſentari? quæ ſpatia ſi comparentur cum punƈto C, poſita CA negativa (*fig.* 25.), CB poſitiva, erit viceverſa AC poſitiva, negativa BC, & $AC + BC = V - v$; quam tamen non ut differentiam, ſed ut additionem conſiderandam eſſe, communis corporum congredientium Theoria, nemine repugnante, docet. Sed hæc attigiſſe ſatis eſt.

CA-


Fig. 1.
B B A C
Fig. 2.
B D A
Fig. 3.
A B
Fig. 4.
B A
Fig. 5.
b A B
Fig. 6.
A′ B′ D C D′ A B
Fig. 7.
B′ A′ D C D′ A B
Fig. 8.
B′ A′ C A B
Fig. 9.
A B C B′ A′
Fig. 10.
B′ A′ A B
Fig. 11.
A B B′ A′
Fig. 12.
D′ B′ A′ C A D B d′ d
Fig. 13.
D′ D B′ A′ A B d′ d
Fig. 14.
D D′ A B C B′ A′ d d′
Fig. 15.
D′ D A B B′ A′ d d′


Fig. 16.
d′ B′ A′ D′ C A D B d
Fig. 17.
d′ D B′ A B D′ d
Fig. 18.
d′ B′ A′ D′ C D A B d
Fig. 19.
D d′ A B B′ A′ d D′
Fig. 20.
C″ A C′ C B
Fig. 24.
c′ A c C′ B C
Fig. 25.
D A C B E
Fig. 21.
A B
Fig. 22.
B A C
Fig. 23.
B A

CAPUT II.

De primis Analyſeos abſtractæ notionibus.

§. 1. QUamquam cujuſvis Scientiæ munus & finis eſt ex certis quibuſdam principiis rite inter ſe connexis conſecutiones, quæ ignorabantur, elicere; hoc tamen peculiari quadam ratione huic, de qua agimus, Scientiæ proprium eſt, quæ, quibus utitur methodis, tamquam inſtrumentis atque machinis, legitima cognitorum cum incognitis admixtione quaſique coagmentatione, incognitum quod quærebat, quodque tamquam cognitum initio ſumpſerat, tandem aſſequitur. Ne vero horum artificiorum opera male ſuſcepta, vel minus recte collata, anguſtioribus, quam par eſt, limitibus concludamur, aut a recta veritatis ſemita incaute abducamur; ſedulo curandum eſt, ut hæc, quæ cœco aſſenſu ſequimur, ſint prius omnia bene explorata, probe cognita, apte inter ſe nexa, atque præparata, numquam per vim in pravum ſenſum detorta, & pro re nata ita ſingula ad uſum prompta, ut alterum alteri opportuniſſimam opem ferat, & omnia ad Scientiæ augmentum atque perfectionem conjurent amice. Nimirum in ea ſum hæreſi, ut credam primis, quæ nunc habemus, Analyſeos principiis aliqua labe infectis, vel perperam intellectis, malefidis tamquam ducibus, omnia, in quæ identidem offendimus, impedimenta eſſe tribuenda: quod a me dictum, utrum veritati conſentiat ſequentia oſtendent.

§. 2. Diximus §. 15. Cap. I. caute in Analyſi diſtinguendam eſſe viam a fluxu, quo progrediens linea recta afficitur. Quoniam vero in calculo communi, in quo nulla ſupponitur quantitas mota, quin fluat, motus cum fluxu perpetuo confunditur; hinc fit, ut quantitas mota ſemper ab una ad alteram naturam, a genere ad genus tranſitum faciat. Quare, cum in Analyſi communi ne verbum quidem de hac duplici ſe moventis quantitatis ratione hucuſque factum fuerit; regulæ quædam, ac leges ſunt indicandæ, quibus fortaſſe haſce duas plane diverſas notiones liceat ſigno aliquo ſecernere, atque oculis ipſis ſubjicere.

§. 3. Ut vero criterium aliquod exhibeamus, quo quantitates motæ, quin fluant, ab immotis ſecernantur; ſedulo obſervandum (*Tab. III. fig.* 1.), quantitatem, quam abſtracte ſumptam diximus a, & A B ab A verſus B poſitivam $= a$, & B A $= - a$ negativam, quoquoverſum moveri poſſe (per ea, quæ superius §. 31, & ſeqq. Cap. I. animadvertimus) quin naturam ſuam, hoc eſt dimenſionem mutet. Moveatur igitur, motu ſemper ſibi parallelo, hinc inde a ſua prima poſitione A per lineam ſibi normalem C′C; & ab A verſus C conſtituta poſitivorum plaga, erit A C′ plaga negativorum. At quomodo motum hunc, in quo ſemper linea perſeverans nullum ſui veſtigium relinquit, calculo indicabis, & diſtingues ab illo motu, quo linea eadem fluendo rectangulum A B′ dextror-

Item poſita in prima æquatione $2\,AA' + 2\,A'A = 2\,(a)^{\circ} - 2\,(a)^{\circ}$, $2\,AA' = A'(A''')$, erit $A'(A''') + 2\,A'A = A'(A''') + A'A''' = 2\,(a)^{\circ} - 2\,(a)^{\circ}$, non zero, ſed $= \pm\,4\,(a)^{\circ}$.

§. 8. Hoc alio modo juvat demonſtrare. Dividatur AA' (*fig.* 4.) bifariam in A''; eritque $AA'' + A''A = \frac{(a)^{\circ}}{2} - \frac{(a)^{\circ}}{2}$; $A'A'' + A''A' = -\frac{(a)^{\circ}}{2} + \frac{(a)^{\circ}}{2} = A''A + AA''$: ergo $AA'' + A''A = \frac{(a)^{\circ}}{2} - \frac{(a)^{\circ}}{2} = A''A + AA'' = -\frac{(a)^{\circ}}{2} + \frac{(a)^{\circ}}{2}$; ſive $A''A' + A'A'' = \frac{(a)^{\circ}}{2} - \frac{(a)^{\circ}}{2} = A'A'' + A''A' = -\frac{(a)^{\circ}}{2} + \frac{(a)^{\circ}}{2}$. Hæc autem omnia per 2 dividantur; eritque $\frac{AA'' + A''A}{2} = A(A''') + A''(A''') = \frac{A''A + AA''}{2} = A''(A''') + A(A''') = \frac{A''A' + A'A''}{2} = A''A''' + A'A''' = \frac{A'A'' + A''A'}{2} = A'A''' + A''A''' = \frac{\frac{(a)^{\circ}}{2} - \frac{(a)^{\circ}}{2}}{2}$. Hinc æquationes

I.ª $\frac{\frac{(a)^{\circ}}{2} - \frac{(a)^{\circ}}{2}}{2} = \frac{AA'' + A''A}{2} = \frac{A''A + AA''}{2} = \frac{A''A' + A'A''}{2} = \frac{A'A'' + A''A'}{2} =$ &c.

IIª. $\frac{\frac{(a)^{\circ}}{2} - \frac{(a)^{\circ}}{2}}{2} = A(A''') + A''(A''') = A''(A''') + A(A''') = A'A''' + A''A''' =$ &c.

Sed in prima æquatione ſecundum membrum æquatur zero, cum idem punctum itu redituque ad primum locum, viam, quam confecerat, deſtruit. In ſecunda vero æquatione $A(A''') + A''(A''')$ cum ceteris non æquatur zero; non enim

enim indicat ejuſdem puncti reditum regreſſumque, ſed punctorum duplicium ſibi invicem in puncto medio (A‴) occurrentium, viam duplo ſpatio A (A″) poſitivo vel negativo æqualem. Quo mirifice confirmatur quicquid infra dicemus §. 41. Quare in æquatione I^a. $\frac{\frac{(a)^\circ}{2} - \frac{(a)^\circ}{2}}{2} = 0$; & $\frac{(a)^\circ}{2} - \frac{(a)^\circ}{2} = 0$: in II^a. $\frac{\frac{(a)^\circ}{2} - \frac{(a)^\circ}{2}}{2} = \pm \cdot \frac{\frac{2(a)^\circ}{2}}{2}$; &, ſublato utrinque ultimo denominatore, $\frac{(a)^\circ}{2} - \frac{(a)^\circ}{2} = \pm (a)^\circ$: quibus æquationibus varius indicatur valor, quo eadem $(a)^\circ - (a)^\circ$ pro varia ſua origine ſemper affici poteſt.

§. 9. Nam $\frac{(a)^\circ}{2} - \frac{(a)^\circ}{2}$ oſtendit punctum in A (*T. III. fig.* 5.); $-\frac{(a)^\circ}{2} + \frac{(a)^\circ}{2}$ punctum oppoſitum A′: & $\pm \frac{(a)^\circ}{2} \mp \frac{(a)^\circ}{2}$ indicat ſummam ſpatii deſcripti ab utriſque punctis in A″ congredientibus, vel inde in priſtinum locum regredientibus. Verum poſito A′ immoto, & A dupla velocitate in A′ concurrente, erit $(a)^\circ$ ſpatium deſcriptum a puncto A in A′ perventum, & puncta duo erunt in A′: contra vero $-(a)^\circ$ indicabit punctum A quietum, & A′ tranſlatum in A: quibus omnibus varia originis puncta ac principia determinantur.

§. 10. Illud inſuper diligenter obſervandum, multum inter ſe differre $\frac{(a)^\circ}{2} - \frac{(a)^\circ}{2}$, & $\frac{(0)^\circ}{2} - \frac{(0)^\circ}{2}$. Nam primus modus indicat ſpatium imaginarium a puncto deſcriptum eſſe $= (a)$, quo vidimus punctum in A vel A′, vel A″ transferri, locumque mutare: at in ſecundo, cum diſtantia zero, ſive nulla prorſus ſit, omnibus punctis in unum ſemper conjunctis, nulla translatio loci fiat neceſſe eſt: id unum tantum colligendum eſſe docemur, quod cum ſit $\frac{(0)^\circ}{2} - \frac{(0)^\circ}{2} = -\frac{(0)^\circ}{2} + \frac{(0)^\circ}{2}$, quantitas hoc coeficiente affecta promiſcue tam negativa, quam poſitiva ad libitum ſumi poteſt. Nam $\overline{\frac{(0)^\circ}{2} - \frac{(0)^\circ}{2}} \times a = \overline{-\frac{(0)^\circ}{2} + \frac{(0)^\circ}{2}} \times -1 \cdot a$

=

$$= -\overline{\frac{(0)^{0}}{2} + \frac{(0)^{0}}{2}} . - a = \frac{2.(0)^{0}}{2} . a = \frac{2.(0)^{0}}{2} . - a$$

$= \left(\frac{0}{0}\right) . a = \left(\frac{0}{0}\right) . - a = \pm\, a$. Hinc quantitas, hoc artificio, loco immota directionem tantum contrariam ſumere cogitur. Sed hæc innuiſſe modo ſufficiat ad invidiam novis a me propoſitis Methodis aliquo modo minuendam. Confido enim fore, ut poſtquam inferius hæc magis magiſque a calculo communi confirmari conſtabit, facilius excipiantur novæ a me propoſitæ Theoriæ hiſce nixæ principiis: quæ tamen cum ſuis ac propriis ſuperſtruantur fundamentis; non dubito quin e converſo hiſce ipſis, a quibus acceperunt, ampliorem fidem concilient.

§. 11. Antequam tamen progrediar, illud (quod multum impoſterum conferre ſenties) animadvertas velim; eſſe ſcilicet $\overline{a - a}^{0} = (a)^{0} - (a)^{0} = 2(a)^{0} = -2(a)^{0}$. Nam conſtat eſſe $\frac{a - a}{a - a} = \overline{a - a}^{0}$: ſed, per ea quæ §§. 7. & 8. demonſtravimus, $a - a = \pm\, 2a$; erit igitur $\overline{a - a}^{0} = (\pm\, 2a)^{0}$. Verum (*fig.* 5.) poſita $AA'' = (a)^{0}$, ſcilicet linea diſtantiam abſtractam tantum inter puncta A, A'' indicante, eſt ex dictis $AA' = \overline{a - a}^{0} = (\pm\, 2a)^{0} = AA' + A''A' = (a)^{0} + (a)^{0} = A'A'' + AA'' = -(a)^{0} + (a)^{0} = AA'' + A''A' = -(a)^{0} - (a)^{0}$. Ergo tandem $\overline{a - a}^{0} = (a)^{0} - (a)^{0} = (\pm\, 2a)^{0} = \pm\, 2(a)^{0}$: hoc tantum diſcrimine, quod $\overline{a - a}^{0} = (\pm\, 2a)^{0}$ totam lineam integram atque unam $\pm\, AA'$ ſignificet nullo præcipuo puncto interjecto diſtinctam; at $(a)^{0} - (a)^{0} = \pm\, 2(a)^{0}$ deſignet lineam AA' biſariam in A'' diviſam, cujus una pars tamquam integra & una accepta, ſi bis repetatur, totam lineam AA' imaginariam adæquat.

§. 12. Hoc ita verum eſt, ut ab ipſa methodo Newtoniana evolvendi Binomium ad quamcumque poteſtatem eo modo quo paſſim uſurpatur, mirifice confirmetur. Nam facto ſemper, ut moris eſt, $(\pm\, a)^{m0} = (a)^{0}$, & $m . 0 = 0$, quicumque ſit numerus m, ſi communem actu evolvendi Binomium præſcriptam rationem ſequamur, quæ numquam ſignum *minus* a ſecundo termino avelli poſſe docet; inveniemus $\overline{a - a}^{0} = \overline{a + (-a)}^{0}$ $= (a)^{0} + 0(a)^{0} + 0(a)^{0} + 0(a)^{0} \ldots\ldots\ldots$ ad infinitum

$= (a)^{0}$

$= (a)^0 + \frac{0}{0}(a)^0$: ſcilicet tot terminis zero repetitis, quot indicantur ab $\frac{1}{0}$ (poſito in denominatore eodem zero, quo ſinguli termini afficiuntur); ergo $\overline{a - a}^{\,0} = (a)^0 + (a)^0 = 2\,(a)^0$: neque poteſt zero æquari, niſi ſignum *minus* ab a divellatur, ita ut ſit $\overline{a - (+a)}^{\,0}$

$= (a)^0 - 0\,(a)^0 - 0\,(a)^0 - 0\,(a)^0 \ldots\ldots = (a)^0 - \frac{0}{0}(a)^0$

$= (a)^0 - (a)^0$. Quod ſi ſpatio imaginario $(a)^0$ pro puncto, quod §. 6. hujuſce Cap. eidem $(a)^0$ applicavimus, ſubſtituatur quævis quantitas $(a)^m$, ſive exponenti zero addatur quivis numerus m, ea omnia quæ ſuperius e puncto ſpatio imaginario $(a)^0$ applicato deduximus, cuicumque poteſtati $(a)^m$ accomodari poſſe, ex dictis non difficile eſſet demonſtrare. Sed hæc accuratiorem poſtulant tractationem, ut in tuto collocentur: quod a me tunc fiet, cum de Methodis a me indicatis infinitatem quamdam abſolutam complectentibus, a qua ſuam vim quicquid nunc *traſcendens* dicitur mutuatur, ex compoſito agam.

§. 13. Nunc multum intereſt ad examen revocare prima, ac ſimpliciora elementa, quibus totum hoc immenſum prope nititur ædificium, numeros ſcilicet, & Alphabeti literas, nec non ſigna, ſive notas (+) *plus*, (—) *minus* literis præfixas. Jam paſſim uſu receptum eſt, quantitates notas numeris, vel primis Alphabeti literis a, b, c, &c., incognitas vero ultimis x, z, y, &c. deſignari. Cognitæ literæ a, b, &c. indeterminatæ dicuntur, & quidem eo ſenſu, ut ipſis quicumque valor tribui poſſit; is vero ſemel pro lubitu determinatus, in eadem operatione ex ſe, Analyſi jubente, immutari non poſſit.

§. 14. Data ſit igitur quæcumque quantitas a, quæ licet magnitudinem cujuſvis naturæ referre poſſit (ut puta lineam, ſuperficiem, corpus, ſpatium, velocitatem, &c.); ope lineæ exprimatur oportet, ut ejus affectiones geometrice eruantur. Hæc, hoc modo conſiderata, nullam aliam in nobis notionem excitat, quam magnitudinis datæ, ac in eo quem primo concepimus, aut delineavimus loco conſtanter perſeverantis. Quanam vero ratione poterimus methodis, quibus nunc utimur, illas alias, quibus obnoxiam eſſe ſæpe diximus, affectiones calculo adumbrare, ac ſingulas a ſingulis ſecernere? Sane calculo communi hæc, & alia ita confuſe & ambigue traduntur, ut omnia quæ ad poſitionem, & ad naturam quantitatis cognoſcendam pertinent, incerta prorſus relinquantur. Nam (ut exemplo utar aliquo) quæſo quid ſibi velit hæc ab Analyſi abſtracte propoſita quantitas ma? Nonne patet ambiguam hanc ſcribendi formam, ambiguas ac multiplices continere ſignificationes? Primo enim ma poteſt eſſe

 quan-

quantitas integra linearis ſemel ſumpta ; vel *a* quantitas integra tot vicibus repetita, quot unitates in numero *m* continentur ; quo in caſu *m* coeficientis vicem gerit , *a* quantitatis integræ ; vel e contra quantitas integra *m* tot vicibus accipienda , quot unitates in *a* , qui hic coeficiens eſt . Rurſus *ma* ſignificat productum $m \,.\, a$, vel $m \,.\, - a$, vel ſolidum $1 \,.\, 1 \,.\, ma$, $- 1 \,.\, - 1 \,.\, ma$; $- 1 \,.\, 1 \,.\, - ma$, &c. (ut omittam ceteras prope innumeras variationes) . Verum in primo caſu coeficientes cum quantitatibus confunduntur ; in ſecundo caſu a linea ad ſuperficiem, a ſuperficie ad ſolidum &c., ex poſitivis , vel negativis lineis in ſe ductis conflatum , ideſt a genere ad genus tranſitus fit . Hæc tamen omnia ab una tantum hac ſcribendi *ma* forma ſimul comprehenduntur , quin nullum ad hæc expedienda , atque invicem pro re nata ſecernenda ab Analyſi communi certum præceptum tradatur.

§. 15. Adde quod (ut in eodem exemplo inſiſtam) poteſt eſſe *ma*

$$= \pm (ma) = \frac{f(ma + h(ma}{f+h} = \frac{f.\pm(ma) + h.\pm(ma)}{f+h}$$

$$= \frac{g\left(\frac{\pm f(ma)}{f+h}\right) + k\left(\frac{\pm f(ma)}{f+h}\right)}{g+k} + \frac{l\left(\frac{\pm h(ma)}{f+h}\right) + n\left(\frac{\pm h\, ma)}{f+h}\right)}{l+n},$$

&c., & ſic ad infinitum. Nam hæc ultima æquatur $\frac{\pm f.(ma)}{f+h} \pm \frac{h(ma)}{f+h}$

$$= \frac{f.\pm(ma)}{f+h} + \frac{h.\pm(ma)}{f+h} = \pm ma$$: quæ tamen ſingulæ, licet uni quantitati *ma* æquentur, multum tamen referre, utrum integræ, an bifariam, vel in plures partes diviſæ intelligantur, ſuperius oſtendi, inferiuſque magis magiſque patebit. Hoc tamen modo nulla in natura ipſa quantitatis, ſive in ejus dimenſione adhuc facta fuit mutatio.

§. 16. Rurſus hæc ipſa *ma* ſequentibus aliis, & quidem infinitis modis variari poteſt : $ma = \pm ma = \pm m(a)^1 = a(m)^1 = (ma)^1$

$$= (ma)^{0+1} = m(a^{0+1}) = a(m^{0+1}) = \left(\frac{ma}{ma}\right)(ma)$$

$$= m\left(\frac{a}{a}\right)(a)^1 = a\left(\frac{m}{m}\right)(m)^1 = \left(\frac{1}{1}\right)(ma)^1 = \left(\frac{0}{0}\right)(ma)^1$$

$$= \left(\frac{1-1}{1-1}\right)(ma)^1 = \left(\frac{-1+1}{1-1}\right)(-ma)^1, \&c. = (m)^1(a)^1$$

$$= \sqrt{ma}\,.\,\sqrt{ma} = (1)^1(ma)^1 = \sqrt[3]{ma}\,.\,\sqrt[3]{ma}\,.\,\sqrt[3]{ma} = \&c$$; quibus ultimis a genere ad genus tranſitus fit . Quod ſi hæ ſingulæ eo modo quem do-

docet §. 15. tractentur, infinitam prorſus variationum ſeriem ab una tantum quantitate ma obtinebimus. De ſingulis in progreſſu pro re nata agemus.

§. 17. In hiſce tantum hoc Capite immorabor, quæ ad rem, quam nunc agimus, ſpectant. Ac primum animadvertatur velim, quomodo a poſitivo ad negativum, & viceverſa tranſitus fieri poſſit. Nam nemo inficias ibit, eſſe $(ma)^1$ æqualem $(ma)^{0+1}$; ergo $(ma)^1 = (ma)^{0+1} = \left(\frac{ma}{ma}\right)(ma)^1$: ſed quoniam quæcumque ſit quantitas ma, (licet zero vel infinita) dummodo eadem ſit tam in numeratore, quam in denominatore, ſemper $\frac{ma}{ma} = \frac{1}{1}$ $= \frac{0}{0} = 1$: ergo $(ma)^1 = (ma)^{0+1} = \left(\frac{ma}{ma}\right)(ma)^1 = \frac{1}{1}(ma)^1$ $= \left(\frac{0}{0}\right)(ma)^1 = \left(\frac{1-1}{1-1}\right)(ma)^1 = \left(\frac{-1+1}{1-1}\right)(-ma)^1$ $= \frac{0}{0}(-ma)^1 = (-ma)^1 = \left(\frac{-1+1}{1-1}\right).-1(ma)^1$ $= (0)^0.-(ma)^1 = -(ma)^1$. Inter haſce ſcribendi formas, illæ duæ probe ſunt notandæ; ſcilicet $(-ma)^1 = -(ma)^1$, quæ licet eædem adamuſſim videantur, & ut tales ſemper uſurpatæ fuerint; tamen in notione utrique communi adjunctum aliquod, quod uni competit, alteri applicari non poſſe rem ſevere expendendo mox oſtendemus. Quod diximus de quantitatibus notis indeterminatis, id etiam determinatis, ſive numeris, nec non incognitis convenire poſſe, nemo eſt qui non videat. Quare non ſemper verum eſt, quod in Inſtitutionibus Analyticis paſſim traditur, numerum ſcilicet ſpeciei alicui immediate præfixum ſignificare ſpeciem illam toties ſumendam eſſe, atque ideo vocari coeficientem: fieri enim poſſe diximus, ut & integra quantitas linearis, veluti $(2a)^1$ ab hoc indicetur, facto $2a = f$, ut ſit $(2a)^1 = f^1$; & etiam productum duarum quantitatum, ſi fiat $(2)^1.(a)^1$, numero 2 lineam determinatam unius dimenſionis ac eſt a referente. Quæ inter ſe quantum differant & vidimus, & videbimus.

§. 18. Quare illud pro certo primum ſtatuatur, quantitates licet notas, pro varia tamen ratione, qua ſpectantur tractanturque, varios exiſtendi modos, varioſque valores aſſumere poſſe; ac in hoc tantummodo a quantitatibus variabilibus differre, quod hæ, quacumque forma donentur, ſub ſingulis tamen variabiles ſunt, ſive fluentes, atque ideo infinitis prope valoribus affici poſſe: illæ vero, infinitis licet mutationibus obnoxiæ, in ſingulis tamen nonniſi unum, ſemperque determinatum valorem obtineant. Quemadmodum enim $x = ma$ ſignificat x variabilem determinari uno valore ma; ita $ma = x$ ſignificat ma prius deter-

determinatam, nunc tot modis mutari poſſe, quot modis x. Sed de hoc infra accuratius.

§. 19. Nunc ulterius progrediendo, ad examen revocetur formula $\frac{ma}{ma}$.

Omnes ad unum Analyſtæ docent, eſſe $\frac{ma}{ma} = 1 = (ma)^0 = (1)^0$, unamque pro altera indiſcriminatim in calculo uſurpari poſſe aſſeverant: ea ſane nixi ratione, quod ſingulæ ſingulis ita in omnibus conveniant, ut nulla inter ipſas, neque quoad modum, neque quoad quantitatem differentia intercedat. Verum rem attentius conſideranti patebit quam longe a veritate diſtet ratio illa, qua una freti, ſubſtitutionem illam fieri poſſe concedunt. Diximus enim ſuperius ma ſine exponente non quantitatem, ſed numerum abſtractum, qui coeficientis nomine donatur, ſignificare poſſe: proindeque $\frac{ma}{ma}$ ſine exponente eſt tantum $= 1$ ſine exponente, in quo caſu ſignificat quidem unitatem, ſed unitatem abſtractam, ipſaque vicem gerit coeficientis, cui tamen deeſt quantitas applicanda: ſive hæc unitas eſt coeficiens, quod omnibus cujuſcumque naturæ quantitatibus in genere competere poteſt. Hoc tamen ita prolatum ſine ulla applicatione, in ſuſpenſo hæret, ac nullam quantitatem inditio ſuo prodit, licet nullam cujuſcumque naturæ reſpuat quantitatem: uno verbo non eſt quantitas, ſed tantum modus, quo afficitur quantitas, ſive eſt numerus. Ita $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ numerus tantum eſt, quo docemur quantitatem, cui applicatus erit, duplam cum dimidia ſumendam eſſe. Quare $\frac{ma}{ma}$ ſine exponente, proprie ac vere loquendo, nonniſi (1) ſine exponente perfecte, & abſolute æquatur.

§. 20. At poſita $(ma)^1$ cum exponente (quo in caſu $(ma)^1$ eſt quantitas unius dimenſionis, ſive linearis) erit $\frac{(ma)^1}{(ma)^1} = \left(\frac{ma}{ma}\right)^1 = (ma^{1-1})^1$ $= (1^{1-1})^1 = ((ma)^1)^0 = ((1)^0)^1 = ((ma)^1)^0 = ((1)^1)^0$; quibus (quemadmodum §. 4.) deſignatur ſpatium (ma), vel (1) a puncto aliquo deſcriptum, quin fluendo ad quantitatem $(ma)^1$, vel $(1)^1$ linearem perveniat. Quoniam vero $\left(\frac{ma}{ma}\right)^1 = \left(\frac{x^z}{x^z}\right)^1$, erit etiam $((ma)^0)^1 = ((1)^0)^1$ $((x^z)^0)^1$. Hinc patet $(1)^0 = (x^z)^0$ ſignificare unitatem illam abſtracte indicatam, de qua ſuperius diximus, ſive quamcumque in genere quantitatem: quo

quo maxime confirmatur illud a me dictum §. 6. Cap. I; unitatis ſcilicet notionem maxime univerſalem eſſe, atque adeo abſolute, & in omnibus indeterminatam: proindeque ſub hoc unitatis nomine non ſolum quamcumque quantitatem cujuſcumque dimenſionis ac naturæ, & etiam *zero*, & ejus inverſum *abſolutum infinitum* contineri; ſed (abſtractione etiam facta a quantitate omni) & numerum tantum, ſive relationem, ſive modum quantitatis ſignificare: dummodo accuratam exponentis, & quantitatis ad poteſtatem zero elevatæ rationem habeamus.

§. 21. Itaque ex. gr. $\frac{5}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ ſine exponente numerum, ſive coeficientem dabit: at $\frac{5}{2} = (2)^0 + (2)^0 + \frac{1}{2}$

$= (2)^0 \cdot \overline{1 + 1 + \frac{1}{2(2)^0}} = (2)^0 \cdot \overline{2 + \frac{1}{(2)\cdot(2)^{1-1}}}$

$= (2)^0 \cdot \overline{2 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{2}(2)^0$; in qua formula $\frac{5}{2}$ ſignificat numerum, ſive coeficientem; $(2)^0$ vero quantitatem quamcumque indeterminatam, cui applicatur: ita ut ſit $\frac{5}{2} = \frac{5}{2}(2)^0$, ſive $5 = 5\,(2)^0 = 5\,(ma)^0 = 5\,(x^z)^0$, ſcilicet quantitas $(x^z)^0$ univerſalis, quinquies repetita: quod ſi in eadem æquatione $\frac{5}{2} = \frac{5}{2}(2)^0$ fiat 2 in denominatore primi membri $= (2)^1$; erit $\frac{5}{(2)^1} = \frac{5}{2}(2)^{1-1}$, & $5 = \frac{5}{2}(2)^{1-1+1}$; $\frac{5}{2}$ numerus, $(2)^1$ determinata quantitas: at facto etiam in ſecundo membro $2 = (2)^1$, erit $5 = 5\,(2^{2-2}) = 5\cdot((2)^2)^0 = 5\,(4)^0$; 5 coeficiens, $(4)^0$ indeterminata quantitas.

§. 22. Quoniam vero promiſcue $\frac{ma}{ma} = 1 = \left(\frac{ma}{ma}\right)^1 = (ma)^0 = (1)^0$ paſſim uſurpatur in communi calculo ſine delectu, neque conſulta Analyſi; quid mirum ſi identidem in calculis incerti, titubanteſque fluctuemus, ac tam in arctum compingamus id, quod natura ſua eſt abſolutum? Sed totius hujuſce ſane graviſſimi, ac difficillimi negotii, cum de duabus aliis a me indicatis Methodis *Abſoluti Infiniti*, ac *Circulationis* agam, prima fundamenta jacere pro virili conabor. Nunc mihi ſatis eſt, ex hac qua una nota utimur methodo, quæ

vere

vere methodus *Abſoluti zero* dicenda eſt, aliqua graviſſimæ rei indicia depromere. Non poſſum tamen hic quin uno verbo in anteceſſum innuam, quam non ſolum falſa, ſed ipſiſmet principiis, quæ mordicus omnes defendunt, prorſus oppoſita ſit opinio illa univerſim recepta, quæ tribuit ſigno $=$ (quod dicitur æqualitatis) eam tantummodo notionem, ut membra hinc inde ab hoc ſigno ſint prorſus identica, ac ejuſdem prorſus valoris in omnibus æquationibus. Nam haud equidem inficior, quin immo libens ſuffragiis communibus aſſentior, iſtis modis communiter uſurpatis efferri poſſe formulam $\frac{ma}{ma} = 1 = (ma)^0 = (1)^0$: at ſi ſingulæ hæ ſcribendi rationes (quemadmodum oſtendi, oſtendamque) diverſam ſignificationem habent, quis non videt ſignum æqualitatis natura ſua notionem univerſaliorem, quam quæ hucuſque illi tributa fuerit, menti objicere, eamque, quam ſæpius inculcavi in ſcriptis editis a me dictam *tranſmutationem*, ſive *transformationem*; qua unam pro altera ex hiſce ſcribendi formis, non ut æqualem, ſed ut æquipollentem (ut ita dicam) in calculo rite licet ſubſtituere?

§. 23. Illud vero maximi momenti, antequam progredior, eſt diligentiſſime obſervandum (ut ſenſim rei, de qua ago claræ notiones legentibus inferantur) numerum exponentis locum occupantem multum differre ab ipſo vere dicto exponente, cujus proprium munus eſt dimenſionem quantitatis ſive poteſtatem, ad quam ſupponitur elevata quantitas, indicare. Fieri enim ſemper poteſt, ut idem numerus, qui exponentis vice fungebatur in uno ſenſu, in alio aliam prorſus obtineat ſignificationem. Quod ut exemplis clarius intelligatur, ajo $(a)^2$ ſic abſtracte ſumptam ſignificare tam quadratum, ſive productum $a \cdot a$ duplicis dimenſionis, quo in caſu 2 vere exponens eſt, quam quadrato — quadratum $= \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^2} = (\sqrt[4]{a^2})^4$, poſitis ſingulis factoribus $\sqrt[4]{a^2}$ unius dimenſionis; quo in caſu exponens eſt 4, quantitas linearis ad quartam poteſtatem elevanda $\sqrt[4]{aa}$, & ſic ad infinitum, &c. Item a^2 poteſt eſſe linearis, ſive unius dimenſionis $= (aa)^1$, aa lineam, & 1 exponens indicantibus; ſive etiam $aa = (aa)$ ſine exponente: ubi non quantitas, ſed numerus, ſive coeficiens vere eſt. Quare non licet univerſim docere, quemadmodum huc uſque factum fuit, quantitates tot dimenſionum, ſeu poteſtatum vel dignitatum eſſe, quot unitates in numero ſuffixo continentur. Nam $(a)^m$ ex. gr. poteſt quidem eſſe a elevata ad poteſtatem m, ſed etiam cujuſcumque dimenſionis (quemadmodum innui); ac proinde non ſemper m tamquam index, ſive exponens accipiendus eſt. Ita a, b non ſemper cenſendæ ſunt quantitates unius dimenſionis, nec ſemper ſubintelligenda unitas: ſic ab non ſemper tamquam factum duarum dimenſionum uſurpare licet.

§. 24. Illud inſuper probe notandum $(a)^1 \cdot (b)^1$, $(ab)^{\frac{2}{2}}$ multum inter ſe

ſe differre, licet utrumque duarum dimenſionum velis. Nam $(a)^1 . (b)^1$ indicat rectangulum factum ab $(a)^1$ ducta in $(b)^1$: at $(ab)^{\frac{2}{2}} = (\sqrt{ab})^1 . (\sqrt{ab})^1$, ſive quadratum ortum ab eadem quantitate in ſe ipſam multiplicata: ita $(ab)^n = (a)^n . (b)^n = (ab)^{\frac{2n}{2}} = (\sqrt{ab})^n . (\sqrt{ab})^n$, idque infinitis aliis modis, quibus natura, valor, & poſitio, ſive relatio unius ejuſdemque quantitatis abſtracte conſideratæ mutari poſſunt. Quæ tamen omnia cum in Analyſi inter ſe nunquam diſtincta fuerint; quid mirum, ſi tot impervia prorſus, atque nulla ratione a methodo ſuperanda occurrant, & ſi hæc a me afferta æquationum *tranſformatio* ut abſurdum aliquod inauditum explodatur?

§. 25. Itaque, ut huic graviſſimo ſane malo remedium opportunum afferamus, notam aliquam, ſive novum ſignum inveniendum eſſe cenſeo, quo, prout Analyſis pro re nata jubet, hæc inter ſe in calculo probe diſtinguantur. Hoc vero facile obtinebimus, ſi uncis ( ), quibus quantitates concluduntur novum officium, novamque notionem tribuamus. Sic a^m eſt quantitas abſtracte ſumpta, multiplicium notionum capax: at $(a^1)^m = (a^m)^1$: ſed primum deſignat quantitatem unius dimenſionis elevatam ad poteſtatem m; ſecundum quantitatem (a^m) linearem: at $(a^m)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{a^m} . \sqrt{a^m}$ quantitatem duarum dimenſionum ortam a lineari $\sqrt{a^m}$ in ſe ducta &c. Quanti vero referat omnia hæc ad ſcrupulum uſque in peculiaribus circumſtantiis diſtinguere, ſuo loco patebit.

§. 26. Ex dictis colligitur eſſe quidem $(1)^0 = (\pm 1)^0 = (\pm x^z)^0 = (\pm x^z)^{n.0} = ((\pm x^z)^0)^n = ((\pm m a^z)^0)^n = ((\pm m a^g)^0)^n =$ &c. .... Item $(1)^0 = (\pm 1)^0 = (\pm x^{-z})^0 = (\pm x^{-z})^{n.0} = ((\pm x^{-z})^0)^n = ((\pm m a^{-z})^0)^n = ((\pm m a^{-g})^0)^n =$ &c... Nam in hoc ſecundo caſu eſt $(x^z)^0 = (x^z)^{n0} = ((x^z)^0)^n = ((x^z)^{1-1})^n = ((x^z)^{-1.-\overline{1+1}})^n = ((x^{-z})^0)^n =$ &c. .... ſingula tamen membra diverſas notiones, & quidem inter ſe toto cœlo diſſitas ſignificant: quæ tamen formulæ in communi hoc $(1)^0$, inexhauſto tamquam fonte, potentia contentæ, ab ipſo ſingulæ profluentes illius vicem ſubire, ac prout res fert in calculo pro ipſo $(1)^0$ ſingulæ ſubſtitui poſſunt. Quamquam igitur inter ſe identitate non æquentur, cum tamen ſingulæ $(1)^0$ æquentur, hoc communi vinculo jure licet unam pro altera uſurpare. Itaque ſuperioribus terminis convenientibus ſingulis in hoc, quod unumquodque ſpatium illud imagina-

ginarium a puncto, quin fluat, percurſum innuat; primo $(1)^0$, & ſecundo $(\pm 1)^0$ indicatur unitas illa abſtracta, & maxime univerſalis, quantitatem cujuſcumque naturæ, & relationis, quarum omnium capax eſt, repræſentans: tertio vero $(\pm x^{\pm z})^0$ fit prima determinatio, qua ſtatuitur, hanc unitatem æquari univerſim ſpatio $\pm x^{\pm z}$ hujus formæ: quarto $((\pm x^{\pm z})^0)^n$ dimenſionis n (cum tamen $\pm x^{\pm z}$ indeterminata ſit quantitate & exponente): quinto modo $((\pm m a^{\pm z})^0)^n$ determinatur quantitas, non exponens: ſexto vero $((\pm m a^{\pm g})^0)^n$ quantitas & exponens: &c. Quare ſi ponamus modo punctum in deſcribendis ſingulis ſpatiis revera fluxiſſe; quiſque videt hoc punctum fluendo novam naturam ſingillatim ſumere; eſſeque in ſingulis caſibus $(1)^0$ vel ± 1, vel $\pm x^{\pm z}$, vel $(\pm x^{\pm z})^n$, vel $(\pm m a^{\pm z})^n$, vel $(\pm m a^{\pm g})^n$, vel &c. quæ quidem æquationes diverſimode elatæ oſtendunt quot modis una eademque quantitas variis, quibus utitur Analyſis, artificiis poſſit tranſmutari.

§. 27. Inter haſce infinitas prorſus æquationes, e quibus diverſi, ac prope infiniti unitatis ad poteſtatem zero elevatæ valores eruuntur, duas præcipue commemorandas cenſeo, de quibus altum in tota Analyſi ſilentium. Nam cum axioma univerſim receptum doceat quamcumque quantitatem rite poſſe eodem factore multiplicari, ac dividi; nemo non videt, functionem $\frac{x^z}{x^z} = \frac{x^z}{x^z} \cdot \frac{0}{0}$; atque adeo æquationem $(1)^0 = ((x)^z \cdot 0)^0$ ceteris ſuperius indicatis addendam eſſe. Quid vero hæc ſibi velit æquatio, nunc paucis eſt exponendum. Jam diximus $(x^z)^0$ eſſe ſpatium illud imaginarium a puncto aliquo deſcriptum, quin afficiatur quantitate: at ſublato zero ab exponente, ſignificare quantitatem illam x^z diverſimode indeterminatam, ad quam punctum fluens tandem in fine ſui motus aſſurgit, fluentis nomine deſignatam. Quare $((x^z) \cdot 0)^0$ innuat oportet initium motus puncti quieti, antequam ſpatium illud cujuſcumque tandem dimenſionis ſe movendo actu percurrat, ſive ſpatium illud non confectum, ſed jam conficiendum. Hinc $(x)^z \cdot 0$ indicabit principium fluxionis a puncto percurrendæ; hoc eſt in potentia oſtendit, quamnam quantitatis naturam punctum fluens poſt fluxum aſſumere debeat. Cum enim omne quod eſt quantum tandem fluxione contraria deſinat in non quantum, ſive in punctum zero, a quo diſceſſerat; ita profecto e zero quantitates illæ omnes evolvantur neceſſe eſt, quæ in illud deſinentes abſorptæ fuerunt: zero igitur & initium, & terminus

nus quantitatis cenſendum eſt. Licet igitur zero abſolutum nihil omnino ſit in quantitate, eſt tamen initium quantitatis cujuſcumque: at cum omnes in ſe potentia quantitates includat, licet zero ſemper æquetur zero, ſi valorem quantitatis conſideres, tamen unum zero ab altero mente diſtinguatur oportet: cum unum poſſit eſſe initium, vel finis abſolutiſſimus quantitatis & in valore, & in dimenſione diverſæ ab illa, quæ ab altero zero indicatur, ut puta poſitivæ, negativæ, linearis, rectangulæ; &c.: proindeque quodcumque zero in potentia naturam illius quantitatis aſſumit, quæ vel in ipſum recidit, vel ab ipſo educitur. Quare meo quidem judicio ($a^2 . 0$) ex. gr. ſignificat abſolutiſſimum zero, a zero alterius naturæ a factore (a $)^z$ diſtinctum: ita ut ſi ($a\ a$ $)^1$ ſit linea, erit ($a\ a$ $)^1 . 0$ finis, vel initium lineæ ($a\ a$ $)^1$; ſi vero ſit (a $)^2$ quadratum, (a $)^2 . 0$ indicabit zero, ſive punctum quadratum, ex quo ſcilicet educitur quadratum (a $)^2$, vel in quod tandem ipſum quadratum ad nihilum redactum deſinit: idem dicatur de punctis, ſive zero ſolidis; &c.

§. 28. Quamobrem jure ac merito hoc $(x^z . 0)^0 = 0$ conſiderandum eſt tamquam elementum illud unum, primum, abſolutiſſimum cujuſcumque quantitatis; quod licet hucuſque methodi ignoratione, qua rite ſecerni poſſit, uno tantum modo acceptum, nihil utilitatis ad rem quam agimus præbuerit; tamen per ea, quæ diximus in Præfatione §. 45. a differentialibus cujuſcumque gradus celebriorum Mathematicorum auctoritate adumbratur, quæ nullo alio argumento defendi, ac probari poſſunt, niſi ſint abſoluta zero, & ab hoc abſoluto zero tutentur. Illud vero ex hac inverſa methodo naſcitur detrimenti, quod differentiale primo ſumptum inter certos fines concluſum, limitem ponit abſoluto zero; cum contra zero abſolutum primo poſitum differentialis nimis in arctum in aliquibus circumſtantiis concluſi limites pro re nata extendere debuiſſet.

§. 29. Præter hanc ſupra memoratam æquationem $(1)^0 = ((x^z) . 0)^0$ a fractione $\frac{x^z . 0}{x^z . 0}$ erutam, hæc alia eodem jure $(1)^0 = ((x^z) . \frac{1}{0})^0$ immediate deducitur. Nam

$$(1)^0 = ((x^z) . 0)^0 = \frac{x^z . 0}{x^z . 0} = \frac{x^z . 1}{x^z . \frac{0}{0}}$$

$$= \frac{x^z}{x^z} . \frac{1}{\frac{0}{0}} = \frac{x^z}{x^z} . \frac{1}{\frac{0 . 1}{0}} = \frac{x^z . \frac{1}{0}}{x^z . \frac{1}{0}} = \left((x^z) \frac{1}{0} \right)^0 .$$

At hæc æquatio frontibus oppoſitis diſſentit ab altera, a qua tamen eruta fuit,

$(x^z.0)^0$. Nam in prima $((x^z)\,0)^0$ eſt zero, elementum primum, & abſolutum viæ a punſto fluendo conficiendæ: at $(x)^z.0$ eſt zero elementum primum, & abſolutum, ex quo educitur, & in quod recidit quantitas $(x)^z$, nomen ac naturam quantitatis amittens. At $((x^z).\frac{1}{0})^0$ exprimit infinitum illud ſpatium abſolutiſſimum a me in Præfatione indicatum, inverſo zero æquale, ac proinde inverſæ naturæ, cujus eſt capax zero; quod cum abſolutum ſit, ejus inverſum ſit abſolutum neceſſe eſt. Itaque quemadmodum quæcumque quantitas in zero fit non quanta; ita quæcumque quantitas, ad abſolutiſſimam infinitatem fluendo tandem perventa, nequit amplius augeri, quin adjunctum aliquod acquirat, quod illam a ſe ipſa ulterius progrediente ſecernat.

§. 30. Itaque $((x^z).\frac{1}{0})^0$ eſt via illa abſtracte ſumpta, prorſus abſolute infinita a puncto aliquo emenſa a primo ſuo quietis ſtatu diſcedente: at $(x^z)\frac{1}{0}$ fluxus abſolute infinitus *Infinitum* illud *abſolutum* conſtituens, in peragratione illius ſpatii infiniti: quod non quantum & ipſum cenſendum eſt. Hoc igitur *abſolutum Infinitum* $(x^z).\frac{1}{0}$ tamquam elementum conſiderari poteſt infinitum, in quod recidit quæcumque quantitas ſe augendo; quæ huc perventa, cum infinitatem abſolutam acquiſiverit, ceſſat eſſe quanta; hinc vero circulatione regrediendo, quanta fit: hoc tamen diſcrimine, quod licet hinc inde a puncto infinite diſſito fiat quanta; tamen ſi ad determinatum aliquod punctum referatur, oriuntur infinita illa relativa a calculo communi differentiali indicata, ſed nondum meo quidem judicio ſatis cognita, nec certis legibus ſubjecta: cum vera hæc origo, hoc eſt *Infinitum* illud *abſolutum*, a quo dimanant, ab Analyſtis immaniſſimum tamquam abſurdum explodatur. Et tamen juvat quæ in Præfatione dixi hic repetere; quemadmodum quantitates differentiales & falſæ & nullæ eſſent, ſi abſolutum zero, cui revera æquantur, non exiſteret; ita Infinita relativa a *Calculo fluxionum* indicata, nec vera, nec ulla eſſent, ſi Infinitum illud abſolutum, a quo oriuntur, abſurdum eſſet. Quemadmodum enim illæ continua diminutione tandem minores quacumque data in abſolutum zero evaneſcunt; ita hæc, continuo incremento, majora quibuſcumque datis facta, tandem in Infinitum abſolutum deſinunt. Utraque enim nequeunt per eamdem viam ulterius progredi, quin relationem primam mutent, ac ſub diverſa forma naſcantur. Hæc tamen ab oppoſitis hiſce principiis deducta, quomodo inter ſe uniantur, unumque pro altero uſurpari liceat, tertia a me indicata *Circulationis* methodus ſuo loco clarius docebit. Interim hæc duo diverſa, & prorſus oppoſita

Syſte-

Syſtemata, in hoc eſſentialiter a ſe differre cuique rem attentius conſideranti patebit, quod in Syſtemate *Abſoluti zero* punctum zero, ſive punctum in quo quantitatem nullam eſſe volumus, determinatum ſit, locuſque in quo ipſum, ut ita dicam, inhæreat prius conſtitutus, ex quo hinc inde quantitas oriatur: in Syſtemate vero *Abſoluti Infiniti* ſive $\frac{1}{0}$, punctum zero, in quo quantitas nulla eſt, ſit prorſus indeterminatum, & a loco puncti zero primi Syſtematis indeterminate diſſitum: ita ut non prius punctum in hoc caſu quantum fiat, niſi ſpatium infinitis modis determinandum aliquo modo, prout res fert, determinatum deſcripſerit.

§. 31. Scio equidem, nec inficias eo, hæc a communibus paſſim opinionibus ita abhorrere, ut hoc loco nonniſi leviter indicata non ita facile excipiantur. Verum cum totum hoc negotium nonniſi magno, ac multiplici veritatum nondum cognitarum apparatu abſolvi nequeat; hic id unum rogo, ne, qui hæc prima, a quo cetera neceſſario dimanant, principia principiis communibus nimis anguſtis tam diſſona legent, judicium ferant, quin nova hæc, cum in luce poſita fuerint, cum veteribus comparata libera & attenta mente prius excutiant. Lateant enim oportet in ipſo Scientiæ hujus limine graviſſima illa impedimenta, quibus celeberrimi cujuſcumque ætatis Mathematici doluerunt, dolentque fruſtra Scientiam hanc pulcherrimam implicatam. Hic tamen ego nonniſi calculo noto fretus quædam, quibus nunc opus eſt, extra dubitationis aleam me poſuiſſe confido: quæ vero a penitioribus illis fontibus immediate dimanant, tunc in apertum proferentur, cum de *Methodis* illis meis *generalioribus* ex compoſito agam; nunc tantum contentus, ſi ab inſanabili repugnantia ea liberata aliquam nec quidem levem veritatis ſpeciem præſeferre oſtendam.

§. 32. Sed jam a quantitatibus ad ſigna $\pm$ quantitatibus ipſis præfigenda tranſitum faciamus: in quibus maximi momenti quædam notatu digna occurrunt. Ac primum nemo ignorat, in Analyticis uſu receptum, ut tam quantitatibus in origine poſitivis, quam quantitatibus in origine negativis, quæ ſubducendæ ſunt, ſignum (+), quantitatibus vero in origine negativis idem ſignum (—), quod quantitatibus poſitivis ſubducendis, præfigatur: nullumque diſcrimen inter hoſce duos prope diverſos exiſtentis quantitatis modos hucuſque ponatur. Ita paſſim docent omnes Analyticæ Inſtitutiones, ceterorum omnium Mathematicorum accedente ſuffragio. Ita Newtonus a Clariſſimo Caſtilioneo perpetuo Commentario illuſtratus §. VI. Sec. primæ . . . „ Negativæ quantitati deſignandæ ſignum —, af„ firmativæ, ſignum + præfigi ſolet „ : & §. VII. „ In aggregato quantitatum „ nota + ſignificat quantitatem ſuffixam eſſe ceteris addendam, & nota — eſſe „ ſubducendam „. Ita Celeberrimus Co. Vincentius Riccatus in ſuis Inſtitutioni„ bus ceteris (quia poſtremis) anteponendis §. 3. Cap. I. Lib. I. „ Subtractio „ quantitatum ſimplicium fit hac horizontali lineola —, quæ ſignificat mi„ nus, præponiturque ſubtrahendæ quantitati. Si a velis a b ſubtrahere, „ ſcribe $b - a$, quod valet b minus a. „ Et articulo 5°. (quem expendendum „ juvat totum hîc tranſcribere). „ Ex his deſcendit negativarum quantitatum

„ ad-

„ additionem ſigno — fieri oportere: nam ſi ſigno + uteremur, ipſæ e negativis tranſirent ad poſitivas: igitur ſi — *a* addidebeat — *b*, ſcribendum erit — *a* — *b*; vel quod idem eſt — *b* — *a*: ſi ſit addenda quantitas — *a* quantitati — *a*, ſumma erit — 2*a*; &c. . . . . Deſcendit ſecundo, quantitatum negativarum ſubtractionem fieri debere ſigno +: ſi enim contrario ſigno uteremur, non ſubtractio, ſed additio juxta ſuperius dicta haberetur. Si igitur ſubtrahenda quantitas — *a* de — *b*, erit differentia — *b* + *a*; ſi quantitas eadem litera exprimatur, ſatis erit ſi ſubtrahatur coeficiens: ita ſi — 2*a* ſubtrahere debeas de — 5*a*, reliquum erit — 3*a*. Hîc etiam animadvertere juvat negativam fore differentiam, ſi, cum ſubtrahis — *a* de — *b*, *a* minor quam *b* fuerit; differentiam fore nullam, ſi — *a* æquet — *b*: ſi vero — *a* excedat — *b*, differentiam fore poſitivam, quod ad ea declaranda, quæ de quantitatibus negativis dicta ſunt plurimum valet „. Ita Riccatus.

§. 33. In hiſce tamen, quis credat? in hiſce uno eodemque tempore & una ex præcipuis hallucinationum cauſis, quæ in calculum irrepſerunt, caute latet, & opportuniſſimum ad haſce penitus tollendas remedium continetur. Ut quod dico novum, ac vix credibile a recepta paſſim opinione aſſenſum tandem extorqueat, mecum velim quiſque ſerio animadvertat (quod nuſquam factum fuit) in analyticis, quæ ſemper ad geometrica traducuntur, linearumque geometricarum conſtructione ſenſibus ſubjiciuntur, caute diſtinguendam quantitatis identitatem ab æqualitate. Nimirum cum quantitas quævis valore, & poſitione ſimul, vel valore tantum, non poſitione alteri æquari poſſit, multum refert, utrum utroque modo, vel alterutro quantitates inter ſe conveniant, diligenter animum atendere. Nam cum æquatio $a = a$ ſignificare poſſit tam primam *a* ſibi ipſi æqualem, quam valore tantum æqualem alteri *a* locum a prima diverſum occupanti: ſumpta in primo caſu in origine poſitiva quantitas + *a*; erit — *a* eadem ipſa quantitas *a* in directione prorſus contraria primæ ſuæ directioni, ſive contrario ſenſu accepta: in ſecundo vero caſu, cum differat poſitione, — *a* æquatur quidem valori negativo poſitivæ, ſed non eſt eadem, eſt tamen in eadem directione ac prima *a*. Ita in *figura 6.* in primo caſu A B = AB; in ſecundo A B = b A. Facta igitur A B poſitiva = *a*, quoniam reſpectu puncti A eſt A b negativa = — *a*, erit in primo caſu $a = a$ identica; in ſecundo A B = b A, ſive $a = a$ æquales quantitate & directione, non poſitione. Sumpta igitur in origine poſitiva quantitas A B = *a*, erit in primo caſu — *a* = B A, ſive ipſa quantitas *a*, ſed contrario ſenſu accepta, hoc eſt a ſe ipſa ſubtracta. At in ſecundo caſu B A non eſt ipſa identica — A B, ſed æqualis tantum A b in origine negativæ.

§. 34. Itaque differentia, & quidem maxima intercedit inter — (+ *a*), & + (— *a*) ſi non valore, tamen poſitione: nam — (+ *a*) indicat poſitivam quantitatem a ſe ipſa ſubtractam, ſive contrario ſenſu acceptam = B A: in + (— *a*) quantitatem A b = — *a* in origine negativam, ſive poſitive at eo ſenſu, in quo eſt (ideſt negative) ſumptam, quæ diverſum ac prima, B A, ſitum occupat. Porro cum ſemper utroque modo — *a* efferri poſſit, ſcilicet — *a* = — (+ *a*) = + (— *a*) = B A = A b, ſemper — *a* hac du-

duplici relatione afficiatur, ac duplici hoc ſenſu accipiatur oportet. Itaque AB + BA = $a - (+a) = 0$; qua indicatur punctum ab A verſus B profectum & iterum inverſo itinere in A reſtitutum, ſpatium primo confectum deſtruxiſſe, & in primo quietis puncto A a quo diſceſſerat, ac ſi numquam in motu fuiſſet, iterum conſtitiſſe, nihil hoc itu reditque a puncto A promotum. At AB + Ab = $a + (-a)$ numquam certe quidem nulla eſt.

§. 35. Ut vero totum hoc negotium difficile ſane, at apprime neceſſarium, qua melius ratione poteſt, declaretur: præter ea, quæ ſuperius diximus, obſervetur primum, eſſe quidem tam AB − AB = 0, quam − AB + AB = 0; & tum Ab − Ab = 0, cum − Ab + Ab = 0; hiſce tamen ſingulis æquationibus ſingula diverſa originis puncta indicantur. Nam prima (*fig.* 7.) AB − AB = AB + BA = 0 oſtendit punctum in A, a quo diſceſſerat, iterum reverſum nihil profeciſſe; at ſecunda − AB + AB = BA + BA = 0 oſtendit punctum non in A, ſed in B conſtitiſſe. Tertia autem ſignificat punctum A, emenſo itinere Ab − Ab = Ab + bA, eſſe quidem in A, ut in prima æquatione; differt tamen a primo modo, quod hîc punctum per partem negativam primum progreditur, contrario dein motu iterum in A reſtitutum. Denique − Ab + Ab = bA + Ab = 0 indicat punctum non in B, quemadmodum in ſecunda æquatione, ſed in *b* perventum quieſcere.

§. 36. Quod ſi hujuſmodi æquationes litera *a* exprimantur; erit

(1) AB − AB = $+a - (+a) = 0$; punctum in fine motus in A:

(2) − AB + AB = $-(+a) + a = 0$; punctum in B:

(3) Ab − Ab = $+(-a) - (-a) = 0$; punctum in A:

(4) − Ab + Ab = $-(-a) + (-a) = 0$; punctum in *b*:

Prima & tertia in eumdem ſitum punctum A reſtituunt; hoc tamen diſcrimine, quod ſi in prima ponatur $-(+a)$, ſive BA in eo ſenſu augeri, in quo eſt, ſive negative, fluit ab A verſus *b* contrario motu, ac flueret in tertia $-(-a)$, ſive bA, quæ ab A verſus B in partem poſitivam procederet. Secunda vero, & quarta differunt & poſitione puncti, & directione, ſi ponamus in utraque ſecundum terminum $+(a)$ in (2da.), $+(-a)$ in quarta augeri. Nam in (2da.) punctum eſt in B, & procedit per BC; in (4^{a}.) vero punctum eſt in *b*, & procedit per *bc* directionem contrariam alteri. Diſtant igitur hujuſmodi puncta intervallo Bb, ad quod metiendum punctum A nihil confert. Quare ſublato puncto A, ſive ab hoc facta abſtractione, concipiamus Bb tamquam lineam integram (quoniam talis in hoc caſu ſumenda eſt); quæ erit quidem $2a$, ſed tamen differt in hoc ab $a + a$, quod in hoc ſecundo caſu bifariam diviſa a puncto cenſenda eſt; integra tamen in primo. At quo ſigno $2a$, ſive integram Bb afficies? Profecto ni prius arbitrio unum, vel alterum B, b tamquam originis punctum ſumas, $2a$ erit indeterminata quoad ſignum. Sume igitur punctum B: tunc B fit primus comparationis terminus; ab hoc verſus b ſumen-

menda eſt poſitivorum plaga (ut §§. 12, & 60. Cap. I. animadverti): quare B b $= 2a$; & bB $= -2a$. Contra vero ſi ſumatur punctum b tamquam comparationis terminus: erit enim modo b B $= 2a$; B b $= -2a$. Vides igitur ſtatim in ipſo limine tantum abeſſe ut æquatio B b $= 2a = -2a$ ſit abſurda (unicum in me, & in mea jactum telum), ut hæc nos doceat B b poſſe eſſe poſitivam $= 2a$, & negativam $= -2a$, prout punctum B, vel b primo ſumitur. Hinc $2a = -2a$ non niſi permutationem puncti originis ſignificat.

§. 37. Lente, ſed caute progrediendo, ex hiſce non difficile eſt eruere (*fig. ead.* 7.), B b, quæ ſublato puncto A prout integra $= \pm 2a = \pm f$ ſumitur (ac proinde vel tota poſitiva, vel tota negativa ſit neceſſe eſt), ſi punctum A medium prout primus comparationis terminus accipiatur, poſſe ac debere dimidiam ſigno plus $+$, alteram dimidiam ſigno minus $-$ affici: ita ut ſit in hoc ſenſu A B + A b $= +(+a) + (-a)$, quæ quidem tantum abeſt ut nulla ſit, quin immo integræ $\pm 2a$ æquætur. Apprime igitur cum veritate conſentiunt ſequentes iſtæ æquationes $+a - a = 2a = -2a = -0 . a = 0 . a$, non quia eodem tempore, ac ſimul omnes iſti valores conciliari inter ſe poſſint, atque in unam eamdemque quantitatem cadere; ſed quia ſingulæ ſingillatim ſingulis iſtis valoribus affici poſſint. Poſſunt igitur omnes eodem æqualitatis ſigno conjungi, & vere & proprie dici poſſunt æquales, cum ſingulæ in ſingulas, mutato originis initio, tranſmutentur. Et ſane 1:ª $+a - a$, eſt tam $= +(+a) - (+a) = \pm 0$ (a poſitiva & identica a ſe ipſa ſubtracta); quam 2:ª $a - a = +(+a) + (-a) = +(a) + (a) = + 2a$, ſumma B b: vel 3:ª $a - a = -(-a) - (+a) = -(+a) - (+a) = -2a =$ b B.

§. 38. Item differentia maxima intercedit inter $-(+b)$, & $+(-b)$; cum $a - b$ æquari poſſit $a + (-b) = a + b = -a - b$: & tamen ſingulæ neceſſariæ. Eſt enim facta A B $= a$ (*Tab. III. fig.* 8.), A C′ $= b$, A C $= -b$, erit $(+a) - (+b) =$ A B $-$ A C′ $=$ C′ B & B C′ $= -a + b$. At $(+a) + (-b) =$ A B + A C, puncto originis A medio inter utramque, quæ in hoc caſu æquatur vel C A + A B $= b + a$ (puncto originis, inverſione A C, tranſlato in C, totaque linea C B tamquam integra, & poſitiva conſiderata, ſublato puncto dato A, vel in C tranſlato), vel B A + A C $= -a - b$; puncto originis, inverſione lineæ A B, tranſlato in B, totaque linea B C negativa, ſive in directione contraria primæ tamquam una ſumpta.

§. 39. Quæ vero omnia ſequenti modo ab una $a - b$ erui poſſunt. Nam $a - b =$ C′B $= a + (-b) = b + a =$ C B integræ (facta inverſione lineæ A C). Vel $a - b = a + (-b) = -(-a) + (-b)$ $= - \times - \overline{(-b) + (-a)} = - \times \overline{b + (-a)} = - \times \overline{b + a}$

$= -$

$= - b - a =$ BA + AC = BC. Simili modo erit $a + b = a + (-b) = a - b$; $a + b = b + (-a) = b - a$; & $a - b = a + (-b) = -(-a) + (-b) = - \times \overline{(-a) - (-b)} = - \times \overline{b + (-a)} = - \times \overline{b + a} = - b - a$. Quibus manifeſte evincitur tam $\pm(a - b)$, quam $\pm(a + b)$ & additionem poſitivam vel negativam, & differentiam poſitivam vel negativam quantitatum indicare, prout punctum originis hinc inde medium, vel in ſingulis extremis a varia formulæ modificatione transfertur. Quæ tamen æquationes omnes cum a calculo communi neceſſario profluant, nec ratio præcipua ſuppetat cur univerſim loquendo una alteri potius ſit anteponenda, omnes mehercule probandæ ſunt, ac ex varia ratione, qua in ſubducendis calculis ejus origo deducitur, ut infra videbimus, una pro altera eſt uſurpanda.

§. 40. Hiſce explicatis tandem ad communem omnium Analyſtarum doctrinam de *ſubtractione* in Riccatianis placitis contentam, & a me §. 32. ipſiſſimis Auctoris verbis expoſitam, paucis excutiendam accedamus. Ac primum concedo & ipſe libens, quantitatum ſimplicium in origine poſitivarum ſubtractionem ſigno — quantitatibus ſubtrahendis præpoſito deſignandam eſſe, ita ut ſi b velis ab a ſubtrahere, ſcribas $a - b$, quo in caſu differentia harum duarum quantitatum oſtenditur. At hujuſmodi formula $a - b$ nullamne aliam, quam differentiam harum quantitatum mente a nobis conceptam (ipſa rei natura cogente & humanum arbitrium reſpuente) notionem nobis præbet? Ex demonſtratis fidentiſſime me pronuntiare poſſe credo datam $a - b$ non ſolum differentiam duarum quantitatum in origine poſitivarum exhibere, ſed etiam additionem duarum quantitatum $(+a)$ in origine poſitivæ, & $+(-b)$ in origine negativæ, ſive in directum ſumptæ e parte contraria ipſius a, puncto inter utramque interjacente.

§. 41. Determinata igitur prius natura & poſitione linearum, vera eſt quam tradit doctrinam Clar. Auctor. Sed cum hujuſmodi formulæ, non arbitrio ſed neceſſitate calculi ſubducti (qui variis modis, ut vidimus, linearum poſitionem, atque puncta comparationis, nec non conſtructionem mutare poteſt), variam & ambiguam ſignificationem præbere poſſint; non uno hoc tantum modo, quem nunc paſſim docent, ſunt intelligendæ; ne vim Analyſi, & Geometriæ inferamus. Poſita (ut hoc etiam utar exemplo) b pecunia, quam habet quis in bonis, & $(-a)$ ære alieno, quo gravatur alter; $b - a$ poteſt præter ſubtractionem ſignificare totam pecuniam, quam habet primus, & quam debet alter, quo in caſu $b - a = b + (-a)$, ſive $(b + a)$ abſtracte ſumpta ſine ſigno: quæ ſi in bonorum numero collocetur, erit $b + (-a) = b + a$, & ſi referatur ad debita, erit $-a + b = -a - (-b) = -a - b$. En igitur in hoc exemplo diverſi comparationis termini: qui ſi geometrice conſtruantur, ſunt tamquam diverſa puncta, ad quæ lineæ in conſtructione referri poſſunt, quibus natura & poſitio quantitatis mutantur. Abſurditas igitur tota, quæ mihi ex ratione a communi diverſa, qua formulas effero, ex-

exprobratur, ex eo tantum oritur quod ſcilicet prius determinatur abſolute & uno tantum modo ex. gr. $b - a$, quæ pluribus poteſt: quæ ſi ſemper ſit ſubtractio, non poteſt eſſe additio poſitiva, vel negativa. At abſurditas hæc eſt in poſitione arbitrio facta, quæ damnanda eſt, non veritas æquationis tam aperte a geometrica conſtructione firmata. Hoc ita verum eſt, ut ſi exemplum quantitatis naturæ diverſæ ſubtrahendæ ab alia, puta negativæ $-a$ a poſitiva b ſumamus (de quo nullum verbum Auctor) communem methodum ſequuti, inveniemus $b - (-a) = b + a$: ac proinde ſubtractio hæc cum additione confunditur; cum tamen vere & proprie loquendo ſit in hoc caſu $b - (-a) = b - (+a) = b - a$; quemadmodum ſuperius ſæpe diximus. Verum eſt etiam quod aſſerit Auctor additionem quantitatis $-a$ cum $-a$ ſummam dare $= -2a$: at hic multum refert animadvertere, utrum integra accipiatur $-2a$, nullo interjecto conſtanti puncto diviſa, an in partes puncto medio conſtanti diviſa; quemadmodum §§. 11, 36, 37, & 38. ſatis, ut arbitror, declararunt.

§. 42. Ut vero ſuperiorum formularum ambiguitatis cauſam, ad conciliandam dictis fidem, attingamus; non dubito quin quilibet (ſi recte animum advertat) in eo poſitam fateatur, quod linea A B (*fig. 9.*) puncto dato C interpoſito, ancipitem fluentium, a quibus gignitur, originem neceſſario præſeferat. Vel enim a fluxione unius tantum puncti, vel a duobus ſimul punctis fluentibus oriri poteſt: vidimus enim §. *61*. Cap. I. in utroque caſu eamdem lineam produci. In primo ex. gr. $a - a$ ſemper æqualis zero. Cum enim punctum ſolitarium (quoquoverſum initio inſtituat iter per poſitivam, vel negativam plagam incedendo) nequeat in oppoſitam directionem recta inſiſtens transferri (dummodo ipſius iter intra finiti limites concludatur, ut §. *46*. Cap. I. monuimus); ut id conſequatur, regrediatur oportet converſo itinere per viam primo emenſam, ut confectum jam in prima directione iter aut ex parte aut omnino imminuat: quin etiam primum originis punctum, a quo diſceſſit, prætergrediatur. Quare ſemper, uno tantum puncto fluente, $a - a$ ſumenda eſt ut differentia æqualis zero; $a - b$ differentia poſitiva, ſi $b < a$; negativa, ſi $b > a$. Verum ſi concipiamus (ut accidere poſſe vidimus) duo puncta ſimul eodem tempore a puncto C oppoſitis directionibus egredi; vel duo A, B ſimul adverſis frontibus concurrere (quo in caſu una reſpectu alterius directionis negativa eſt); via ab utriſque percurſa non a differentia, ſed ab utriuſque viæ additione poſitiva, vel negativa metienda eſt: idem enim eſſet, ac ſi uno manente puncto, alterum ſpatium totum conficeret. Hinc in hoc caſu $a - a = \pm 2a$, &c.

§. 43. Illud inſuper maximi momenti in re, de qua agimus, ex hiſce eruitur: aliud ſcilicet eſſe $a = -1 \,.\, -1 \,.\, a$, & $-a = -1 \,.\, a$; & aliud $a = -(-a)$, & $-a = -(+a)$; licet hucuſque communem methodum ſequuti promiſcue ſingula pro ſingulis paſſim nullo diſcrimine uſurpemus. Tamen hæc toto cælo inter ſe diſtare comperiemus, ſi ad ea, quæ §§. 23, & ſeqq. dixi, diligenter attendentes noſcamus $-1 \,.\, -1 \,.\, a$, licet ſpectemus $= a$, tamen eſſe productum trium dimenſionum ortum a quadrato unitatis in a ductam, & $-a = -1 \,.\, a$ duarum dimenſionum productum: quo

quo modo a natura ad naturam, a genere ad genus tranſitum incaute facimus; nec huic malo remedium ferre poſſumus, niſi ad ea, quæ §§. 4, & ſeqq. dixi confugiamus, ut quantitas a nullam in dimenſione mutationem patiatur. At $a = -(-a)$, intacta manente prima dimenſione, nihil aliud ſignificat, niſi aut duplicem inverſionem ejuſdem lineæ A B, aut unam ejuſdem lineæ, alteram lineæ ſui æqualis. Ita ſumpta primo $a =$ A B (*fig. 6.*), erit $a = -(-a)$ $= -(-$ A B $) = -($ B A $) =$ A B; vel $a = -(-a) = -$ A b $=$ b A: quo tranſitus fit ab una ad alteram lineam ejuſdem quidem valoris, non vero poſitionis, nec identitatis. Item $-a = -$ A B $= +($ A b $)$: ex quibus deſcendunt æquationes, de quibus §. 37. mentionem fecimus.

§. 44. Ne igitur impoſterum in errorem labamur, & fallacibus impliciti calculis veritatem tunc deſeramus, cum maxime ſequi credimus; hæc inter ſe probe diſtinguenda ſunt. Ac quamvis etiam utriſque, re bene cognita, ad id quod tradimus, inoffenſo pede liceat pervenire; tamen hoc nondum factum eſſe inferius magis patebit. Itaque impoſterum pro re nata ſemper caute diſtinguam $(+a)$, (a), $-(-a)$, & $+(-a)$, $-(+a)$; & hanc diverſam efferendi formulas vel lineas rationem nomine *inverſionis* ejuſdem, vel alterius lineæ ſemper indicabo: ita ut $-(-a)$ deſignet duplicem *inverſionem* eſſe actu inſtituendam, quæ ſi una inſtituatur, erit $-(-a) = -(+a)$, vel $+(-a)$; qua æquatione nihil aliud ſignificari volo niſi quod ex duplici *inverſione* facienda indicata a formula $-(-a)$, una tantum actu facta fuerit: at $-(-a) = a$ operationem hanc duplicem actu perfectam ſignificat.

§. 45. Quare ex una tantum actu effecta *inverſione*, a qua orta eſt æquatio ſuperior $-(-a) = +(-a) = -(+a)$, deſcendent æquationes (I^a.) $- = +$; (II^a.) $-(-a) = -(+a)$, ſive $-a = a$; (III^a.) $+(-a) = -(+a)$; (IV^a.) $+ = -$; (V^a.) $-a = +a$. Formula $-(-a)$ indicat *inverſionem* actu faciendam; at duplici modo fieri poteſt prima *inverſio*. Vel enim eſt $-(-a) = -(+a)$; & tunc deſignat quantitatem poſitivam negative ſumendam: vel $-(-a) = +(-a)$; & tunc indicat quantitatem negativam in origine ſumendam, quæ differt poſitione a prima, nec eſt ipſi *identica*, ſed *æqualis*. Quæ tamen omnes æquationes legitimæ ſunt. Nam (I^a.) $- = +$; ſive $-1 = +1$, ſive $+(-1) = (+1)$: ſignificat inverſionem abſtracte ſumptam poſitivi cum negativo, ut quod in primo erat negativum, fiat poſitivum in ſecundo, & viceverſa: (II^a.) $-(-a) = -(+a)$ oſtendit, intacta manente poſitivorum & negativorum primo ſumpta plaga, invertendam eſſe peculiarem lineam (a), poſitiva pro negativa accepta & viceverſa. (III^a.) tandem $+(-a) = -(+a)$ utrumque inverſum, tam plagam ſcilicet, quam quantitatem; quo facto omnia in priſtinum ſtatum revertuntur. Hinc illæ omnes æquationes deſcendunt, quas ego non nova, & abſurda comminiſcendo, ſed vetera fide ſequutus, ac legitime interpretatus, a communi methodo neceſſario profluere in meis editis Opuſculis demonſtravi.

§. 46. Hoc etiam ex dictis neceſſario profluens eſt probe notandum; quod ſcilicet etiamſi $a = -(-a)$; & $-a = +(-a) = -(+a)$; tamen in æquatione $+a = -(-a)$ ſignum in primo membro afficit quantitatem a, quæ eſt poſitiva origine: at in ſecundo membro $-(-a)$, $-a$ eſt origine negativa: itaque ſecundum ſignum tantum afficit quantitatem, non vero primum, quod ſemper negativum cenſendum eſt; indicat enim accipiendam eſſe quantitatem $-a$ inverſo modo, quo eſt. Quare ad quamcumque poteſtatem elevetur $-a$, hæc ipſa tantum, non ſignum externum, ad poteſtatem datam elevanda eſt: tunc enim afficeret quantitatem, non vero indicium eſſet *inverſionis* quantitatis. Ita in $-a = -(+a)$ primum membrum in hoc differt a ſecundo, quod in primo eſt $-a$ origine negativa, ſignumque $-$ afficit ipſam quantitatem; in ſecundo quantitas $+a$ eſt origine poſitiva, nec afficitur ſigno $-$, ſed tantum indicatur $+a$ eſſe *inverſo* modo accipiendam. In primo caſu elevata $-a$ ad poteſtatem integram, vel fractam, ſignum mutat, prout requirit index poteſtatis: in ſecundo caſu quantitati ad poteſtatem actu elevatæ ſemper ſignum $-$ præfigendum eſt. Eadem ratione in communi methodo cum ſit $-a = -1 . + a$; in ſecundo membro ſignum $-$ non afficit quantitatem, quæ ſemper poſitiva eſt, ſed unitatem, quæ proinde ſemper negativa eſt ſumenda, & ejuſdem dimenſionis, ſcilicet dimenſionis zero, ne, ut dixi, a genere ad genus incaute deferamur.

§. 47. Ut vero communi methodo rite intellecta evidentiſſime demonſtremus hanc maximi momenti veritatem ſuperioribus, ac præcipue poſtremis §§. indicatam: accipiamus æquationem ab Analyſtis paſſim uſurpatam $a = -1 . -1 . a$, atque ab omnibus probatam, licet ſecundum membrum ſit (ita expreſſa formula) trium dimenſionum (quæ tamen ut omnia cohæreant, quomodo efferenda ſit, modo dicam): atque ad poteſtates numeris naturalibus expreſſas ſingula hujuſce æquationis membra ſingillatim elevemus, ut ſit

$$a = (-1)^2 . a$$
$$a^2 = (-1)^4 . a^2$$
$$a^3 = (-1)^6 . a^3$$
$$a^4 = (-1)^8 . a^4$$
$$\&c. = \&c.$$

Patet dimenſiones cujuſcumque primi membri ad ſingulas poteſtates elevati repræſentari a ſerie numerorum naturalium

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots\ldots \&c.$$

dimenſiones vero cujuſcumque ſecundi membri, computatis unitatis dimenſionibus, a ſerie

$$3, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 \ldots \&c.$$

ſive a ſerie

$$1+2, 2+4, 3+6, 4+8, 5+10, 6+12, 7+14 \ldots \&c.$$

Ita-

Itaque dimenſiones ſecundæ ſeriei ſuperant dimenſiones primæ per ſeriem

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \ldots \&c.$$

a qua dimenſiones unitatis exprimuntur. Ut igitur dimenſiones ſinguli ſecundi membri non excedant dimenſiones primorum membrorum ſibi invicem reſpondentium, niſi duplici dimenſione, qua $(-1)^2 . a$ excedit primum membrum a, neceſſe eſt ut a ſingulis ſecundis membris tot dimenſiones unitatis ſubtrahantur, quot ſufficiunt ad unitatem in ſingulis ſecundis membris duplici tantum dimenſione, donandam. Quare erit

$$a = (-1)^2 . a = (-1)^2 . a$$
$$a^2 = (-1)^{4-2} . a^2 = (-1)^2 . a^2$$
$$a^3 = (-1)^{6-4} . a^3 = (-1)^2 . a^3$$
$$a^4 = (-1)^{8-6} . a^4 = (-1)^2 . a^4$$
$$\&c. = \&c. = \&c.$$

quo artificio dimenſiones cujuſque ſecundi membri non niſi per $(-1)^2$ dimenſionem primi ſibi reſpondentis ſuperant.

§. 48. At ſemper hoc modo inter ſe comparantur quantitates heterogeneæ, uti linea cum ſuperficie, quadratum cum quarta poteſtate, &c. contra prima Geometriæ principia. Ut igitur omnia perfecte congruant, ac utrimque dimenſiones æquentur, ne tranſitum a genere ad genus faciamus; ad eam, quam §. 44. indicavi, *inverſionem* confugiamus oportet; qua fit $-1 . -1 = -(-)$ (ſigna minus — ſolitaria applicanda quantitati); ita ut ſit

$$a = -(-a)$$
$$a^2 = -(-a^2)$$
$$a^3 = -(-a^3)$$
$$a^4 = -(-a^4)$$
$$\&c. = \&c.$$

qui ſcribendi modus duplicem *inverſionem* faciendam eſſe jubet: quo facto æquationes §. 37. inverſæ deſcendunt. Si enim aut dividamus ſingula per $(-1)^2$, aut ponamus $(-1)^2 = (-1)^{2-2} = (-1)^0$, & communem methodum ſequuti velimus $(-1)^0 = 1$, ſemper ſingula ſecunda membra ſuperabunt dimenſione ſua reſpectiva prima membra. Ne igitur dimenſiones mutentur, facta (*fig. 9.*) A B $= a$; & actu peracta duplici inverſione lineæ A B, erit

$a =$

$$a = -(-AB) = -(BA) = AB.$$
$$a^2 = -(-AB)^2 = -(\overline{BA}^2) = \overline{AB}^2.$$
$$a^3 = -(-AB)^3 = -(\overline{BA}^3) = \overline{AB}^3.$$
$$a^4 = -(-AB)^4 = -(\overline{BA}^4) = \overline{AB}^4.$$

ita ut ſignum — præfixum quadrato, cubo, &c. nihil aliud ſignificet, niſi inverſionem figuræ faciendam eo modo quo invertitur linea AB: in hoc caſu tamen idem eſſet (nulla habita ratione, niſi ad poſitivum) ac ſi nulla facta fuiſſet figuræ inverſio. Profecto nullo alio modo omnia & in quantitate, & in dimenſione ſibi invicem perfecte congruere poſſe cognoſces: & in hoc tacite, ſed nullo conſilio, recidunt Analyticæ operationes, quibus promiſcue fit $a = -1 \,.\, -1 \,.\, a = 1^2 \,.\, a = 1 \,.\, a = a$; quo in caſu nullus quidem error in poſitivis ſubrepit, qui tamen maximus in ea, quæ modo dicam, nullo advertente irrepſit.

§. 49. Nam conciliata, quoad omnia ſuperiorum membrorum, perfecta æqualitate, tranſeamus modo ad æquationem $-a = -1 \,.\, a$ paſſim ab omnibus receptam; quæ tamen ſic elata, poſito primo membro unius dimenſionis, ſecundum duplicis dimenſionis conſtituit. Hîc, ut ſupra, erit

$$(-a) = -1 \,.\, a$$
$$(-a)^2 = (-1)^2 \,.\, a^2$$
$$(-a)^3 = (-1)^3 \,.\, a^3$$
$$(-a)^4 = (-1)^4 \,.\, a^4$$
&c. = &c.

& dimenſiones ſeriei primorum membrorum dabunt ſeriem

1, 2, 3, 4, 5, ... &c.

dimenſiones ſecundæ

2, 4, 6, 8, 10 . . . . &c.

ſive 1 + 1, 2 + 2, 3 + 3, 4 + 4 . . . &c.

& dimenſiones unitatis procedent in ſerie numerorum

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . &c.

Ut igitur ſingula ſecunda membra, quemadmodum ſuperius fecimus, non ſuperent ſua reſpective prima niſi una tantum dimenſione; neceſſe eſt dimenſionibus opportunis exponentem unitatis deprimere, ut docet ultima ſeries: quo facto erit

(— *a*)

$$
\begin{array}{lclcl}
(-a) & = & -1\,.\,a & = & -1\,.\,a \\
(-a)^{2} & = & (-1)^{2-1}\,.\,a^{2} & = & (-1)\,.\,a^{2} \\
(-a)^{3} & = & (-1)^{3-2}\,.\,a^{3} & = & (-1)\,.\,a^{3} \\
(-a)^{4} & = & (-1)^{4-3}\,.\,a^{4} & = & (-1)\,.\,a^{4} \\
\&c. & = & \&c. & = & \&c.
\end{array}
$$

at hîc ſemper ſecunda membra una dimenſione ſuperabunt prima. Quare ut omnia & in dimenſione, & in quantitate perfecte congruant, confugiendum eſt ad meam formulam $-a = -(+a)$ §. 45; ita ut unitas expungatur, ac ſignum ſolitarium $-$ $(+)$ quantitati præfigendum ſumatur, ac intelligatur $-a$ eſſe idem, ac A B origine poſitiva inverſo modo ſumenda.

§. 50. At hoc modo elata ſecunda membra docent

$$
\begin{array}{l}
(-a) = -(+a) \\
(-a)^{2} = -(+a)^{2} \\
(-a)^{3} = -(+a)^{3} \\
(-a)^{4} = -(+a)^{4}
\end{array}
$$

quæ cum in ceteris inter ſe conveniant, differunt ſigno in poteſtatibus paribus: omnia enim prima membra poteſtatis paris poſitiva ſunt, cum e contra in ſecundis ſemper tam poteſtates pares, quam impares negativæ ſint. Primo modo (quod eſt uſitatum) perpetua viciſſitudine a negativis ad poſitiva alternatim deferimur: ſecundo ſemper in eadem poſitione fluxu continuo detinemur: nimirum, quemadmodum animadverti §. 46. in $-(+a)$ ſignum $-$ a quantitate a eſt ſeparandum, ac intactum ſervandum, & applicandum quantitati $(+a)$, quamcumque ipſa ſubeat mutationem: verbo ſignum $-$ ſolitarium cenſendum eſt, nec quantitas, ſed modus abſtractus, quo affici poteſt quantitas quæcumque; quod proinde ad nullam evehi poteſt poteſtatem: quid enim erit $(-)^{m}$, niſi ſit ipſum $-$? Aliter quænam differentia intercedat inter diverſas ipſius potentias libenter diſcere cupiam. Quod ſi in ſuperioribus ultimis formulis actu eam *inverſionem*, quemadmodum innui, a calculo indicatam faciamus, ſtatim ad omnia poſitiva transferimur.

§. 51. Ex hiſce tamen duobus modis, quibus licet efferre quantitatem $-a$, ſcilicet $(-a)$, & $-(+a)$, primo tantum modo nititur Calculus communis, qui quantitatem $-a$ origine negativam non niſi $-1\,.\,a$ adæquat, neglecta prorſus ſecunda a me tradita ratione. Et tamen ſignum $-$ quantitati præfixum duplici hoc ſenſu accipiendum eſſe docent omnes Analyſtæ, qui hoc ſigno vel quantitatem origine negativam, vel quantitatem poſitivam ab altera ſubtractam ſignificare poſſe aſſeverant. Ex hoc etiam fonte magnæ illæ inter

pri-

primos Mathematicos diſſenſiones, præcipue in imaginariis, & in Curvarum ramis determinandis, nondum compoſitæ manarunt: cum ſecundo a me invento modo manifeſte pateat imaginaria non eſſe niſi relativa, & exiſtente ramo poſitivo, neceſſario admittendam negativi rami exiſtentiam; ut ſuo loco palam fiet.

§. 52. Hinc illud etiam non minoris momenti conſequitur, ſcilicet $(+ 1)^0$ vere ac proprie eſſe poſſe $= +$; & $(- 1)^0 = -$, quibus ſigna tantum ſolitaria quantitatibus præfigenda, non quantitates indicantur. Cum e contra in communi calculo facta $- a = - 1 . a$, ſi ex. gr. ſumas $(- a)^3 = (- 1)^3 . a^3$; quantitatem trium dimenſionum cum quantitate ſex dimenſionum compares neceſſe eſt: quod quantum cum veritate, & cum primis Geometriæ principiis conveniat, ipſi viderint qui hæc aſſerere non dubitant. Quod ſi velis, quemadmodum fit, $(- 1)^3 = - 1$ unius dimenſionis, primo quod erat trium dimenſionum ad unam dimenſionem arbitrio deprimis: ſemper tamen in una dimenſione errorem reperies. Quod ſi contendas eſſe $(- a)^m = (- 1)^{m - m} . a^m$, licet exponente pari ſigna utrimque æquentur; cum tamen velis $(- 1)^0 = 1$, ſemper a negativis ad poſitiva dimenſione majora deſcendes. Velis igitur nolis, numquam omnia exacte cum veritate conciliabis, niſi in meam deſcendas ſententiam, ſcilicet $- (+ a)$ in hoc differre a $(- a)$, quod in primo caſu ſignum $-$ cum non afficiat quantitatem, ſemper ſeparandum ſit ab ipſa, atque ipſi poſtea applicandum ad poteſtatem quamcumque evectæ; cum nihil aliud indicet, niſi quantitatem vel ſemper negative ſumendam, vel inverſo modo, ac ſeſe offert, accipiendam: at $(- a)$ negative in origine ſumpta ſigno $\pm$ afficienda eſt, prout calculi ſubducendi requirunt. Hinc neceſſario (juvat enim hoc ſæpius repetere) in illas æquationes a me commemoratas incidimus.

§. 53. Sed ut magis magiſque conſtet in Calculo communi impedimentis ubique implicato remedio opus eſſe ut tandem expediatur; mecum velim conſideres, quod facta $a = - 1 . - 1 . a$, & $- a = - 1 . a$, ſi eſt $a^2 = (- 1)^4 . a^2$, & $(- a)^2 = (- 1)^2 . a^2$; erit etiam $(- 1)^4 . a^2 = (- 1)^2 . a^2$, atque $(- 1)^4 = (- 1)^2$, ſcilicet poteſtas $(- 1)$ quarta æquális ſecundæ poteſtati ipſius $(- 1)$, ut primum membrum $(- 1)^4 . a^2$ ſit ejuſdem dimenſionis ac ſecundum $(- 1)^2 . a^2$: cum primum membrum ſit ſextæ dimenſionis, ſecundum quartæ. Ut igitur æquatio ad eamdem dimenſionem reducatur, fiat $(- 1) = (- 1)^{\frac{2}{4}} = \pm (- 1)^{\frac{1}{2}}$ ut ſit $(- 1) . a^2 = \pm \sqrt{-1} . a^2 = \sqrt{-1} . \pm a^2$, cujus ſingula membra ſunt ejuſdem dimenſionis: nam $\sqrt{-1}$ cenſenda eſt linearis, ſive unius dimenſionis, hoc eſt reale æquale imaginario: nec mirum. Poſuimus enim unitatem ad quartam poteſtatem evectam æquari unitati ad quadratum elevatæ, quæ

qui-

quidem licet quantitate æquari inter ſe videantur, non tamen æquantur dimenſione: proindeque quantitates heterogeneæ inter ſe comparantur. Verum ſumpta $(-1).a^2 = \sqrt{-1}.\pm a^2$, erit $a^2 = \frac{\sqrt{-1}}{-1}.\pm a^2$: & quoniam ex æquatione $(-1)^4 = (-1)^2$ deduximus $-1 = \pm\sqrt{-1}$, erit $\frac{\sqrt{-1}}{-1} = \pm$; quod in ſuperiori ſubſtitutum dat $a^2 = \pm a^2$: quo artificio quod erat exlex, corrigitur atque emendatur. Totum vero hoc, ambagibus omnibus evitatis, ex mea methodo aperte ſe prodit: ſi enim in æquatione $(-1)^4.(a)^2 = (-1)^2.a^2$ ponamus ſignum $-$ non afficere quantitatem; inveniemus $-a^2 = +(-a)^2 = +(a)^2$; ſive $a^2 = \pm a^2$, quemadmodum §. 37. oſtendi. Hinc facile deducitur in æquatione ſuperiori communi methodo inventa $a^2 = \frac{\sqrt{-1}}{-1}.\pm a^2$, ſi ponamus $\frac{\sqrt{-1}}{-1} = \left(\frac{\sqrt{-1}}{-1}\right)^0$, cum revera ſit nullius dimenſionis, omnia ad normam reduci.

§. 54. Quare illud pro certo ſtatuendum in communi methodo, qua fit $a = -1.-1.a$, & $-a = -1.a$ ſemper multiplicatione a genere ad genus tranſitum fieri, quo perpetuis difficultatibus implicamur: quæ tamen tolli non poſſunt niſi diviſione, regrediendo unde diſceſſimus. Hinc æquationes illæ in meis Opuſculis indicatæ, ſi communem methodum ſequamur, neceſſario ſunt admittendæ, ut res in integrum reſtituatur: quemadmodum magis magiſque impoſterum palam fiet.

§. 55. Interim illud præterire nullo modo poſſum, tunc ſcilicet æquationem $(-1)^4.a^2 = (-1)^2.a^2$ nullam aut repugnantiam, aut difficultatem præſeferre, cum (ea quæ §. 23. diximus in memoriam revocantes) tam $(-1)^4$, quam $(-1)^2$ non ut poteſtates unitatis, ſed ut numeros, ſive coeficientes quantitati a^2 hinc inde præfixos conſideremus. Quemadmodum enim illic oſtendimus a^2 non ſemper eſſe quadratum, ſed ſignificare etiam poſſe numerum aa coeficientis vicem gerentem, quo indicatur quot vicibus ſumenda ſit quantitas, cui præponitur; ita $(-1)^4 = -1.-1.-1.-1 = 1$, vel $= -1.1.1.1 = -1 = -1.-1 = -1.1 = \pm 1$; quo tamquam coeficiente indicatur ſingula membra una vice ſumenda eſſe vel poſitiva, vel negativa, ut ſit $\pm a^2 = 1.\pm a^2$. Hinc etiam ſemper magis confirmatur mea ſententia §. 50. indicata de ſignis $+$, $-$ affigendis quantitati cuicumque, ſolitarie & abſtracte ſumendis.

§. 56. At dicet fortaſſe quiſpiam: ſi hæc, quæ comminiſceris, vera ſint, jam perpetuo ab Analyſi imaginarium illud exulabit, quod fruſtra eliminare prima Mathematicorum ingenia tentarunt. Quid ni? Non me latet quoſdam, qui ab imaginariis analyticum opus ſæpius infici perpetuis querimoniis dolebant, ac

magnifice ſe jactabant quoties illud in peculiari aliquo caſu expungere contigerat, nunc mutata opinione mihi univerſim hoc audenti non animos non vires addere, ſed nervis omnibus contra obniti, nihilque intentatum relinquere, ut magnis excidam auſis. Equidem fateor non levia eſſe quæ aggredior, & fruſtra ab aliis quæſita: ſed iſtorum pace dicam eſſe perpendendum non quid factum hucuſque & a quibus fuerit, ſed quid & quibus inuſitatis modis fieri poſſe quis aſſerat: nec nova quærenti viam nondum tentatam jure injuria intercludendam, eo ſolum nomine, quod numquam ab ipſis tentata fuerit. Profecto ſtat Geometria univerſa ſine imaginariis; nomenque hoc, cujus nonniſi a Recentiorum Analyſi notionem accepimus, ignotum in tota antiquitate nihil negotii Veteribus faceſſere ſatis compertum eſt. Non video igitur cur repugnet in hac qua utimur Analyſi, quæ vere Geometria univerſalior appellari poteſt, ſimile quidpiam ſperare, atque audere: atque eo magis (ut paucis innuam), quod in Geometria promiſcue, ſi recte advertas, tam ex. gr. A B, quam B A nullo diſcrimine adhibetur; & tamen in Analyſi facta $AB = a$ dicitur $BA = -a$; at ſi in Geometria tam $\sqrt{AB}$, quam $\sqrt{BA}$ indiſcriminatim aliquid reale ſemper ſignificat, quomodo in Analyſi $\sqrt{-a}$ poterit eſſe natura ſua & abſolute imaginarium & abſurdum? Ne tamen putes hoc conſilio a me id fieri, ut tamquam exitiale aliquod monſtrum ab Analyſi imaginarium hoc perpetuo depulſum velim. Depelli poſſet quidem, ut in tota hac Prima Parte a me factum vides: ſed non præſtat. Explorata enim tandem vera imaginarii natura, horrore eo atque abſurditate qua ſe offerebat, tandem in Altera Parte illud exuere conabor; ac demonſtrabo quam mirifice totius Analyſeos commodo atque utilitati ipſum inſervire probe notum aliquando poſſit.

§. 57. Vide igitur in ipſo ſtatim limine quam longiſſime vis Analyſeos ſuperet mentis noſtræ imbecillitatem atque anguſtiam: quo numquam animadverſo, anguſtiſſimis ſane limitibus id, quod nullis certis terminis definiri poteſt, concluſum eſt. Hinc gravia illa in ipſo hujus Scientiæ veſtibulo impedimenta, quibus omnes & ſingulæ Analyſeos partes obſtructæ nimium principiis notis fidentes Analyſtas maximis difficultatibus implicarunt: ut ſequentia magis oſtendent.

CA-

CAPUT III.

De Æquationibus linearibus limitis, ac de duplici earum Syſtemate.

§. 1. QUæ a me ſuperius tradita ſunt, manifeſte oſtendunt infinitam prorſus indeterminationem, quam habet Analyſis cum a varia ratione componendi atque efferendi formulas, tum in ſymbolis quibus utitur, & in ſignis $\pm$, quæ aut quantitatibus præfiguntur, aut exponentibus ipſis ſuffiguntur; ut minime mirum videri debeat, ſi ex una tantum formula varie accepta, ac multiplicibus artificiis, & legitimis ſubſtitutionibus in aliam mutata formam, tot inde oriri poſſint affectiones, quæ inter ſe toto cœlo diſtantes, nullo affinitatis vinculo conjungi poſſe videntur. Nunc ſenſim docendum quibus modis, & quantum liceat Scientiam hanc, quæ nullo determinato limite natura ſua continetur, intra finiti terminos coercere: ex quo illud etiam mirabilius patebit, ſcilicet quamquam nihil in hac Scientia neceſſario finiatur, tamen quæ magis ſimplicia ac determinata videntur, majori indeterminationi obnoxia eſſe, ac, ut aliquo modo arctius definiantur, confugiendum eſſe ad ea, quæ magis compoſita judicantur: quod enim pluribus conditionibus uno eodemque tempore ſatisfacere cogitur, eo magis compoſitione ipſa determinatur. Quod ut palam fiat, ad rem propius accedens initium ſumo tam ab æquationibus indeterminatis duarum variabilium, quam ab iis, quæ dicuntur determinatæ primi gradus, quæ ut ſimpliciſſimæ, ita datis limitibus circumſcriptæ cenſentur.

§. 2. Licet vero nihil facilius, nihilque magis cognitum, atque abſolutum in tota Analyſi videatur, quam ſolutio æquationum primi gradus: tamen (quis crederet?) ex earum natura non ſatis bene explorata, atque cognita primam mali labem, quæ totam Analyſim turbavit, infecitque, repetendam eſſe demonſtrare aggredior. Juvat tamen prius methodum, quam unam habent docentque Analyſtæ ad perfectam æquationum determinatarum primi gradus ſolutionem obtinendam, verbis ipſius Celeberrimi Com. Vincentii Riccati in Lib. I. Cap. IV. ſuarum Inſtitut. §. 10. hic proferre. Methodus hæc eſt: „ ut ſcilicet termini „ omnes, qui incognitam ipſam continent, ex una ſigni æqualitatis parte repe„ riantur, ex altera vero reliqui omnes, qui illa carent: hoc facile obtinebi„ tur, transferendo, cum opus fuerit, terminos ex una parte ad aliam ſignis „ mutatis; quod idem eſſe atque demere, vel addere quantitatem eamdem utri„ que æquationis membro, ex algorithmo ſatis conſtare poteſt. Hoc poſito, ſi „ incognita vel ſit multiplicata, vel diviſa per aliquam quantitatem, per eam „ tota æquatio erit vel dividenda, vel multiplicanda: ita procul dubio efficie„ mus, ut unum membrum ſolam habeat incognitam, alterum quantitates no„ tas, quæ incognitæ valorem oſtendent. „ Hæc eſt methodus univerſalis, &

una ab omnibus, quotque fuerunt quotque ſunt, Analyſtis in ſolutione æquationum primi gradus hucuſque uſurpata. Videamus modo quid, & quantum adhuc, meo quidem judicio, deſit ad hanc, quæ abſoluta dicitur, omnino abſolvendam.

§. 3. Antequam tamen ad rem veniamus, multum intereſt obſervare, nos (cum a Carteſio primum edocti analytica ad geometrica maximo utriuſque ſcientiæ emolumento traducimus, ac conſtructionibus geometricis quicquid abſtracte quantum eſt oculis ipſis ſubjicimus) nos inquam, ſi recte animadvertamus, nihil aliud agere, quam Scientiam hanc *Algebræ* abſtractiſſimam, atque maxime univerſalem (quippe quæ quantitatem in genere, ſive quicquid augmenti, atque decrementi capax eſt, ut puta velocitates, tempora, ſonos &c. complectitur) ad quantitatem geometricam, ſive linearem, atque ad eas, quæ ex hac deſcendunt, dimenſiones limitare, Geometriæque imperio quodammodo ſubjicere; ita ut Analyſis cum Geometria conſociata non ultra ea principia, quibus Geometria ipſa continetur, procedat, ejuſque affectiones analyticæ naturam quantitatis geometricæ induant. Hinc zero, quod in Analyſi abſtracta privationem cujuſcumque quantitatis in genere ſignificat, in Analyſi Geometriæ applicata privationem alicujus geometricæ quantitatis oſtendit: proindeque punctum induit naturam illius quantitatis geometricæ, cujus eſt aut principium enaſcentis, aut extremum ipſius evaneſcentis; prout ipſa quantitas hujuſce puncti fluxu continuo creſcente genita, vel decreſcente continua diminutione tandem ad nihilum redacta concipitur. Prima igitur, atque ſimpliciſſima quantitas, quam applicatione Analyſeos ad Geometriam Analyſis ipſa exhibet, eſt ipſa linea geometrica, quæ unius tantum dimenſionis concipitur, quoniam nulla ſimplicior quantitas in Geometria (ſi punctum excipias tamquam principium vel terminum dimenſionis) præter lineam excogitari poteſt. Analyſis igitur Geometriæ conſociata ab affectionibus geometricis ita pendet, ut tertia quodammodo Scientia inde exſurgat, quæ appoſite dici poteſt *Analyſis geometrica*, ab Analyſi abſtracte ſumpta, & ab ipſa Geometria proprie dicta multum diverſa, quibuſdam tamen utriuſque legibus obnoxia. Analyſis enim geometrica nihil aliud eſt, niſi artificium in Geometriæ ſubſidium inventum, ut per calculorum analyticorum ad geometrica traductionem facilius atque plenius quid ipſa Geometria doceat, aſſequamur.

§. 4. In hac igitur quodammodo tertia Scientia Analyſis tamquam univerſalior primum locum teneat oportet: hæc enim ſuorum artificiorum ope Geometriam ipſam longius profert, atque varia analyticarum formularum modificatione, variaque quantitatum æqualium ſubſtitutione ab una ad alteram conſtructionem, ab una ad alteram curvam nos veluti manu ducit: dummodo affectioni analyticæ ſemper intenti Geometriam huic ſubſervire jubeamus. Verum ſi attentius methodum, quæ nunc in uſu eſt in tractanda hujuſmodi Scientia, expendamus, noverimus Analyſtas contraria via hactenus inceſſiſſe: non enim ſemper Geometriam Analyſi, ſed Analyſim Geometriæ ita alligant, ut quod conſtructio ex una tantum formulæ Analyticæ modificatione orta in aliqua arbitrio facta ſuppoſitione reſpuit, extemplo tamquam imaginarium abſolute repellant, minime intelligentes formulam ipſam analyticam primo ſumptam ſi, prout ſuppoſitio ipſa arbitrio facta requirit, modificetur, alteram primæ repugnantem conſtructio-

ctionem neceſſario exhibere. Ex hoc tamen præpoſtero agendi ordine Analyſis ipſa Geometria ſæpe ac ſæpius anguſtior fit: ut minime mirum ſit, ſi perperam doleant Analyſim, quam omnes Geometria univerſaliorem fatentur, ita in arctum compulſam, ut ad extricandas ſuas formulas, eaſque ab imaginariis expurgandas univerſim inepta ab ea ipſa, cui ſuppetias ferre deberet, auxilium ſæpe depoſcere cogatur: quo fit, ut utraque a ſuo fine detorta, non raro una alteri impedimento ſit.

§. 5. Hinc illud conſequitur, ſcilicet fieri poſſe ut, licet in hujuſce Scientiæ uſu nihil contra principia, legeſque Analyſeos abſtractæ, nihil contra ipſa principia ſimplicis Geometriæ peccetur; tamen error aliquis in ipſam applicationem ad Geometriam clam ſubrepat, qui nos de utriuſque ſcientiæ principiorum veritate nihil dubitantes vel in devia ducat, vel graviſſimis difficultatibus implicet, ex non recta veritatis analyticæ cum geometrica conjunctione: licet tam analytica affectio, quam geometrica ſeorſim ad examen revocata, apprime cum veritate conſentiat. Hæc, quæ dico nimis abſtracta, exempli appoſitione declaro. In Analyſi abſtracta unica notio, quam nobis exhibet ſignum — *minus*, quod præfigitur quantitati additæ alteri ſigno + *plus* affectæ, eſt notio quantitatis poſitivæ ſubtrahendæ ab altera poſitiva: atque ideo, ſive literis utamur, ſive numeris, $a - b$, $10 - 5$ nihil aliud niſi ſubtractionem, ſeu differentiam harum quantitatum ſignificat. At ſi affectiones hujuſmodi abſtractas geometricis applicemus, patet (ut vidimus Cap. ſup.) Geometriam natura ſua duplicem ſaltem notionem ſigni — lineis præfixi in mente noſtra excitare. Significat enim vel lineam in origine negativam additam poſitivæ in origine, vel lineam in origine poſitivam ab altera poſitiva ſubducendam: in primo caſu lineæ poſitiva & negativa lineam integram ſibimetipſis æqualem conſtituunt; in ſecundo ſibi ſuperimpoſitæ exhibent differentiam quæ inter ipſas eſt. Porro ſi ex hac duplici notione, quam habet $a - b$, vel $10 - 5$, geometrice conſiderata, illa tantum ſumatur, quam ab Analyſi abſtracta hauſimus, atque ex hac una conſtructionem geometricam concinnemus, quis non videt mancam hanc, ac dimidiatam applicationem Analyſeos ad Geometriam ex duabus geometricis ſolutionibus non niſi unam nobis exhibere? Error tamen hic male applicatæ Analyſeos ad Geometriam, erit error ex defectu; nihil enim abſoni eſt in notione ipſa; erraret tamen quicumque arbitraretur non niſi hanc unam a ſupradicta analytica formula conſtructionem geometricam obtineri poſſe.

§. 6. Huic tamen malo deterius alterum accedit. In formulis enim ſecundæ, aut ſuperioris dimenſionis, in quibus hæc dubia invenitur expreſſio, fieri poteſt ut in ſubducendis calculis, & in transformatione æquationum ope ſubſtitutionum æqualium pro æqualibus, noſmet ita geramus ut operationes, quas revera facimus, quæque tantum alteri notioni a nobis neglectæ conveniunt, tribuamus alteri, quam intelligimus; ac quod proprium eſt tantum additionis, male affigamus ſubtractioni, aut viceverſa: hoc eſt uno eodemque tempore id quod ponimus eſſe ſubtractionem, actu tractemus eo modo ac ſi eſſet additio. Error hic vere poſitivus eſt, & nos inſcientes ad abſurdum ducit: copulamus enim inter ſe quæ, utpote repugnantia, uno eodemque tempore ſimul conciliari non poſſunt. Seorſim ta-

tamen ſingula vera ſunt: veræ & legitimæ calculi operationes abſtracte conſideratæ, ſed non recte intellectæ, & conſtructionibus geometricis male applicatæ. Malum hoc ſane graviſſimum clam in Analyſim geometricam illapſum, quantas clades exciverit Capita ſeqq. evidenter oſtendent. Hic tantum dicam, ab hoc tamquam infecto, ac turbido quodam fonte omnes manare obſcuritates illas, de quibus dolet Clariſſimus Alembertius loco a me citato in nota ad §. 24. Præfat. quæ notiones Analyticas natura ſua limpidiſſimas obſcurarunt, atque contaminarunt: ut hujuſce mali originem aliunde (quemadmodum vult Auctor) fruſtra quæras, quam ab una prava Analyſeos abſtractæ ad Geometriam applicatione.

§. 7. Hiſce præmiſſis, quæ ſemper ante oculos in ſubducendis calculis atque Geometriæ applicandis habenda ſunt, ut tandem ad propoſitum veniamus, datam quantitatem ſimplicem a linea integra finita A B (*fig.* 10) exprimamus. Quiſque videt hanc a duobus punctis datis A, & B terminari: cum vero in hac linea, donec integra ac ſimplex concipitur, nullum aliud, præter hæc duo, punctum datum & fixum ſit, poſſumus lineam hanc A B genitam ſupponere a fluxu puncti ſolitarii A progreſſi in B; vel motu oppoſito a fluxu puncti B in A; vel a duobus ſimul fluxibus ex A & B prorumpentibus, atque eodem tempore ſibi obviam occurrentibus. At ſi non jam genitam quantitatem, ſed fluxum actu excurrentem, a quo gignitur quantitas, concipiamus; cum nullum punctum inter A & B præcipuum, ſive datum determinatum fuerit, fluxus ab A verſus B erit in omnibus punctis intermediis, antequam ad punctum B pertingat, indeterminatus; & quævis portio A C hujuſce fluxus intra puncta A, & B variabilis erit, ac jure optimo notanda ſymbolo x indeterminato. Quæ A C $= x$, donec intra puncta A & B continetur, ita indeterminata eſt, ut determinari nequeat, niſi in duobus extremis punctis, A ante fluxum, quando nulla eſt, vel quando punctum A fluxu ſuo pervenerit in B ab A diſſito diſtantia maxima ac determinata $= a$.

§. 8. Sumpto igitur unico puncto A, ac una variabili x, non niſi initium, aut extremum fluxus determinari poteſt. In primo caſu erit $x = 0$, ſive $x - 0 = 0$; ſed $x = 0$, ergo $0 - 0 = 0$: in ſecundo $x = a$, vel $x - a = 0$; ſed $x = a$, ergo $a - a = 0$, ſive $0 . a = 0$. In utroque tamen caſu promiſcue deſignatur tam punctum A, quam punctum B. Nam $x = 0$ eſt æquatio, qua oſtenditur aut primum originis punctum ipſius x, antequam fluat & ad valorem quantitatis determinatæ a perveniat, aut alterum extremum datum punctum, poſtquam fluxerit. Ab alterutro A, vel B igitur promiſcue originem ſumere poteſt fluxus, & alterutrum punctum ab æquatione $x = 0$ exhiberi. Verum quoniam hujuſmodi fluxus in utroque caſu eamdem A B excurrendo tandem metiri debet: patet directionem fluxus in A oppoſitam eſſe directioni fluxus, cujus origo in B, ut in eodem Syſtemate baſis A B perſiſtamus. Hinc in caſibus intermediis tam A C, quam B C ſumi poteſt $= x$, licet adverſis frontibus concurrant.

§. 9. In ſecundo vero caſu æquationis $x = a$, ſive $x - a = 0$, ſi punctum originis accipiatur in A; & $x = a =$ A B; $x - a = 0$ determinat

nat punctum A : contra vero, ſi punctum originis ponatur in B. At quoniam promiſcue ab altera æquatione $x = 0$ tam punctum A, quam punctum B (uti diximus §. ſuper.) indicatur; $x = 0$ minimæ, in hoc Syſtemate baſis $= AB = a$ ſemper altera maxima $x = a$ reſpondeat neceſſe eſt. Facta igitur permutatione punctorum originis, quæ erat $x = 0$ minima, fit $x = a$ maxima, & viceverſa. Si ſimul igitur ſumantur, erit $0x + x = a$, ſive $0A + x = BA = a$: vel ſumpto originis puncto B, in quo caſu $0x$ primæ fit x in ſecunda, & x primæ fit $0x$ in ſecunda; erit $x + 0x = x + 0B = AB = a$. Idem prorſus eveniet, ſi ſumpto unico puncto originis A fiat $BA = -a$. Nam ſi fiat $-a + x = 0$, eſt hæc $= BA + AB = 0B$: verum poſita primum x in æquatione, erit $x - a = AB + BA = 0A$; quæ æquationes licet quantitate inter ſe æquentur, tamen diverſa originis puncta deſignant atque diverſam fluxus directionem, quæ proinde non ſunt ut identicæ conſiderandæ. Inferius patebit quantum utilitatis ex hac animadverſione in Analyſim redundare poſſit: quæ ſemper neglecta ab Analyſtis prorſus fuit, licet ipſa ſit principium, ac fundamentum Theoriæ ſignorum $\pm$. Interim moneo me impoſterum lineam AB duobus tantum punctis terminatam, & duos fluxus AC, BC, qui a duobus punctis A, & B originem ſumere concipiuntur, in genere nomine *Syſtematis* deſignaturum: quod proinde componitur ex AB, ac duabus AC, BC: at vero AB quæ duas AC, BC complectitur, *baſim Syſtematis*; & AC, BC, quæ ſimul ſumptæ totam baſim adæquant, *partes*, *portiones*, *elementa Syſtematis* appellabo. Inſuper ope notarum ($0AB$), ($0BC$), poſitis A, B punctis datis ac fixis, deſignabo puncta, & fluxuum directiones, ut diſtinguantur a punctis ($0Ab$), ($0Bc$): etenim ($0AB$) non ſolum deſignat punctum A datum, ſed directionem fluxus enaſcentis verſus B, vel evaneſcentis a B in A: puncta vero $0A$, $0B$, vel A, B determinant quidem ſitus, ſive origines fluxuum enaſcentium, ſed non directiones.

§. 10. Hiſce præmiſſis, quoniam (*fig. ead.* 10.) $AC = x$ eſt variabilis, erit etiam BC a puncto fixo B oppoſita directione verſus A progrediente genita & ipſa variabilis; ita tamen, ut creſcente AC decreſcat BC, & viceverſa: variabiles vero $AC + BC$ ſimul ſumptæ totam datam $AB = a$ conſtituunt. Et facta $AB = a$, $AC = x$, erit $BC = a - x$; proindeque æquatio $AC + BC = x + a - x = a$, ſive $x + a - (+x) = a$; quæ, variabili x evaneſcente, membra hinc inde a ſigno æqualitatis dat prorſus & forma & quantitate æqualia; nihilque aliud nos docet, niſi quantitatem a æquari a, quæ quidem æquatio poteſt eſſe identica, ſi utrumque membrum eamdem AB deſignet: ſed membrum unum poteſt etiam indicare alteram a quantitate quidem æqualem a alterius membri, ſed quocumque diverſo ſitu, ac diverſa directione conſtitutam. Itaque hæc æquatio $a = a$ ſic elata eſt prorſus inepta ad æquationem inter datam ac variabiles conſtituendam, ſive ad concludendum æquatione punctum C, a quo pendet ratio AC, & BC ad totam AB.

§. 11. Ut igitur relationem puncti fluentis C cum determinatis punctis A & B habeamus; æquatione opus eſt ex duabus variabilibus conflata, ex qua ratio inter hæc puncta quæſita deduci poſſit. Hoc vero obtinebimus, ſi in ſuperiori

æqua-

æquatione fiat $a - x = y$, ut oriatur æquatio $x + y = a$, quæ y, poſita $AC = x$, repræſentabit BC a puncto dato B verſus A progredientem: cum in hoc Syſtemate baſis $AC = a$ nullum aliud punctum datum præter A, & B tamquam initia variabilium x, & y conſtitui poſſit: dummodo AB integra, ac nullo determinato puncto ſecta concipiatur. Porro hujuſmodi $BC = y$ poſitiva ſumenda eſt, licet ex adverſo oppoſita ſit directioni, per quam procedit $AC = x$: ac proinde y origine B permutatur in $(-x)$ negativam, ſi, ejus origine in A translata, primam directionem, quam in puncto B habebat, fluendo retinere ponatur. Nam cum ante variabilium fluxiones totum hoc a nobis ſumptum Syſtema unica data baſi AB concludatur, prima fluxio mente concepta ipſius y, quæ a puncto B verſus A progreditur, eſt ipſa BC; cum extra punctum B dextrorſum nulla prius concepta fuerit linea præexiſtens, præter ipſam AB. Itaque quemadmodum hac eadem ratione AC ſumpta fuit poſitiva, ita fluxio $BC = y$, ſumenda & ipſa erit poſitiva, nulla habita ratione ad directionem lineæ $AC = x$ ab altero puncto A verſus B fluentis. Nulla enim ſupponitur ex parte oppoſita a puncto B prior fluxio, quæ motu contrario per punctum oB a poſitiva ad negativam plagam transferatur: ut CAP. I. §§. 42. & ſeqq. animadverti.

§. 12. Æquatio igitur indeterminata $x + y = a$ duabus variabilibus conſtans, qua docemur lineam AB in puncto C variabili in duas partes infinitis prope modis dividi poſſe, complectitur totum Syſtema ſolitarium baſis datæ AB, cujus præcipua conditio eſt, ne variabiles ſimul ſumptæ, quocumque modo modificentur, majores vel minores fiant ſua baſi $AB = a$: aliter ab uno ad alterum Syſtema tranſitus fit: ut infra patebit. Hoc Syſtema baſis datæ impoſterum vocabo *Syſtema ſolitarium baſis conſtantis*, *ſive datæ*, ut diſtinguatur a *Syſtemate baſis variabilis*, de quo infra.

§. 13. Quod ſi velis $BC = y$ negativam, eo quod eſt in directione contraria AC, quam fecimus $= + x$; id per me licet (quamvis tunc referatur non ad ſuum originis punctum B, ſed ad punctum originis A fluxionis AC); dummodo animadvertas $x - y$ in hac poſitione non ſignificare ſubtractionem, ſed additionem, ſignumque $-$ præfixum y indicare non quantitatem poſitivam y detrahendam eſſe ab x poſitiva, ſed $-y$ in origine negativam addendam x poſitivæ, ita ut ſit $x - y = x + (-y) = AC + BC = a$: tunc enim ex conſtructione ipſa patet $x - y$ non ſubtractionem, ſed additionem ſignificare: atque hic incidimus in æquationes Capitis ſuperioris. Inferius patebit quandonam $-y$ ut negativa cenſenda ſit.

§. 14. Ex dictis conſequutiones in tota Analyſi maximi momenti nondum animadverſæ ſtatim profluunt. Primum æquatio primi gradus, quæ lineam unam integram finitam repræſentat extremis hinc inde limitibus tantum datis definitam, neceſſario in origine conſtat duabus variabilibus $x + y = a$, ſcilicet datæ lineæ AB, quæ paſſim dicitur æquatio indeterminata duarum variabilium. Quod ſi fiat x, vel $y = 0$, tunc exſurgit æquatio $x = a$, vel $y = a$, quæ dicitur determinata primi gradus, eo quod unam tantum variabilem contineat, cui unus tantum valor tribuitur. In Capite ſequenti tamen videbimus quam

bene

bene congruat cum veritate hujuſmodi notio æquationibus primi gradus unius variabilis affixa.

§. 15. Illud interim in quacumque æquatione unius variabilis primi gradus diligenter obſervandum, eam ſcilicet ab æquatione indeterminata ſaltem duarum variabilium originem ſuam ducere, in qua una vel altera facta eſt zero: ac proinde verificari non poſſe niſi in hac peculiari circumſtantia. Et ſane ſumpta æquatione $x + y = a$, ſi fiat $y = 0$, erit $x + (0y) = a$: & facta $x = 0$, erit $(0x) + y = a$: quod cum utrumque evenire poſſit, utrumque conſiderandum eſt. En igitur vera origo & natura æquationis unius variabilis, quæ cenſenda eſt unus ex limitibus æquationis duarum variabilium unius Syſtematis a, ex qua ſemper duæ extremorum limitum æquationes, quas impoſterum *homologas* appellabo, ea lege deducuntur, ut una repræſentet exhauſtam eſſe a ſua variabili totam Syſtematis baſim AB; ac proinde variabilem ad maximam, ad quam poterat; magnitudinem perveniſſe: cui reſpondet altera, quæ oſtendit limitem alterum extremum, ſive valorem alterius variabilis minimum, quando prima dat maximum, & viceverſa.

§. 16. Hujuſmodi vero æquationes ſimul ſumptæ in ipſa æquatione duarum variabilium contineri debent, atque ab ipſis æquationibus limitum æquationes intermediæ manare. Ita data $x = a$ maxima, ſubintelligi debet altera $y = 0$ minima: & additione facta, $x + 0y = a$: vel data $x = 0$ minima, altera neceſſario erit maxima, ſive $y = a$, & additione facta $(0x) + y = a$: a quibus intermedia $x + y = a$ deducitur. Hinc in omnibus iis caſibus, in quibus in æquatione unius variabilis hæc ipſa variabilis zero æquatur, ſtatuendum ſine ulla dubitatione eſt, fieri permutationem variabilium, ut ſi quæ in primo caſu erat maxima, fiat minima, altera, quæ erat minima e nihilo educta, maxima fiat neceſſe ſit. Ita datæ æquationi $x = a$ altera reſpondet $y = 0$, ſive æquatio compoſita $x + 0y = a$: facta igitur $x = 0$, erit $0x + y = a$, ſive $y = a$.

§. 17. Sumpta igitur æquatione Syſtematis baſis datæ $x + y = a$, ſive (*fig. ead.* 10.) $AC + BC = a$; & facta $y = 0y$, erit $x + (0y) = a = AB$: vel facta $x = (0x)$, $(0x) + y = a = BA$. Prima dat $x = AB$, maximam in hoc Syſtemate, & $(0y) = 0B$, minimam: ſecunda dat $y = BA$, maximam; & $(0x) = 0A$, minimam. Æquationes igitur *homologæ* erunt

$$\text{I}^a.\ x = a = AB \quad : \quad \text{II}^a.\ y = 0B.$$
$$\text{III}^a.\ y = a = BA \quad : \quad \text{IV}^a.\ x = 0A.$$

Prima igitur, & tertia æquantur inter ſe, quemadmodum ſecunda, & quarta. Ergo erit $y = x$: at in hoc caſu $y = BA$, in directione ſcilicet contraria ipſius $x = AB$; ergo erit $y = BA = -AB$, facta inverſione $= -x$. Quo in caſu docemur originem variabilis x transferendam eſſe a puncto, in quo primum erat A verſus B, ad B verſus A, atque ipſam vicem gerere y poſitivæ:

væ : in utroque tamen caſu tam x, quam $-x$ æquatur poſitivæ datæ $+a$. Vel quoniam ex (Iª.) $x = a$, & ex(IIIª.) $-x = a$, hæc dabit $x = -a$. At in hac ſecunda æquatione BA ſumpta fuit $= +a$: ergo in hoc caſu erit $-a = -$ BA $=$ AB $= a$ poſitivæ reſpectu puncti A, ut oſtendunt æquationes (Iª), & (IIIª). Hinc ſi fiat $x = -x$, erit x prima poſitiva reſpectu puncti A, hæc eadem negativa reſpectu puncti B : quare ſi ponatur x identica, erit $1 = -1$, hoc eſt AB, quæ reſpectu puncti A dicebatur poſitiva, hæc eadem numero relata ad punctum B erit negativa. Quod ſi x, x ſupponantur diverſæ, tam poteſt eſſe $x = x'$, quam $x = -x'$; & viceverſa. Nam in prima x poſitiva reſpectu puncti A æquatur x' poſitivæ reſpectu puncti B. Vel in ſecunda $x = -x'$, x eſt poſitiva reſpectu puncti A, cui æquatur $-x'$ non relata ad punctum B, cujus reſpectu dicebatur poſitiva, ſed relata ad punctum primæ A, cujus reſpectu vere fit negativa. E converſo, quoniam ex (Iª.) & (IIIª.) habetur $a = a$, ſive AB $=$ BA, relata prima ad ſuum peculiare punctum A, & ſecunda ad ſuum B, quorum reſpectu ſunt ambæ poſitivæ ; (cum tamen BA reſpectu puncti A ſit negativa, & AB reſpectu puncti B negativa) erit, ſi ad idem punctum omnia referantur, tam $-a = +a$, quam $+a = -a$. Ergo in quacumque æquatione, quæ dicitur identica, eadem quantitas ſibi ipſi ($\pm$) æquari poteſt, ſive $+a = -a$; $-a = +a$; $+a = +a$; $-a = -a$, in quibus nihil, niſi terminus comparationis ſive punctum primum originis, immutatum fuit. Et ſane æquationes (Iª.), & (IIIª.) ſingulæ æquantur a poſitivæ, & tamen ſi conſtructionem ſive *fig.* 10. conſulas, percipies AB $= +a$ primæ eſſe inverſam ſecundæ BA : (IIª.) vero, & (IVª.) ſunt quidem ambæ æquales zero, ſed ſecunda deſignat punctum oB directum verſus A ; quarta indicat punctum oA directum verſus B : quæ puncta diſtant inter ſe intervallo AB $= \pm a$, prout unum, aut alterum punctum originis ſolitarium ſumitur. Quare ſi hujuſmodi æquationes non differunt inter ſe quantitate, differunt tamen poſitione punctorum originis, a quibus pendet diverſa origo, ac directio quantitatum in aſſumpto ſuperiori Syſtemate.

§. 18. Quoniam $(x + y) = a$; ſi ab hac utrimque ſubtrahatur quantitas a, erit $(x + y) - a = a - a$, qua deſignatur promiſcue tam punctum A, quam punctum B; ut ſit $(x + y) - a =$ oA ; $(x + y) - a =$ oB, ut patet. Nam in primo caſu $(x + y) - a =$ (*fig. ead.* 10.) (AC + BC) $- a =$ AB $-$ AB $=$ AB $+$ BA $=$ oA ; in ſecundo $(x + y) - a =$ (BC + AC) $- a =$ BA $-$ BA $=$ BA $+$ AB $=$ oB. Quod ſi in 1:ª fiat tranſpoſitio membrorum a ſigno æqualitatis, erit $-(x + y) + a = -$ AB $-$ BA $= -$ oA ; ſed, per ea quæ diximus, $-$ AB $=$ BA ; $-$ BA $=$ AB, facta linearum inverſione ; ergo $-(x + y) + a = -$ AB $-$ BA $=$ BA $+$ AB $= -$ oA $=$ oB. Ergo 1:ª æquatur 2:ª, ſive $-(x + y) + a = (y + x) - a = -$ oA $=$ oB

$= o$ B. Hinc colligitur factam fuiſſe inverſionem, ac permutationem variabilium x, y, ac punctorum originis. Itaque erit

$$- AC = BC \; ; - BC = AC$$

$$- x\ 1{:}^{a} = y\ 2{:}^{a} \quad - y\ 1{:}^{a} = x\ 2{:}^{a};$$

cum enim punctum C ſit mobile, non poteſt — A C originem fixam, ac datam niſi in altero puncto dato B invenire, ſi non ſolum æqualem, ſed etiam identicam Syſtematis baſim, ac ipſum identicum Syſtema retinere velimus. Tantum igitur abeſt, ut hæc æquatio ſit abſurda, ut imo in noſtra ſuppoſitione ad perfectam identitatem membrorum perveniri nequeat, niſi hac utamur legitima æquatione. Docet enim hæc non poſſe æquationem primam, quæ æquatur o A, identicam eſſe cum ſecunda, quæ æquatur o B, vel viceverſa, niſi fiat inverſio ſignorum in uno, aut altero membro æquationis. Tranſpoſitio igitur membrorum ab una ad alteram partem ſigni = invertit Syſtema, ac mutat puncta originis variabilium, hoc eſt variabiles ipſas permutat. Quod diximus de $1{:}^{a}$, fac intelligas de $2{:}^{a}$.

§. 19. Hic, antequam progredior, in re tanti momenti paulliſper immoremur oportet. Cuique patet in Analyſi communi membra cujuſcumque æquationis ex poſitivo in negativum, vel viceverſa duobus modis immutari ſolere. Aut enim fit tranſpoſitio omnium terminorum utriuſque membri ab una ad alteram partem ſigni =, ut ſupra innui; aut immota loco membra multiplicantur, vel dividuntur utraque per — 1, atque inde tacita diviſione, vel multiplicatione unitas expungitur. Ita in allato exemplo, præter tranſpoſitionem membrorum, ſæpe fit $-1.(x+y) = -1.a$; vel $\left(\frac{x+y}{-1}\right) = \frac{a}{-1}$; atque ſequentia inter ſe æquantur, $-1.(x+y) = \left(\frac{x+y}{-1}\right) = -(x+y)$; & $-1.a = \frac{a}{-1} = -a$. Quare in calculo communi hac methodo a genere ad genus primum tranſitus fit, deinde tacite (omiſſa unitate) ad primam dimenſionem, reſtituendo quæ prius arbitrio immutavimus, regredimur. Data igitur æquatione $-(x+y)+a = (x+y)-a$, (quam legitimam eſſe, & quid ſignificet §. ſuperiori oſtendimus) ſi methodum communem ſequamur, dividendo utrumque membrum per $-(x+y)+a$, vel per $(x+y)-a$, inveniemus æquationes $1 = -1$, vel $-1 = 1$: ac tacite ſupponimus eamdem identicam quantitatem multiplicatam in primo membro per $+1$, in ſecundo per -1; vel viceverſa; ſive æquationem eſſe duplicis dimenſionis, hoc eſt $1.\overline{-(x+y)+a} = -1.\overline{-(+x+y)+a}$, vel $-1.\overline{(x+y)-a} = 1.\overline{(x+y)-a}$. Porro ut ad primam dimenſionem regrediamur, ne-

 ceſſe

ceſſe eſt per eam, per quam multiplicavimus vel diviſimus unitatem, dividamus vel multiplicemus æquationem. Hoc vero duobus modis fieri poteſt: ſcilicet primo $\frac{1}{1} \times -\overline{(x+y)+a} = \frac{-1}{-1} \times -\overline{(x+y)+a}$; vel $\frac{-1}{-1} \times \overline{(x+y)-a} = \frac{1}{1} \times \overline{(x+y)-a}$: ſecundo vero $\frac{-1}{-1} \times \overline{(x+y)-a} = \frac{-1}{-1} \times -\overline{(x+y)+a}$; vel $\frac{1}{+1} \times -\overline{(x+y)+a} = \frac{+1}{1} \times +\overline{(x+y)-a}$. Nam $1 \times -\overline{(x+y)+a} = -1 \times -\overline{(x+y)+a}$ æquatur etiam $-1 \times \overline{(x+y)-a} = -1 \times -\overline{(x+y)+a}$ vel $1 \times -\overline{(x+y)+a} = 1 \times \overline{(x+y)-a}$. Primo modo oſtenditur ſingula membra relata ad diverſa originis puncta 1, vel -1 fieri ſimul poſitiva, vel negativa: ſecundo modo eorumdem membrorum, relatorum ad idem originis punctum, unum fieri negativum, alterum poſitivum, vel viceverſa. Hinc data æquatione $-(x+y)+a = (x+y)-a$, erit $\frac{-(x+y)+a}{(x+y)-a} = (+)$, vel $= (-)$: ſive $-(x+y)+a = (+) \times \overline{(x+y)-a} = (-) \times \overline{(x+y)-a} = -(x+y)+a$, ſigno $(\pm)$ ſolitarie, atque abſtracte ſumpto (prout CAP. ſuper. §§. 35. & ſeqq. innui) applicando poſtea quantitati, prout ad diverſa, vel ad idem originis punctum eadem quantitas refertur. Verbo quæ relate ad diverſa originis puncta eodem ſigno afficiuntur, afficiuntur diverſo ſi ad unum idemque punctum referantur: contra vero, quæ relate ad idem punctum originis eodem ſigno afficiuntur, afficiuntur diverſo ad diverſa originis puncta.

§. 20. Hiſce explicatis revertor ad formulam $(x+y)-a=0$ quam §. 18. tam punctum A, quam punctum B promiſcue indicare poſſe oſtendimus, ut ſit $(x+y)-a = 0A = 0x$; $(x+y)-a = 0B = 0y$. In prima, facta $y = 0y$, erit æquatio limitis $x + 0y - a = 0A$; in ſecunda, facta $x = 0x$, erit $0x + y - a = 0B$ limitis: quæ æquationes dant vel $x = a$, vel $y = a$, maximas, & $y = 0$, vel $x = 0$, minimas; quæ oſtendunt in præfato Syſtemate baſis datæ a non poſſe x, vel y majores eſſe a, nec minores 0; ea tamen lege, ut uni variabili maximæ reſpondeat altera minima. Hujuſmodi tamen æquationes limitis duplici modo efferri poſſunt: vel

enim

enim a prima ſublato $o y$, qui nullus eſt reſpectu x, erit $x - a = o A$, vel $x - a = - o y$, omiſſo puncto $o A$: ſecunda vero vel dabit $y - a = o B$, omiſſo $o x$, qui nullus eſt reſpectu y, vel $y - a = - o x$, omiſſo puncto $o B$. Quare habebimus quatuor iſtas ſequentes æquationes limitis.

$$(\text{I}^a.)\quad x - a + o y = o A = o x\ ;\quad (\text{II}^a.)\quad o x + y - a = o B$$

$$\text{vel } x - a = o A = o x \qquad\qquad y - a = o B$$

$$(\text{III}^a.)\quad x - a = - o y = - o B\ ;\quad (\text{IV}^a.)\quad y - a = - o x = - o A$$

quæ differunt inter ſe ſi non quantitate, poſitione tamen diverſa punctorum, nec non diverſa variabilium denominatione, ac poſitione. Nam ſumpta æquatione limitis $x - a = o x$ dati Syſtematis baſis a, in qua $x = a$ eſt maxima, (ac proinde in caſibus intermediis x debet eſſe minor a, donec fiat $x = o$) erit æquatio intermedia $x - a = x$; quando enim x minor eſt a, $o x$ eſt aliquid, ſive x; reviviſcit enim, ac fit aliquid illud ipſum $o x$, quod in unico caſu $x = a$ ad nihilum redactum fuerat. Eodem modo data (II^a.) $y - a = o y$, erit intermedia $y - a = y$. Itaque ex prima oritur $x - x = a$; ex ſecunda $y - y = a$.

§. 21. Videndum nunc quid ſignificent hujuſmodi æquationes: ac primum obſervandum in prima limitis æquatione $x - a = o x$ ſublatum eſſe punctum B, ac tantum in ipſa permanere punctum $o x$, ſive A, hoc eſt nullum aliud punctum determinatum ab hac æquatione aſſignari præter punctum A. In caſibus igitur intermediis, quando x (*fig. ead.* 10.) fit minor A B, ut puta A C, $o x$ debet eſſe aliquid ex parte b, ut A C + A b baſim datam a adæquet. Ergo in hoc caſu A C + A b = a puncto unico dato originis A. Sed A b eſt in directione contraria A C = x, ergo A b = $- x$: proindeque in æquatione $x - x = a$, in qua A C, A b ſint vel non inter ſe æquales, numquam tamen $x - x$ fit nulla; cum $x - x$ in hoc caſu non ſit ſubtractio quantitatis poſitivæ a poſitiva, ſed additio quantitatis poſitivæ cum altera in origine negativa: ita ut ſit $x - x = x + (- x) =$ A C + A b = b C = C b $= \pm a$. In hoc vero caſu, in quo non niſi unicum punctum A determinatum habemus, puncta C, b erunt variabilia, ac proinde x, $+ (- x)$ inæquales eſſe poſſunt: ad æquationem enim verificandam ſufficit ut earum ſumma $x + (- x)$ datam a adæquet, & originis punctum ſit A. Hinc poſita A C = $x = o$, erit A b′ = a, in quo caſu punctum b′ determinatur, & a Syſtemate puncti A tantum dati ad Syſtema duorum punctorum A, & b′ datorum nos tranſtulit. Simili modo, facto $+ (- x) = o = o$ A b, iterum ad Syſtema primum baſis A B regredimur: punctis A, & B determinatis. In caſibus vero intermediis intra B, b′ non niſi unicum punctum A determinatum erit. Sed quoniam ſemper A C + A b = a; idem erit ſupponere extrema puncta lineæ datæ b, C determinata, puncto A inter b & C fluente, ac determinare pun-

punctum unicum fixum A, punctis C, b variabilibus: hoc tamen diſcrimine, quod in duobus punctis A, & B determinatis erit $AC = x$, $BC = y$; ſive $x + y = a$, vel $x = a = AB$; $y = a = BA$ in limite: in uno puncto vero A tantum determinato erit $AC + Ab = x + (-x) = a$, & in limite $(-x) = 0$, $x = a = AB$; &, facta $x = 0$, $+(-x) = a = Ab'$.

§. 22. Idem continget 2:^da noſtræ æquationi $y - a = oB = oy$; in qua tamen, cum punctum unicum originis oB datum ſit, omnia, quæ circa punctum A diximus verificari, puncto B applicari poterunt. Erit igitur $y - a = oy$, æquatio limitis; quæ docet $BC = y$ eſſe maximam $= a$: at, in caſibus intermediis, $y - a = y$, poſita y minori a: hinc $BC - a = cB$, ſive $BC - cB = BC + Bc$ (facta inverſione lineæ cB) $= y - y = y + (-y) = Cc = cC = \pm a$: æquatio, quæ dat unicum punctum datum originis B. At facta $-y = 0$, erit maxima $y = a$, ſive $y = BA$, duobus punctis determinata; vel facta $+y = 0$, $+(-y) = Bc' = a$ in parte oppoſita alterius Syſtematis: quæ Syſtemata, licet æquentur inter ſe baſi communi data $= a$, tamen differunt inter ſe poſitione baſis, & punctorum datorum una, vel duplici origine.

§. 23. Porro quoniam vidimus $x + (-x) = AC + Ab = a$, puncto uno dato A, & $x + y = AC + BC = a$, duobus punctis datis A, & B: quoniam $AC = x$ utriſque Syſtematibus communis eſt, erit $Ab = BC$, ſive $+(-x)$, puncto dato A, æqualis y puncto dato B. Quod ſi fiat inverſio lineæ $Ab = +(-x)$, ita ut ſit $Ab = bA = x$, tunc punctum datum A fit variabile, & punctum b, quod erat fluens, fit conſtans in puncto b. At per æquationem eſt $bA + AC = a$; ergo fit datum etiam punctum C, & æquatio $bA + AC = x + x = a$: quo facto transferimur a Syſtemate unius puncti dati A ad Syſtema duorum punctorum datorum b & C, A fluente. Idem dicatur de altera æquatione $y - y = a$; ſive $y + (-y) = BC + Bc = BC + cB = cC = a$, punctis cC datis; vel $-(-y) - (+y) = CB + Bc = Cc = -a$, ſi referatur ad ſuperiorem æquationem.

§. 24. Æquationes igitur (I^a.) $x - a = oA$ (*fig. ead.* 10.) $= ox$, & (II^a.) $y - a = oB = oy$, dabunt $ox = ox$, & $ox - ox = ox - ox = oa - oa = oa$: vel $oy - oy = oa$, quæ ambæ ſunt æquationes minimæ limitis $= 0$. Hinc in caſibus intermediis erit in prima $x - x = +a$, ſed $-x + x = -a$; ergo $x - x = \pm a$; in ſecunda ſimiliter erit $y - y = \pm a$. Prima ad unum punctum datum A relata, & hinc inde ab hoc puncto variabiles $x + (-x) = \pm a$; ſecunda vero $y + (-y) = \pm a$, ad punctum B. Sed quoniam fecimus $AC = x$, $Ab = -x$, erit $+(-x) + x = Ab + AC = a$; & facta inverſione primæ, erit $x + x$

$= bA$

$= bA + AC = bC = a$, evaneſcente puncto A, ac dato primum puncte b, a quo determinatur alterum punctum C, cum debeat eſſe $bA + AC$ $= bC = a$. Sed quoniam eſt etiam $+ x + (-x) = -a = - Ab - AC$ $= CA + bA = CA - (-Ab) = CA + Ab = Cb$; primum punctum erit C: ſcilicet facta fuit inverſio puncti, ac variabilium. Idem dicatur de altera $y + oy = \pm a$.

§. 25. Sumamus nunc æquationes (III.^{am}) ac (IV.^{am}) §. 20, $x - a$ $= - oy = - oB$; & $y - a = - ox = - oA$, quæ ſunt æquationes limitis Syſtematis $x + y = a$ duorum punctorum datorum A, & B: ergo $x = a$ maxima, vel $y = a$ maxima. Sed notandum, quando $x = a$ maxima, eſſe $y = oa$ minimam, ut in (III^a.); & in (IV^a.), quæ dat $y = a$ maximam, eſſe $x = oa$ minimam. Hujuſmodi vero æquationes dant $x - a = ox$ $= oA = - oy = - oB$; $y - a = oy = oB = - ox = - oA$, ſive x relata ad punctum A fluere concipitur in directione contraria y relatæ ad punctum B, & viceverſa: hinc $oA = - oB$; & $oB = - oA$, ſive A $= - B$, & $B = - A$: hoc eſt fluxio puncti A poſitiva eſt in directione contraria fluxionis puncti B, & viceverſa: ita ut quæ relata ad punctum datum A dicebatur poſitiva, ſit negativa in eadem ipſa directione, relata ad punctum B: hoc eſt tandem fluxiones duorum diverſorum punctorum tunc ſunt ambæ poſitivæ, cum ſimul adverſis frontibus congrediuntur: quæ ſi referantur ad idem punctum, una eſt poſitiva, altera negativa. Et contra fluxiones duorum diverſorum punctorum, quæ ſibi occurrentes cenſebantur poſitivæ, per eamdem directionem progredientes una erit poſitiva, altera negativa, ſed relatæ ad unum tantum punctum erunt ambæ vel poſitivæ, vel negativæ, prout referuntur ad punctum poſitivum, vel negativum.

§. 26. Quemadmodum igitur vidimus (I.) $x - a = ox$, ſive $x - ox$ $= a$, eſſe æquationem limitis, in qua x eſt maxima $= a$, & $- x = o$ $= - ox$; ita facta $x = o$, erit $- x = a$, maxima a parte negativa ipſius puncti A; & vel $+ (-x) - (+a) = o$, ſive $Ab + bA$ $= Ab - Ab = o$; vel $o = a - (-x) = Ab - Ab = Ab + bA$. Simili modo quoniam $y - oy = a$ dat $y = a$ maximam, & $- y = o$ $= - oy$, minimam; ita facta $y = o$, erit $- y = a$ maxima a parte opposita puncti B; ſive $+ (-y) - a = o = Bc' - Bc' = Bc' + c'B$. Hæc tamen duo Syſtemata baſis datæ a referuntur ad unicum punctum datum A, vel B, extrema puncta variabilia. At tertia $x - a = - oy$, ſive $x + oy = a$, & quarta $y - a = - ox$, ſive $y + ox = a$ ſunt æquationes limitis, in quarum prima, $x = a$ maxima; & $y = o = oy$ minima: at in ſecunda $y = a$ maxima, & $x = o = ox$ minima: hæ tamen æquationes pertinent ad idem Syſtema baſis datæ $= a$, ad quod duæ ſuperiores; in hoc tamen duo puncta extrema baſis a ſunt data, medium C variabile. Ex qui-

quibus omnibus patet, licet baſis Syſtematis in quatuor præfatis æquationibus non mutetur, tamen eas inter ſe differre in punctis datis: in primis unum tantum medium datum eſt, extrema variabilia; contra in ſecundis medium variabile, extrema data, ac determinata.

§. 27. Quare data æquatione limitis $x = a$; in qua, ſuppoſito Syſtemate baſis datæ a, x eſt maxima, ſemper ſupponendum eſt alteram variabilem factam fuiſſe minimam $= 0$. Itaque in æquationibus intermediis, facta x minori a, altera ſemper variabilis exiſtat neceſſe eſt. Hinc ſi ponamus æquationem $x - 0x = a$, erit æquatio intermedia $x - x = a$, pertinens ad Syſtema baſis datæ a, unico puncto medio fixo, & $x - x$ non ſignificat zero, ſed $x - x = x + (-x)$ additionem, ac unam x differre ab altera & poſitione, & etiam quantitate, ſi excipias caſum, in quo $x = -x$, ſive, hinc inde a puncto A, $x = \frac{a}{2}$; $-x = \frac{a}{2}$. Quod ſi ponamus $x + 0y = a$, erit æquatio intermedia $x + y = a$, quæ dat Syſtema ejuſdem baſis a, ſed relatum ad duo puncta extrema data Syſtematis A & B, C fluente intra hæc puncta.

§. 28. Sit igitur æquatio $x = a$, quæ donec x una & identica ſupponitur, eſt æquatio limitis, quæ oſtendit in aſſumpto Syſtemate baſis datæ a, x eſſe maximam, cum altera æqualis zero evanuerit: linea enim data eſt finita, &, ut diximus, duobus ſaltem punctis datis terminatur. Quod ſi ab hac methodum communem ſequuti hinc inde ſubtrahamus quantitatem datam a, erit $x - a = a - a = 0a$; & $x - a = 0x$, ergo æquatio $x - a = a - a$ convertitur in hanc $0x = 0a$: hinc æquationes omnes, quæ methodo vulgari comparantur zero, reducuntur omnes ad hanc $0 = 0$. Verum diligenter notandum, in æquatione $x = a$, in qua x eſt maxima Syſtematis, alteram variabilem, quæ neceſſario concurrere debet cum x ad Syſtema datum in caſibus intermediis conſtituendum, zero evaſiſſe; æquationemque revera eſſe vel $x + 0y = a$, vel $x + (-0x) = a$, ut ſuperius diximus: in quibus rite omitti poterant $0y$, vel $-0x$, cum revera punctum relatum ad lineam nullam penitus habeat rationem. At facta ſubtractione conſtantis, & æquata zero æquatione, ſcilicet facta $x - a = 0a$, nullo modo punctum $0y$, vel $+(-0x)$ omitti debet: tunc enim æquatio vera, & integra eſt $0x + 0y = 0a$; vel $0x + (-0x) = 0a$, in quibus cum comparatio inſtituatur inter duo puncta ejuſdem generis, ac naturæ, male omittitur unus vel alter comparationis terminus. Quare facta æquatione, ut moris eſt, $= 0$, reſumendum eſt punctum illud; vel (ut videbimus) puncta illa, quæ prius, donec $x = a$, recte ab æquatione expuncta fuerant.

§. 29. Et ſane data $x = a$, quiſque videt æquationem hanc verificari non poſſe, niſi in unico caſu, in quo eſt $x = a$, proindeque eſſe æquationem limitis: quæ cum, donec ita effertur, variabili x unum tantum valorem determinatum tribuat, non poteſt x variabilem conſtituere: facta enim x minore a, non amplius ſubſiſtet ea æqualitas, quam intelligimus: eſt igitur æquatio identica $a = a$: non poteſt igitur ſymbolo x variabili deſignari. Quod ſi ſumamus

cam

eam generalem æquationem, a qua hæc limitis deducta fuit, videbimus hanc limitis revera eſſe $x + 0 y = a$, quæ in duas in hoc caſu dividitur, $x = a$; $y = 0$, quibus oſtenditur non poſſe x æquari a, niſi ſit $y = 0$; ac proinde datæ uni æquationi limitis altera reſpondeat neceſſe eſt. Hinc facile totum hoc Syſtema a tribus æquationibus complexum eſſe perſpicies, (I^a.) $x + y = a$, quæ docet, ut in propoſito Syſtemate perſiſtamus, ſummam variabilium æquari integræ baſi a; proindeque eſſe (II^{am}.) $x = a - y$; & (III^{am}.) $y = a - x$. Data igitur $x = a$, erit $y = 0$, & viceverſa: & data x, vel y minore a in caſibus intermediis æquali $\frac{a}{m}$ erit $x = a - \frac{a}{m}$, vel $y = a - \frac{a}{m}$, ſive $x + \frac{a}{m} = a$; $y + \frac{a}{m} = a$, in prima $y = \frac{a}{m}$, in ſecunda $x = \frac{a}{m}$. Hinc eruitur, facile poſſe ex ipſa una æquatione limitis $x = a$ ad æquationem generalem tranſitum fieri: vel enim, data $x = a$, fiat $x = x + y$, ut ſit $x + y = a$; vel facta $a = a$ identica, in una vel altera parte pro a ponatur $x + y$, & ab identica æquatione transferimur ad generalem $x + y = a$, in qua, facta $y = 0$, ſe ſe offert iterum data $x = a$.

§. 30. Sed quoniam §. 24. vidimus, data $x - a = 0$, ex æquatione (I^a.) §. 20, $x - a = 0 x$ deſcendere æquationes intermedias Syſtematis $x - a = x$, ſive $x + (-x) = x + x = \pm a$, ex quibus facta una vel altera $x = 0$, iterum in æquationem limitis incidimus; æquationes intermediæ, ſi iiſdem variabilibus x, vel y exprimantur, dabunt in eodem Syſtemate vel $x + (-x) = \pm a$, dato puncto medio A hinc inde ab x, in quo Syſtemate promiſcue alterutra poſitiva, vel negativa poteſt aſſumi: vel $x + x = \pm a$, puncto uno vel altero extremo A vel B tamquam primo originis puncto ſumpto, totaque linea ab A verſus B, vel a B verſus A, nullo puncto medio diſtincta progrediente. Contra vero ſi ſumantur variabiles diverſæ x, y; indicium erit in dato ſuperiori Syſtemate variabilem unam ab extremo lineæ puncto A originem ducere, dum altera a puncto B verſus A obviam primæ procedit, puncto C medio indeterminato. Cum vero omnia hæc in ſingulis æquationibus neceſſario eveniant, diligentius ſunt enucleanda.

§. 31. Ac primum nemini dubium eſt æquationem aſſumpti a nobis Syſtematis datæ baſis $x + y = a$, æquationem eſſe ita indeterminatam, ut infiniti valores x, & y inveniri poſſint, qui ſimul ſumpti datam a conſtituant. Verum hic notandum, quod ſuperius innuimus, decreſcente y poſitiva augeri x; nec, facta $y = 0$, ſit $x = a$ maxima in hoc Syſtemate; ac viceverſa facta $x = 0$ minima, ſit $y = a$, maxima. Nam y poſitiva, non poteſt decreſcere infra zero, niſi fiat negativa, hoc eſt niſi primam naturam, ac directionem mutet: at facta y negativa, tunc non amplius ſumma duarum variabilium æquatur quantitati a, quæ erat conditio primæ æquationis, ſed differentia; ut ſit $x - y = a$, & $x = a + y$: quo facto tranſitus fit a Syſtemate baſis da-

tæ, in quo ſumma variabilium intra limites A, & B, quæ ſunt extrema datæ puncta lineæ datæ a, ad Syſtema, in quo una tantum variabilis æquatur ſummæ datæ a, *plus* alterius variabilis. Hoc Syſtema impoſterum *Syſtema baſis variabilis* nuncupabo, in quo duo puncta, unum ex extremis, alterum medium, data ſtabilitaque ſunt, altero extremo puncto manente variabili. Quæ vero differentia (quæ quidem eſt maxima) inter primum ac ſecundum Syſtema intercedat, hic ſenſim explicare conabor.

§. 32. Ut id conſequamur, dato primo Syſtemate baſis conſtantis $x + y = a$, conſtructionem, quæ huic æquationi reſpondet, conſulamus neceſſe eſt. Jam vidimus in hoc Syſtemate, punctum C (*fig. ead.* 10.) fluens intra extrema data puncta A, & B conſiſtere; & facta $AC = x$, $BC = y$, donec C intra A, & B permanet, eſſe ſummam variabilium $x + y = a$: at facta $y = 0$, ſive minima in hoc Syſtemate, eſt $x = a = AB$ maxima: ſive puncto C incidente in B, ſe ſe offert extremus limes, in quo ſumma $x + 0y = a$ æquatur baſi a. At decreſcente iterum y infra B (*fig.* 11.) ſive zero, y fit Bc, qui reſpectu primæ directionis eſt negativus, ac proinde $Bc = -y$: hoc igitur limite prætergreſſo ſtatim transferimur ad Syſtema baſis variabilis, in quo non ſumma, ſed differentia variabilium æquatur datæ $a = AB$: & æquatio $x = AB + Bc = a + (-y)$; quo in caſu ex ipſa linearum poſitione patet $a + (-y)$ non ſubtractionem, ſed ſummam indigitare. Etenim $AB + Bc$ dat totam lineam Ac duabus AB, Bc conflatam: ac proinde $a + (-y) = a + y$. Et ſane data $x + y = a$, erit $x + 0y = x + 0B = a$; & $x = a - 0y$: at facto y negativo infra zero, erit $x = a - (+0y - y)$, ſive $x = a - (0B - y) = a - (-y) = a + y$. Ut ratio vero hujuſce transformationis intelligatur, obſervandum Bc, ſive $-y$ in noſtro caſu negativum eſſe reſpectu $BC = y$, jam prius exiſtentis in dato Syſtemate $x + y = a$, ac proinde $x = a - (0B - y)$: at omiſſo puncto 0B, quocum nulla amplius comparatio inſtitui poteſt, nulla amplius præexiſtentis $CB = y$ poſitivi notio menti occurrere poteſt. Hinc nullum aliud punctum præexiſtens erit in æquatione ſupradicta, quam punctum A verſus B poſitive fluens: at etiam Bc reſpectu puncti A orta eſt a puncto 0B fluente in eadem directione ac $0A = 0x$; ergo Bc reſpectu directionis x ſumenda eſt poſitiva, ac conſequenter $x = a - (0B - y) = a - (-y) = a + y = AB + Bc = Ac$.

§. 33. Simili modo, data æquatione Syſtematis noſtri $x + y = a$, & facta $x = 0$, erit $0x + y = a$, & $y = a - 0x$; & facta $x = Ac'$, quæ reſpectu ſuæ primæ poſitionis cenſenda eſt negativa, erit $y = BA + Ac' = a - (0x - x) = a - (-x)$, ſublato 0A, & remanent tantum punctum 0B & BA, quibuſcum comparari poſſit directio lineæ Ac', quæ cum ſit poſitiva reſpectu lineæ BA, ſumenda erit in hoc caſu Ac' poſitiva $= +0x$, & $y = BA + Ac' = a - x = a + (-x) = a + x$.

§. 34.

§. 34. Hic iterum obſervandum, inveniſſe nos in §. ſuper. 32. $x = Ac = AB + Bc = a + y$, ſcilicet tam x, quam AB, & Bc ſigno poſitivo affectas. In §. vero 33. $y = Bc' = BA + Ac' = a + x$, omnes itidem ſunt poſitivæ; licet hæ ſint prorſus in directione contraria primis: eſt enim $Ac = - Bc'$, ſive $Bc' = - Ac$; & $AB = - BA$, ſive $BA = - AB$ & $Ac' = - Bc$, ſive $Bc = - Ac'$. Ex quo manifeſte colligitur poſitivum & negativum relativum eſſe, ac eamdem quantitatem modo poſitivam, modo negativam cenſendam eſſe prout diverſa puncta originis, ac directiones artificiis ſupra traditis neceſſario mutantur.

§. 35. Hæ ſunt affectiones, quæ ex dato Syſtemate baſis conſtantis oriuntur, dum ab hoc ad Syſtema baſis variabilis tranſpoſitione atque inverſione terminorum tranſitum facimus. Nunc videamus quas nobis exhibeat conſequutiones tranſitus a Syſtemate baſis variabilis primum poſito ad Syſtema baſis datæ. Sit igitur data primum æquatio $x = a + y$ Syſtematis baſis variabilis. In hac, facta $y = 0$ ſive minima, x æquatur a; & creſcente y valor x augetur, ac magis ſemper augetur, quo magis augetur valor poſitivus y. Hic igitur valor x minimus æquatur a, cum $y = 0$; & maximus æquatur ∞; ita ut valor x, qui in Syſtemate datæ baſis erat maximus, ſcilicet a, in hoc ſit minimus, & maximus æquetur infinito, ita ut utraque variabilis evadat infinita, quæ tamen differunt inter ſe differentia finita $= a$. In eadem figura 11. erit igitur $x = Ac = a + y = AB + Bc$, hoc eſt una variabilis x æquatur ſummæ alterius variabilis, & conſtantis a. Donec Bc poſitive creſcit ad quamcumque magnitudinem, ſemper $Ac = x$ æquabitur ſummæ ſupradictæ; & facta $Bc = 0$, erit $x = a + 0y = a + 0B$; at decreſcente ſemper magis $Bc = 0y$, ſive facta y negativa reſpectu primæ directionis, erit $x = a + 0y + (-y)$ & $x - 0y - (-y) = x - 0B - (-y) = a$, & $x - 0B + y = x - 0y + y = a$, ſive $x - (-y) = a$; & $x + y = a$. At ſi figuram conſulamus, erit $AC + BC = a$; ſed $AB = a$, & in hoc caſu $BC = -y$ (eſt enim negativa reſpectu Bc poſitivæ præexiſtentis); ergo $AC + BC = a + (-y) = a$; quæ quidem non eſt ſubtractio, ſed additio lineæ AC cum BC, quarum ſumma $= AB = a$. At hic BC tam eſt negativa reſpectu Bc poſitivæ, quam reſpectu $AC = x$, quæ eſt in oppoſita directione ipſius BC: ergo BC cenſenda eſt negativa tam præexiſtente Bc, quam relata ad punctum A. Quem tamen valorem ſuperius poſitivum demonſtravimus, ſi evaneſcente Bc, ſive nullo prius concepto præexiſtente Bc ſupponamus y ex puncto B poſitivo fluere poſitive verſus A, atque ad punctum B referri.

§. 36. Ponamus nunc Syſtema præexiſtens baſis variabilis eſſe (*fig. ead.* 11.) $Bc' = y = BA + Ac' = a + x$; facta $x = 0A$, erit $y = a + 0A$: ac decreſcente iterum x, ſive facta negativa, erit $y = a + 0A - x$ & $y + x = a$; ſive $BC + AC = a$: quare in hoc caſu AC æquatur $+ x$,

quan-

quando in præexiſtente Syſtemate erat $Ac' = + x$. Hinc in primo caſu, $y = BA + Ac'$, & $y - Ac' = BA = a$: ſed eſt præexiſtens primum $+ y = Ac' = - AC$; ergo $y - Ac' = y - (- AC) = y + AC = y - (- x) = y + x = a$; ſive $y + x = BA$, ſive $BC + AC = BA$.

§. 37. In ſuperiori §. 35. invenimus $x + y = AC + BC = AB = a$: & in §. 36. $y + x = BC + AC = BA = a$; quæ tamen ſingulæ æquantur valori $+ a$ poſitivo, licet ſint in directione oppoſita; & $BA = - AB$, ſive $a = - a$, & viceverſa. Hinc, his collatis inter ſe, oritur æquatio $+ = -$. Verum ſi hæc conferantur, nihil aliud, ſi recte animadvertas, nos docent, niſi factam fuiſſe coordinatarum permutationem, ut quod erat $AC = x$ in prima, fiat $BC = y$ in ſecunda; & quod erat BC in prima fiat AC in ſecunda, & viceverſa: quemadmodum animadverti §. 16. hujus Capitis. Nam data prima (*fig. ead.* 11.) $x + y = AB = a$, quoniam ſecunda $y + x = BA$, erit $- y - x = AB$, ergo $x + y = AB = - x - y = AB$; ſive $x + y = AC + BC = - y - x = - BC - AC$; ſive $- y$ ſecundæ quæ eſt in directione contraria ſuæ poſitivæ y, Bc, eſt in eadem directione ac $AC = x$ primæ æquationis, & $- x$ ſecundæ æquationis, quæ eſt in directione contraria ſuæ AC, eſt in eadem directione ac $BC = y$ primæ. Idem contra eveniet, ſi primam conferas cúm ſecunda. Quare ab æquatione $x + y = AB = - AB = BA = a$ ſemper poſitiva, nihil aliud docemur, niſi tam poſſe x permutari in y, quam y in x, ſive tam AC pro y, quam BC pro x promiſcue uſurpari poſſe: quo artificio fit permutatio coordinatarum, ac punctorum originis.

§. 38. Illud vero maximi momenti in re, de qua agimus, probe ſtatuendum eſt: ſcilicet ſi dato uno Syſtemate una aut altera ex variabilibus fiat zero, atque hæc, in eadem directione primo ſumpta antequam fiat zero, iterum procedat infra zero (in quo caſu a dato Syſtemate ad alterum tranſitum facit); tunc, cum non amplius præexiſtat contrariæ directionis fluxus (ſuppoſuimus enim decreſcendo evaſiſſe zero) fluxum ſequentem, licet relatus ad primam ſit negativus, cenſendum fore poſitivum, ſublato primo comparationis termino, ac primo dato Syſtemate. Ita in noſtro exemplo, dato primo Syſtemate baſis datæ $AC + BC = AB$, facto $BC = oB = o\,y$, erit $AB + oB = AB$, in quo caſu fluxus poſitivus BC decreſcendo evaſit zero, ergo licet infra zero in directione contraria primæ augeatur & fiat Bc, tamen ſublato primo comparationis termino, Bc ſumendus erit poſitivus, & $AB + Bc = a + y = x$; qui tamen Bc ſi referatur ad primam directionem BC, daret $AB + Bc = a - y = x$, in quo caſu $a - y = a + (- y) = AB + (- BC) = AB + Bc = x$. Item dato Syſtemate baſis variabilis $AB + Bc = a + y = Ac = x$; ſi fiat $Bc = BC$, erit $AC + BC = AB = a$, ſive $x - y = a$, ſive $x + (- y) = AC - Bc = AC + BC = x + y = a$.

§. 39.

§. 39. Habemus itaque duo Syſtemata mutuo neceſſario vinculo inter ſe conſociata: primum a me appellatum *baſis datæ*, in quo ſumma variabilium æquatur datæ baſi a; alterum *baſis variabilis*, in quo non amplius ſumma, ſed ſubtractio variabilium æquatur eidem datæ a. In primo Syſtemate maximus valor utriuſque variabilis eſt a, & minimus $= 0$; ſed alternatim ſumpti. Itaque $x + y = a$, facta $AC = x$, (*fig.* 10.) & $BC = y$, erit $AC + BC = AB = x + y = a$: vel $-x - y = a$, quæ æquatio, ut dixi §. 37, nos docet factam fuiſſe variabilium permutationem, & $-x = -AC$, eſſe $BC = y$, & $-y = -BC = Bc = AC$; ac proinde $-x - y = -AC - BC = BC + AC = BA = a$, quam tamen poſitive ſumi poſſe in eodem §. oſtendi. Alterum vero dat $x - y = a$, in qua tamen, facta $y = 0$, eſt x minima $= a$, & maxima infinita: quoniam creſcente y ſemper augetur x; x indefinite augetur, cum indefinite augeri poſſit in eadem directione ſemper y; donec facta y infinita, ſit & ipſa x infinita, differentia tamen harum variabilium ſemper conſtans eſt, ſive æqualis a. Data igitur $x - y = a$; facta $Ac = x$ (*fig.* 11.), erit $Bc = y$, & $Ac - Bc = x - y = a$. Quod ſi data eſſet $-x + y = a$, tum hac æquatione oſtenditur, faciendam permutationem variabilium, ita ut quæ erat $Ac = x$, tunc ſit $-Ac = -x = Ac' = y$, in directione ſcilicet primæ $BC = y$; & $+(+Bc) = y = -c'A = -x$; unde erit $-Bc = -(y) = -(-x) = -(-c'A) = -(Ac') = -x$. Quare hoc modo facta permutatione, tranſitum fecimus a puncto A verſus c ad punctum B verſus c'; ita ut ſit $x - y = Ac - Bc = AB = a = -x - (-y) = -x + y = -Ac - (-Bc) = Bc' - (Ac') = y - x = BA = a$: ſcilicet a directione Ac transferimur hoc artificio ad directionem contrariam Bc', ac tunc y major x, ac earum differentia $= BA = a$, quæ tamen ut poſitiva ſumenda eſt, ut diximus.

§. 40. Et ſane quoniam in æquatione $x - y = a$, x & y indefinitæ ſunt, poterunt etiam ſumi ambæ infinitæ; ſed tunc quantitates infinitæ, quæ differunt quantitate finita, prout æquales ſumi poſſunt; ergo in hac hypotheſi tam pro x ſumi poteſt y, quam pro y ſumi poteſt x; ergo $x - (+y) = y - (x) = a$: ſed hoc artificio directionem, ac puncta originis, nec non variabiles permutavimus, ita ut ſit $y = Bc'$, $x = Ac'$, & $Bc' - Ac' = y - (+x) = BA = a$, quæ a cum non amplius referatur ad punctum A, ſed ad B, tamquam poſitiva accipienda eſt.

§. 41. Hiſce explicatis, ſumamus iterum hæc duo Syſtemata $x + y = a$; $x - y = a$; ex prima æquatione erit $x = a - y$, ex ſecunda erit $x = a + y$; & facto in utriſque $y = 0$, erit $x = a - 0y$ in prima; & $x = a + 0y$ in ſecunda: ſive æquationes limitis in utroque Syſtemate; at in prima $x = a$, maxima; & in ſecunda $x = a$, minima. In hoc igitur caſu ambo hæc Syſtemata inter ſe commiſcentur, & alterum pro altero aſſumi poteſt, cum ſit tam in primo $x - a = 0$, quam in ſecundo $x - a = 0$; quæ quidem inter ſe

æquan-

æquantur quoad quantitatem; utraque enim x æquatur a; ſed tamen differunt inter ſe poſitione. Nam in ($I^a.$) eſt $x - a = - oy = - oB$, in ($II^a.$) eſt $x - a = oy = oB$. At §. 25. hujuſce Capitis vidimus $- oB$ æquari oA, & oB æquari $- oA$: ergo vel erit

$$(I^a.)\ -x+a = oB;\ (II^a.)\ x - a = oB,$$

$$\text{vel } (I^a.)\ x - a = oA;\ (II^a.)\ -x+a = - oB = oA.$$

Hinc tam $- x + a = x - a = oB = - oA$,

quam $x - a = - x + a = oA = - oB$;

quæ quidem æquationes binæ & binæ ſimul ſumptæ in omnibus conveniunt, atque binæ eidem puncto zero æquantur. Porro hujuſmodi limitum æquationes, quæ inter ſe perfecte æquantur, pertinent tamen ad duo diverſa Syſtemata, ad illud ſcilicet baſis datæ, & ad illud baſis variabilis: in primo $x = a$ eſt maxima; in ſecundo $x = a$ eſt minima. Si igitur in primo fiat x major a, fit translatio ab uno Syſtemate baſis datæ ad alterum baſis variabilis: at in ſecundo, in quo x eſt minima, ſi fiat in æquatione x minor a, a Syſtemate baſis variabilis ad Syſtema baſis datæ transferimur. At utrumque data æquatione limitis contingere poteſt; ergo utrumque conſiderandum eſt.

§. 42. Hoc poſito, ſumo æquationes limitis ſuper. §. 41. $- x + a = x - a = oB = oy$; & facto $oy = y$, ſe ſe offerunt æquationes intermediæ, ſcilicet $- x + a = x - a = y$; ſcilicet $- x + a = y$; $x - a = y$: ex prima $a = x + y$, ex ſecunda $x = a + y$; prima pertinet ad Syſtema baſis datæ, ſecunda ad Syſtema baſis variabilis, atque utraque in æquationibus intermediis neceſſario ſumenda eſt: vidimus enim $x - a = o$ eſſe æquationem limitis communem tam uni, quam alteri Syſtemati: ergo in caſibus intermediis tam una, quam altera reviviſcat oportet. Data igitur prima $- x + a = y$, in qua tamquam pertinente ad Syſtema baſis datæ, x ad ſummum poteſt eſſe $= a$, valores x omnes, qui intra limites a & zero continentur, ſumi poſſunt, quin y negativus evadat. Quare decreſcente x ab a maxima uſque ad zero, creſcit inverſo modo y a zero uſque ad a: & viceverſa, ſemper eodem Syſtemate perſeverante. At ſi data eadem æquatione $- x + a = y$, fiat $- x > a$, tunc certe $- x + a$ erit valor negativus, qui non poteſt æquari y, dum poſitivus ſumatur: hic enim vera contradictio intercederet; cum uno, eodemque tempore, ac in iiſdem circumſtantiis eadem quantitas & poſitiva, & negativa ſumenda eſſet. Ut abſurdum igitur hoc evitemus, neceſſe eſt etiam y negativum ſupponere, ut æquatio ſit $- x + a = - y$, ex qua $x - a = y$, & $x = a + y$: at hoc modo a Syſtemate baſis datæ, in quo ſumma variabilium æquabatur a, ad Syſtema baſis variabilis, in quo differentia æquatur a, transferimur, & in quo x minima æquatur a, quando y æquatur zero.

§. 43. Ut igitur recte procedamus, & univerſim caſus omnes neceſſarios complectamur, alterutri ex ſequentibus viæ nobis inſiſtendum eſt. Vel enim fiat $- x + a = x - a = y$; aut $- x + a = x - a = - y$: & haben-

bentur eodem y poſitivo ſumpto, $-x+a=y$; $x-a=y$, & $a=y+x$, & $x=a+y$; vel eodem y negativo, $-x+a=-y$; $x-a=-y$, & $a+y=x$, & $x+y=a$: atque hoc modo in primo caſu prima æquatio dat Syſtema baſis datæ, ſecunda baſis variabilis: in ſecundo viceverſa. At in hac poſitione, in qua y eodem ſigno affecta ſumitur, erit $-x+a=x-a$, quæ, more communi tractata, dat $-1=1$, vel $1=-1$; & tamen eſt neceſſaria, ac nunc demum ultimæ evidentiæ. Hæc enim docet faciendam eſſe permutationem variabilis in conſtantem, & viceverſa, ut inter has perfecta æqualitas intercedat; & ut utraque Syſtemata ab utraque æquatione limitis indicata uno intuitu, ac tempore habeamus. At in prima, ſi vis, maximus valor erit $x=a$, in ſecunda minimus valor $x=a$; ac utraque in caſibus intermediis eidem $+y$, vel $-y$ æqualis ponatur: viceverſa, ſi vis, in prima minimus valor erit $x=a$, in ſecunda maximus valor $x=a$; ac utraque eidem $+y$, vel $-y$ æqualis ponatur.

§. 44. Secundus vero modus hic eſt. Quoniam Syſtema baſis datæ æquationem exhibet $x=a-y$, alterum $x=a+y$, erit ex prima $x-a=-y$; ex ſecunda $x-a=y$: hinc ſi vis $x-a=x-a$, vel

$$-x+a=-x+a, \text{ erit}$$

$y=-y$, ſive $1=-1$, & $-1=1$. Hoc eſt $x-a=y$, ſi ponas x minimam $=a$, & Syſtema $x=a+y$ baſis variabilis, vel $x-a=-y$, ſi ponas x maximam $=a$, ut fiat $-x+a=y$, & $a=y+x$ baſis conſtantis. Vel $-x+a=y$, ſi ponas x maximam $=a$, & $a=x+y$, Syſtema baſis datæ, vel $-x+a=-y$, & $a+y=x$, Syſtema baſis variabilis.

§. 45. Hinc, ſi primo utaris modo, ſcilicet æquationis $-x+a=x-a$, & quantitati x eumdem valorem tribuas, in prima facta x majore a, erit primum membrum negativa quantitas, ſecundum poſitiva: vel facta x minore a, erit primum membrum quantitas negativa, ſecundum poſitiva. Secundus vero modus dabit $x-a=x-a=y, =-y$, vel $-x+a=-x+a=-y=y$: quo docemur in utraque, ſi fiat x major vel minor a, tamen idem membrum tam y, quam $-y$ reſpondere, prout unum, vel alterum Syſtema ſumitur. Hoc tamen diſcriminis inter primum ac ſecundum intercedit, quod primo ſcilicet $x-a=-x+a$, utrumque membrum eidem poſitivo, vel negativo y æquandum ſit: ſecundo vero, tam $-x+a$, quam $x-a$ æquandum ſit $+y$ vel $-y$.

§. 46. In §. 41. datis binis Syſtematibus $x+y=a$, & $x=a+y$, deduximus facto $y=0$ æquationes limitis

(I.am)

$$(\text{I.}^{am})\ -x+a=x-a=\text{o}B=-\text{o}A$$
$$(\text{II.}^{am})\quad x-a=-x+a=\text{o}A=-\text{o}B$$

at datis Syſtematibus $x+y=a$, $y=a+x$, ac facta $x=\text{o}$ in utroque Syſtemate, habebimus æquationes limitis

$$(\text{I.}^{am})\quad y-a=-y+a=\text{o}B=-\text{o}A$$
$$(\text{II.}^{am})-y+a=y-a=\text{o}A=-\text{o}B\,;$$

in quibus tam in prima, quam in ſecunda primum membrum pertinet ad æquationem limitis Syſtematis $x+y=a$, ſecundum vero ad æquationem limitis $y=a+x$. Porro ſi hæ conferantur cum his, quæ §. 41. diximus, patebit has eſſe æquationes, quæ deſcendunt ex communi Syſtemate $x+y=a$, & eſſe in (I^a.) $-x+a=\text{o}B$, & $y-a=-\text{o}A$: quæ vero deſcendunt ex Syſtemate $x=a+y$ in (I^a.) eſſe $x-a=\text{o}B$, & $-y+a=-\text{o}A$, quæ a Syſtemate $y=a+x$ proffuit. Quare erit $-x+a=\text{o}B$, & $y-a=-\text{o}A$: ac tranſitu facto ad Syſtema generale commune, erit $-x+a=y$; $y-a=-x$; quibus docemur in eodem Syſtemate factam fuiſſe coordinatarum permutationem, & $-x$ primæ eſſe y ſecundæ $+a$ primæ; $-a$ ſecundæ $+y$ primæ eſſe $-x$ ſecundæ; ſive in prima eſſe $a=x+y$, in ſecunda $y+x=a$. Hinc ſi prima (*fig.* 11.) $AB=AC+BC$, erit ſecunda $BC+AC=BA$. Quod ſi ſumamus in prima $x-a=\text{o}B$, in ſecunda $y-a=\text{o}A$, æquatio Syſtematis in prima erit $x-a=y$, in ſecunda $y-a=x$, ſive prima $x=a+y$, ſecunda $y=a+x$. Itaque in noſtra figura ſi dicatur $x=Ac=AB+Bc=a+y$, erit ſecunda $y=Bc'=BA+Ac'=a+x$. Hoc eſt hac permutatione variabilium, licet in utriſque terminis eadem ſigna permaneant, tamen ab Ac primæ tranſitum fecimus in ſecunda ad Bc'; hoc eſt ab una directione ad alteram prorſus oppoſitam delati fuimus. In prima punctum primum originis eſt A, & directio Ac, in ſecunda punctum originis B, & directio prorſus contraria Bc'. Sed quoniam hujuſmodi Syſtemata ſeparatis æquationibus ſeparantur invicem, ſingula ut ſolitaria accipienda ſunt: ac proinde, ſi nullam inter ſe habent communionem, nulla inter ipſa intercedere debet comparatio. Quare licet hujuſmodi æquationes, quando ſunt in limite, rite inter ſe æquentur, tamen cum æquationes univerſales ſumuntur, debent ſeorſim accipi atque ſingulæ inter ſe comparari, nulla habita ratione alterius Syſtematis.

§. 47. Illud etiam obſervandum, in æquatione $-x+a=\text{o}B=y-a=-\text{o}A$ (quæ diviſa in $-x+a=\text{o}B$, & $y-a=-\text{o}A$, utraque idem Syſtema baſis datæ complectitur, ſive $a=x+y$, $y+x=a$) variabiles, quæ permutantur, ſigno contrario eſſe afficiendas; oppoſitis enim directionibus concurrunt. At in Syſtemate baſis variabilis $x-a=\text{o}B=y-a=\text{o}A$, in quo prima $x-a=y$, ſecunda $y-a=x$; ſive in prima

ma $x = a + y$, in ſecunda $y = a + x$, facta in utraque permutatione variabilium, nulla mutatione ſignorum, primum convertitur in ſecundum, & viceverſa. Erit enim $y = a + x$, $x = a + y$. At ſi mutentur etiam ſigna, ut dato $y = a + x$, fiat $- x = a - y$, ſive denuo $y = a + x$, in eodem Syſtemate continemur.

§. 48. Ut vero data æquatione limitis $x - a = 0$, quæ ad utrumque Syſtema pertinet, Syſtemata ipſa inveniamus, hoc uti poterimus artificio. Quoniam $x - a = 0$, erit $x = a$; & $a = x$: in æquatione igitur propoſita facta permutatione variabilis in datam, ac datæ in variabilem, erit $x - a = a - x$, cujus æquationis membra ſingula dum æquantur zero, ſive $x - a = a - x = 0$, æquantur inter ſe: ſed tamen utrumque; ut vidimus, ad diverſum Syſtema pertinet, ita ut ſi in uno membro x creſcit ſupra a, in altero decreſcat infra a, & viceverſa. Sed quoniam, ut vidimus, $x - a = a - x = y$, vel $x - a = a - x = - y$; erit $x - a = y$, $a - x = y$; vel $x - a = - y$, $a - x = - y$, quæ ſunt æquationes generales utriuſque Syſtematis, ſive

$$x = a + y, \qquad a = x + y$$
$$\text{vel } x + y = a, \qquad a + y = x:$$

quo facto eadem æquatio $x - a = a - x$ in duas dividitur æquationes utrumque Syſtema ſeorſim continentes, $x = a + y$, $a = x + y$, vel viceverſa; hac lege ut, facta $y = 0$, x in utraque æquatione æquetur: creſcente y creſcat x in prima, decreſcat in ſecunda; at facta y negativa Syſtemata permutantur ita, ut primum baſis variabilis in Syſtema baſis datæ, ſecundum baſis datæ in Syſtema baſis variabilis convertatur. In primo facta $y = 0$, fit $x = a$, minima; in ſecundo $x = a$, maxima: facta $y = a$, in primo $x = 2a$, in ſecundo $x = 0$, minima. Creſcente vero y ſupra a indefinite, creſcit in primo x indefinite, in ſecundo creſcit x negative & ipſa indefinite; ſive a Syſtemate baſis datæ $a = x + y$, facta $y > a$, fit $a - x = y$, ſive $a + x = y$; ſive ad Syſtema baſis variabilis $a + x = y$ tranſitus fit; in quo $y > a$, & $y = a$, valor minimus; & $x = 0$, minimus. At facta y negativa, ſecundum fit $a + y = x$, & convertitur in primum; primum vero fit $x + y = a$, in quo facta y maxima $= a$, fit x minima $= 0$: at creſcente y ſupra a, fit x negativa, & $y = a + x$, ac transferimur ad Syſtema baſis variabilis $a + x = y$, a parte oppoſita primi Syſtematis baſis variabilis.

§ 49. Itaque dato Syſtemate $x + y = a$ (in quo nec x, nec y major a, vel minor zero alternatim eſſe poſſunt, quin valor in ſignis mutetur) ſi fiat $x > a$, erit y neceſſario negativa; proindeque æquatio non amplius $x + y = a$, ſed $x - y = a$, & $x = a + y$. Similiter facta y majore a, erit x negativa, & Syſtema $- x + y = a$, & $y = a + x$. In prima hypotheſi fit tranſitus a Syſtemate baſis datæ $a =$ AB (*fig.* 10.) ad Syſtema baſis variabilis Ac: in ſecundo

ad oppoſitum B c'. At data $x = a + y$, in quo y non poteſt eſſe minor zero, ut ſit $x = a$, minima, neque umquam minor a, quin mutatio ſignorum in terminis oriatur; ſi fiat x minor a, fit y negativa; ac proinde æquatio mutatur, & eſt $x = a - y$, ſive $x + y = a$. Vel facta y negativa majore a, erit x item negativa, & æquatio $- x = a - y$, ſive $y = a + x$. In primo caſu a Syſtemate baſis variabilis $x = a + y$ ad Syſtema baſis conſtantis $x + y = a$: in ſecundo a Syſtemate baſis variabilis $x = a + y$ ad Syſtema oppoſitum baſis datæ delati fuimus.

§. 50. Nunc, antequam progredior, animadvertas velim quam anguſtis limitibus methodus paſſim uſurpata hactenus formulas analyticas concluſerit. Ac primum methodus nota docet terminos omnes unius æquationis ad unam vel ad alteram æquationis partem mutatis ſignis transferri poſſe: quo facto æquationes omnes ſemper zero æquantur: in ſequenti tamen Capite videbimus poſſe, ac in datis circumſtantiis debere æquari infinito, ſive $\frac{1}{0}$ inverſo ipſius zero. Hic tantum dico æquationes, in quibus omnes termini in una tantum parte collocantur, eſſe omnes æquationes limitis ab uno vel ab altero Syſtemate, ut notavimus, deductas; proindeque ex ſingulis utrumque Syſtema eſſe derivandum.

§. 51. At ſi methodum communem ſequamur, æquationes omnes, quæ zero æquantur, comparantur ita ut maximus terminus variabilis poſitivus ſumatur; ac in æquatione primi gradus ſemper in parte variabilis poſitivæ ponantur ceteri termini. Vel ſi etiam maximus terminus variabilis in parte negativa collocetur (quod tamen in æquationibus, quæ primum gradum ſuperant, caute vitatur); tamen non niſi unus aut alter modus eodem tempore adhibetur: dum tamen uterque in omni æquatione aſſumendus eſt. Nam data ex. gr. $x = a$, vel fit $x - a = 0$, vel $- x + a = 0$: numquam tamen fit $x - a = - x + a$, ne in æquationem $1 = - 1$, vel $- 1 = 1$ diris omnibus devotam impingatur. Tamen utrumque neceſſario adhibendum eſſe ex dictis facile eſt demonſtrare. Vidimus enim $x = a$ eſſe æquationem limitis, quæ oritur vel a Syſtemate $x + y = a$, vel a Syſtemate $x = a + y$, quorum unum vult ſummam, alterum differentiam variabilium æqualem a: hoc eſt y, poſitiva in uno caſu, fit negativa in altero, vel viceverſa: dato enim Syſtemate $x + y = a$, y hujus eſt æqualis $- y$ alterius; at dato ſecundo eſt $- y$ primi æqualis $+ y$ ſecundi. Porro morem communem ſequuti, data $x - a = 0$, ſi ponamus $x > a$, erit $x - a = y$, & facta x minore a, remanente y cum eodem ſigno, invenitur $x - a = y$, ſive negativum æquale poſitivo. Item aſſumpta $- x + a = 0$, & facta x minore a, fit $- x + a = y$; at facta $x > a$, iterum negativum æquatur poſitivo. Hoc vero ſemper eveniat neceſſe eſt, donec unam vel alteram tantum æquationem ſumamus, ac idem ſignum variabili y in quacumque ſuppoſitione valoris x relinquamus.

§. 52. Ut quod dico melius intelligatur ſit æquatio $a = x + y$, in qua

§. 49.

§. 49. obſervavimus, facta $y > a$, x debere eſſe negativam, ſive $a = -x + y$ & $a + x = y$, qua fit translatio a primo ad alterum Syſtema. At data eadem $a = x + y$, fac $y = b$, & erit $a = x + b$, in qua donec b minor eſt a, in eodem Syſtemate conſiſtimus. Ponatur modo b major a, in quo caſu, ex §. eod. 49, x debet eſſe negativa; & æquatio $a = -x + b$, ſive $a - b = -x$, & $-a + b = x$. Verum methodus communis in hoc caſu idem ſignum poſitivum in x retinet, fitque $a - b = x$, ſive negativum æquale poſitivo, niſi ad ea artificia confugias, quæ ſupra innui. Item data $x = a + y$, ſi fiat y negativa major $a = -b$, erit $-x = a - y$; & $x + a = y = b$; & $x = b - a$, poſitivum æquale poſitivo: at in methodo communi $x = a - b$; & $x + b = a$; & $x = a - b$, poſitivum æquale negativo, & viceverſa. Quid igitur mirum, ſi extracta radice oriatur imaginarium?

§. 53. Ut igitur ambages hujuſmodi evitemus, neceſſe eſt ad unam vel alteram a me præſcriptam regulam §§. 43, & 44. confugiamus: ac data $x - a = 0$, in qua $-x + a = 0$, fiat, ut docuimus §. 43, $x - a = -x + a = 0$, & $x - a = -x + a = y$; vel $x - a = -x + a = -y$. Vel $x - a = x - a = y = -y$, ut §. 44. tradidimus. Ac æquationibus ſeparatis ex §. 43. (Iª.) $x - a = y$; (IIª.) $-x + a = +y$: vel (IIIª.) $x - a = -y$; (IVª.) $-x + a = -y$: vel ex §. 44. (Vª.) $x - a = y$, (VI.ª.) $x - a = -y$, vel (VIIª.) $x - a = -y$; (VIIIª.) $x - a = y$. (Iª.) inſervit intra limites $y = 0$, & y infinitum, in qua x minima $= a$, maxima infinita: (IIª.) intra limites $x = 0$ minimæ (in quo caſu $y = a$, maxima), & $x = a$, maximæ (quando $y = 0$, minima): (IIIª.) intra limites eoſdem ac (IIª.); at $-y = -a$ maxima, $-y = 0$ minima: (IVª.) $-x = -a$ minima, $-x$ negativa indefinita, & $-y = -0$, minima, $-y$ negativa indefinita: (Vª.) eadem ac prima: (VIª.) eadem ac tertia: (VIIª.) vero ac (VIIIª.) tam poſſunt eædem eſſe ac (Vª.) & (VIª.), quam, facta variabilium permutatione, $y - a = -x$, $y - a = +x$, vel viceverſa: quarum omnium æquationum auxilio ſemper vel poſitivum æquatur poſitivo, vel negativum negativo.

§. 54. Ex hiſce tantum primis jactis fundamentis vel in ipſo Analyſeos limine jam ſtatim origo ac natura illius, quod dicitur *imaginarium*, ſponte ſeſe prodit. Nam cum quæcumque æquatio limitis, in qua ſcilicet una tantum identica ac integra indeterminata concipitur (aliter quid conſequatur ſequens Caput docebit) ad hæc duo a nobis indicata Syſtemata baſis datæ, ac variabilis neceſſario pertineat (utpote quæ eſt maxima unius, & minima alterius ex infinitis quæ intra horum Syſtematum limites continentur); in æquatione ex. gr. $x - a = 0$ limitis utriuſque Syſtematis, ſi ponamus x creſcere ſupra a, tacite ponimus $x - a = 0$ deductam fuiſſe a Syſtemate baſis variabilis $x - a = y$, ſive $x = a + y$: creſcente ſemper x ſupra a, ſemper erit y poſitiva. At ſi decreſcere velis x in-

 fra

ſra a; tunc $x - a$ negativa erit, & æquatio $x - a = -y$, ſive $-x + a = y$, quo poſito æquationem $x - a$ Syſtemati baſis datæ tacite ac neceſſario tribuiſti. Hinc facta $x - a = -x + a = 0$, in utroque Syſtemate (in uno x ſcilicet creſcente ſupra a, & decreſcente in altero x infra a) æquatio intermedia y poſitivæ, ſive $x - a = -x + a = y$, vel utraque $x - a = -x + a = -y$, eidem y negativæ æquanda erit, ut docui §. 43. Vel methodum §. 44. ſequendo, eadem ratione, erit $x - a = y = -y$.

§. 55. Hoc poſito: ſi ſumamus $x - a = -x + a = y$, & radicem extrahamus, erit $\sqrt{x - a} = \sqrt{-x + a} = \sqrt{y}$, in qua æquatione ſi ponamus x creſcere ſupra a, erit $\sqrt{x - a} = \sqrt{y}$, realis; at $\sqrt{-x + a} = \sqrt{y}$, imaginaria, ſi & in hac velis x creſcere ſupra a: quo docemur in hac ſuppoſitione x creſcentis ſupra a non niſi primam verificari poſſe. E contrario ſi in utraque decreſcere infra a variabilem x ponas, erit $\sqrt{x - a} = \sqrt{y}$, imaginaria; $\sqrt{-x + a} = \sqrt{y}$, realis. Nec mirum, ſi in utroque caſu in imaginarium impingamus. Vidimus enim æquationem $x - a = -x + a = \pm y$ ad duo Syſtemata pertinere, ita ut creſcente x in una, decreſcat in altera; & viceverſa. Quod ſi eodem ordine creſcere, vel decreſcere in utraque æquatione x ponamus (quemadmodum praxis analytica univerſim docet) quid mirum ſi, a ſuo vero Syſtemate detorta æquatione, imaginarium offendamus? Et ſane facta, in æquatione $x - a$, x minore a, tunc huic reſpondens y non eſt amplius poſitiva, ſed negativa; proindeque $x - a = -y$, & extracta radice $\sqrt{x - a} = \sqrt{-y}$; ſed x minor a, ergo $\sqrt{x - a} = \sqrt{-1 \cdot -x + a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-x + a} = \sqrt{-y} = \sqrt{-1 \cdot y}$; & facta diviſione per $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-x + a} = \sqrt{y}$; quo facto in alteram realem jam a nobis poſitam deducimur.

§. 56. Quod ſi ſecundo modo §. 44. utamur, erit $x - a = y = -y$, & $\sqrt{x - a} = \sqrt{y} = \sqrt{-y}$: ac facta x majore a, eligatur æquatio $\sqrt{x - a} = \sqrt{y}$; at facta x minore a, ſumatur $\sqrt{x - a} = \sqrt{-y}$, in qua utraque membra ſunt imaginaria; ac proinde $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-x + a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{y}$, ac eliminato diviſione imaginario $\sqrt{-1}$, tandem $\sqrt{-x + a} = \sqrt{y}$. Hinc clare deducitur imaginarium ex eo oriri, quod tacite ponitur poſitivum membrum unum æquale alteri membro negativo, vel viceverſa: ſive (quemadmodum innui in Præfatione §. 15. not. (b) & §§. ſeqq. & in not. (c)) $1 = -1$: quæ ſi abſolute abſurda eſſet, abſurdum abſo-

abſolute eſſet quicquid ex ipſa vel ad altiores poteſtates elata, vel ad inferiores depreſſa quibuſcumque artificiis deduci poſſet. Sed hæc plenius alio loco.

§. 57. Illud nunc animadverto; in calculo ſcilicet communi, in quo ex data $x - a = 0$, æquatione limitis ad æquationem indeterminatam tranſitus fit, cum non niſi $x - a = y$, vel $x - a = -y$ ponatur, non niſi unum Syſtema aſſumitur, altero perpetuo omiſſo. Quicquid igitur ex Analyſi communi eruitur, non niſi dimidiatum cenſendum eſt, cum numquam ab eadem æquatione utrumque Syſtema eodem tempore ab Analyſi, quam nunc habemus, calculo ſubjiciatur. Itaque licet utrumque ita neceſſario vinculo inter ſe colligatum ſit, ut a ſe nullo modo divelli queat; tamen cum Analyſis communis artificiis, quibus utitur, hæc duo Syſtemata ſemper inter ſe diſſociata exhibeat; in cauſa eſt, cur reale & imaginarium ita ſeparata atque inter ſe oppoſita putemus, ut nulla inter ipſa conſociatio, nullus ab uno ad alterum tranſitus intercedere poſſit.

§. 58. Fateor equidem, nec inficior, multa ac præclara artificia Analyſtis acutiſſimo ingenio præditis atque in ſubducendis calculis pene contritis, mutuum illum ac neceſſarium veritatum inter ſe nexum ſuppeditaſſe, quæ Methodorum ſublimiorum nomine donantur, quorum auxilio a Syſtemate male accepto ad proprium Syſtema vel inſcii ipſi translati imaginarium aliquando eliminare potuerunt, atque etiam nunc identidem in peculiaribus quibuſdam caſibus eliminant; ſed (ſit veritati locus) cum neque naturam harum Methodorum, nec primam earum originem, neque univerſalem earum uſum ſatis fuerint aſſequuti, non ſolum primas calculi, quem dicunt, finiti notiones ac principia in incertum, ac in arctum nimis redacta reliquerunt, ſed quo eos cumque rapit coecus calculi ductus delati, mutuam Syſtematum, quæ ſuperius docui, atque neceſſariam conſpirationem ignorarunt: quorum ignoratione neque ipſas ſublimiores Methodos, nec Analyſim finitam ab imaginario univerſim liberare potuerunt.

§. 59. Hinc factum fuit ut cum id, quod omnium conatus adhuc uſque eluſerat, tam facili, ac ſimpliciſſimo modo conſequuta mea profiteretur Mem^a. III^a. publici juris facta, tam male excepta fuerit. Liceat igitur hic eadem ſimplicitate, qua obtineri univerſim poſſe, quod jam deſperatum conſenſus omnium declaraverat, in illa evinxi, evidenter nunc demonſtrare, ut Mathematicorum attentam operam dicendis conciliem. Ac primum, ſi recte animadvertas, artificium in Mem^a. III^a. §§. 19, 20, 21 adhibitum, ut neceſſitatem illarum æquationum, quas abſurditatis inſimularunt, demonſtrarem, nihil aliud eſt niſi legitima conſequutio horum, quæ in hoc Capite ac præſertim §§. 55. & 56. oſtendi. Vidimus enim §. 55. æquationem limitis utrique Syſtemati communem, ut utrumque Syſtema, unde ea profluit, indicet, ſic (ut hoc uno tantum modo hic utar) efferri oportere; $\sqrt{x - a} = \sqrt{-x + a}$: quæ tamen omnium votis damnatur, utpote quæ reale æquat imaginario. Verum ſi ad ea, quæ dixi, diligenter attendas, conſtabit primum membrum hujuſce æquationis pertinere ad Syſtema baſis variabilis, in quo x minima $= a$; ſecundum ad Syſtema baſis datæ, in quo x maxima $= a$: qua lege ſervata in ſubſtituendo valo-

valore dato ipſius x, imaginarium omnino in utroque Syſtemate vitatur. Quod ſi contra naturam alterutrius Syſtematis in utroque membro vel ſimul creſcere ſupra a, vel ſimul decreſcere infra a ipſam x (ut moris eſt) facias; alterutrum membrum certe quidem imaginarium erit: at hoc nihil aliud ſignificat, niſi quod contra naturam Syſtematis alterutrius atque ſuppoſitionem eumdem limitem maximum vel minimum valoris a in utroque Syſtemate diverſum utrique Syſtemati male applicaſti.

§. 60. Error tamen hic mentis noſtræ nihil veritatem æquationis infirmat. Nam poſito etiam quod in utroque membro æque creſcere vel decreſcere x ſtatuatur, atque hinc neceſſario re male explorata ponatur reale æquale imaginario, ſemper tamen imaginario ſuum reſpondebit reale, vel viceverſa. Sed in hoc caſu, ut vidimus, non remanet identitas æquationis, ſed fit transmutatio Syſtematis, ut ſupra diximus. In hac itaque ſuppoſitione ut dato imaginario inveniatur reale, & viceverſa, artificio illo utamur neceſſe eſt (ut alia omittam) in mea III^{a}. Mem^{a}. loco citato adhibito. Nam (ut hic formulæ $x - a$ ſimplicitatis gratia illud applicetur, quod illic analogæ formulæ applicatum fuit) data $x - a = 0$, a qua extrahenda ſit radix: primum fac $\sqrt{x - a} = 0$, deinde facta inverſione æquationis, ut ſit $-x + a = 0$, ab hac etiam extrahe radicem, quæ erit $\sqrt{-x + a} = 0$. Hæc membra, quoniam ſingula æquantur zero, invicem æquentur; & erit $\sqrt{x - a} = \sqrt{-x + a}$; & (I^{a}.) $\sqrt{x - a} - \sqrt{-x + a} = 0$, vel utriuſque additione facta

(II^{a}.) $\sqrt{x - a} + \sqrt{-x + a} = 0$.

Ex prima oritur $\overline{1 - \sqrt{-1}}\,.\,\sqrt{x - a} = \overline{1 - \sqrt{-1}}\,.\,-\sqrt{-x + a}$;

ex ſecunda $\overline{1 + \sqrt{-1}}\,.\,\sqrt{x - a} = \overline{1 + \sqrt{-1}}\,.\,\sqrt{-x + a}$:

& facta diviſione dat (I^{a}.) $\sqrt{x - a} = -\sqrt{-x + a}$: (II^{a}.) $\sqrt{x - a} = \sqrt{-x + a}$: hæc utraque æquatio identica perſeverat, donec utraque membra æquantur zero; quælibet enim eſt æquatio limitis ſui Syſtematis. Vidimus tamen ſuperius in caſibus intermediis hæc membra diſſociari, ac in duas æquationes diſpertiri (I^{am}.) $\sqrt{x - a} = \pm\sqrt{y}$; (II^{am}.) $\sqrt{-x + a} = \pm\sqrt{y}$. Prima dat Syſtema baſis variabilis, ſi ponas $x - a = (\pm 1)^2 y = y$: ſecunda Syſtema baſis datæ, ſi $-x + a = (\pm 1)^2 y = y$. At viceverſa, factis $x - a = -\sqrt{y}\,.\,\sqrt{y} = -y$; $-x + a = -\sqrt{y}\,.\,\sqrt{y} = -y$: in primo caſu Syſte-

Syſtemata ſunt $x = a + y$; $x + y = a$

in ſecundo $x + y = a$; $a + y = x$.

Quare in eo caſu in quo una eſt imaginaria radix, alteram fac aſſumas, & omnia ad realitatem reducentur. Hoc eſt artificium illud a me in Mem^a^. III^a^. loco citato adhibitum ad imaginaria vitanda: cujus veritas, licet illic metaphyſicis rationibus evidenter non explicetur, eo tamen nititur fundamento, quo cetera analytica muniuntur: quæ proinde non erat cur inſimularetur falſitatis, aut ſilentio obrueretur. Hoc unum enim, ſi cetera in meis Opuſculis defuiſſent, ſatis fuiſſet ad confirmandum ſtrenue quod propoſitum mihi fuerat, licet evidenter non cognoſceretur.

§. 61. Ut vero negotium hoc tanti momenti in tota Analyſi magis magiſque confirmetur; juvabit diligenter ad modum attendere, quem ſervat punctum aliquod fluens, dum motu ſucceſſivo ac continuo rectam indefinitam deſcribit. Sit igitur punctum illud A (*fig.* 10.) quod a quiete diſcedens per eamdem primo ſumptam directionem procedat, ſive ad eumdem ſemper ſcopum fluendo tendat. Punctum hoc lineam rectam variabilem atque indeterminatam fluxu ſuo variabili ac indeterminato gignet, donec nullum aliud punctum datum in ipſa conſtitutum ſupponatur. Ponamus vero determinatum fuiſſe in hac linea, præter punctum A, alterum punctum B ab A diſtans, ac proinde datam diſtantiam $AB = a$. Cum duo hæc puncta determinata concipiantur, concipiatur etiam oportet præexiſtens linea AB data, tamquam via a puncto A deſcribenda fluxu ſuo, atque jam conſtituta baſis data Syſtematis, in quo duo determinata puncta A, & B, medio C variabili, dant æquationem $x + y = a$, ex qua deducitur, poſita $x = o$ A minima, eſſe BA, ſive viam deſcribendam, maximam $= a$; ac proinde $y = a$ maximam. In caſibus vero intermediis viam deſcriptam x cum deſcribenda y æquari a: ac tandem puncto C fluxo in B, jam deſcriptam fuiſſe a puncto C totam indicatam viam $= a$ intelligendum eſt: ac proinde via deſcripta maxima, deſcribenda nulla erit: ſive $x = a$ maxima; $y = o$ minima. Idem dicendum, ſed e converſo, ſi ſupponatur primum punctum B verſus A procedere.

§. 62. Donec igitur in noſtra poſitione punctum C medium eſt, nihil aliud præexiſtens ac determinatum concipi poteſt, niſi linea AB vel tota percurrenda a puncto A, vel jam partim percurſa, partim non, vel tota tandem exhauſta a puncto C ad B appulſo. Nullum igitur aliud Syſtema actu exiſtere poteſt, antequam C prætergrediatur B, niſi Syſtema baſis datæ, cum nulla alia præexiſtens ac data linea, quam baſis data AB, concepta fuerit deſcribenda. Dum igitur actu habetur Syſtema baſis datæ, nullum eſt Syſtema baſis variabilis, cum nondum Bc gigni a fluxu potuerit, dum intra limites datæ AB continetur. At rurſus procedente dextrorſum extra B (*fig.* 11.) fluxu, puta in c, tunc primum Syſtema baſis datæ in nihilum abit, atque ad Syſtema baſis variabilis progreſſio fit. Facta enim x majore a, fit permutatio baſis ac variabilium: quæ enim baſis erat in primo caſu data, fit in ſecundo variabilis, & una ex variabilibus, quarum ſumma æquabatur datæ baſi, fit data: ita ut æ-

qua-

quatio $x + y = a$ primi Syſtematis, ſi x vel y permutetur in a, & a in x vel y, fiat in primo caſu $a + y = x$, in ſecundo $x + a = y$. In primo caſu fit tranſitus a Syſtemate baſis datæ, in quo ſumma variabilium æquatur baſi a, ad Syſtema baſis variabilis Ac, in quo x major y, & differentia variabilium æqualis a: in ſecundo fit tranſitus ad Syſtema itidem baſis variabilis, ſed in parte oppoſita primo originis puncto B. En igitur quomodo ſola permutatione variabilium vel inter ſe vel cum data, fiat tranſitus tam ab uno Syſtemate ad aliud, eodem puncto originis permanente A, vel B, quam non mutata forma Syſtematis ab uno ad alterum punctum primum originis. Nam data $x + y = a$, in qua AC $= x$, BC $= y$, facta permutatione x in y, erit $y + x = a$, ſive AC fit BC, & BC fit AC: quo facto perſiſtitur quidem in eodem Syſtemate, ſed fit inverſio punctorum & baſis, ut quæ erat in primo caſu AB ſit in ſecundo BA, & viceverſa. At data iterum $x + y = a$, ſi fiat permutatio x in a, erit $a + y = x$: & hoc modo fit tranſitus a Syſtemate baſis datæ ad Syſtema baſis variabilis, eodem puncto A originis primo ſumpto permanente, ac proinde in eadem directione Ac, in qua erat primum AC. Quod ſi permutetur y in a, erit $x + a = y$, & hîc fit tranſitus non ſolum a Syſtemate baſis datæ ad Syſtema baſis variabilis, ſed etiam mutatur & directio & punctum primum originis: ita ut ſit hîc $y =$ Bc′, & Ac′ $= x$. Quare hac permutatione ex $x + y = a$ eruitur tam $x - y = a$, quam $y - x = a$: ſcilicet tam ſummam, quam differentiam variabilium æquari poſſe a eodem ſigno affectæ, tranſitu facto ab uno ad alterum Syſtema: atque hîc confirmatur quod diximus §§. 48, & 49.

§. 63. Hiſce explicatis, ſumo æquationem ſuperiorem $\sqrt{-x+a} = \sqrt{x-a} = 0$; & in caſibus intermediis $\sqrt{-x+a} = \sqrt{x-a} = \sqrt{y}$, ut vidimus §. 43, quæ diſpertitur in duas æquationes $\sqrt{-x+a} = \sqrt{y}$; $\sqrt{x-a} = \sqrt{y}$; & facta harum æquationum additione, qua duo Syſtemata ſimul uniuntur, habebimus in caſibus intermediis $\sqrt{-x+a} + \sqrt{x-a} = \sqrt{y} + \sqrt{y}$; & in limite $\sqrt{-x+a} + \sqrt{x-a} = 0 + 0$: in cujus æquationis primo radicali x non poteſt eſſe major a, in ſecundo non poteſt eſſe minor. In hiſce tamen, ſi morem communem ſequuti ſupponamus x vel majorem vel minorem a, in uno aut altero radicale imaginarium oriatur neceſſe eſt: in primo caſu erit imaginarium $\sqrt{-x+a}$, in ſecundo $\sqrt{x-a}$, cum contra naturam Syſtematis in alterutro limites a Syſtemate neceſſario conſtituti tranſiliantur: ac proinde æquatio ſupradicta hac communi ſuppoſitione imaginariis inficiatur neceſſe eſt. Illud tamen opportune accidit, quod §. antec. oſtendimus, imaginarium neceſſario in nihilum abire. Nam quando $\sqrt{-x+a}$ eſt reale, ſive x minor a, alterum Syſtema nullum neceſſario ſit oportet, cum Bc

pror-

prorſus nulla ſit, ac proinde $x - a$ erit $0 \cdot \overline{x - a} = 0$, ſive nullum prorſus Syſtema baſis variabilis, atque ideo jure ac merito ab æquatione expungendum, ut remaneat æquatio $\sqrt{- x + a} = 0$. Idem dicas velim ſi ponatur x major a, in quo caſu $\sqrt{- x + a}$ imaginaria, ſed Syſtema baſis conſtantis prorſus nullum, ſive $0 . \overline{- x + a} = 0$.

§. *64*. Non eſt igitur cur de imaginario imposterum ſolliciti ſimus: cum non ſit neceſſarium & abſolutum, quemadmodum hactenus male creditum fuit; ſed ex non recto rei, de qua agitur, judicio in Analyſim irreptum cognita prima hujuſce mali cauſſa tolli facile poteſt. Nam vel termini omnes æquationis imaginarii ſunt; & tum diviſione opportunis artificiis imaginarium eliminatur; vel termini partim ſunt reales, partim imaginarii; & in hoc caſu termini omnes imaginarii ab æquatione tolli poſſunt, cum revera non ſolum ſimul ſumpti æquentur zero, ſed ipſi ſinguli tamquam nulli cenſendi ſint, cum nullum omnino ſit Syſtema illud cui male applicantur: atque hoc modo æquatio remanet ſolis realibus conflata. Termini tamen imaginarii ſi ad realitatem, diviſione facta per $\sqrt{- 1}$, reducantur, in proprio Syſtemate collocati alteram æquationem conſtituunt. Hinc evidentiſſime confirmatur quod in meis Opuſculis editis ſæpius inculcavi, non dari ſcilicet imaginarium abſolutum, ſed cuivis imaginario ſuum reale, atque cuivis reali ſuum imaginarium reſpondeat oportere: cum imaginarium non niſi a Syſtemate non ſuo improprie ac præpoſtere ſumpto oriri hic demonſtraverimus.

§. *65*. Videtur hoc ſenſiſſe Clariſſimus de Bougainville in ſuo *Traité du Calcul integral* (Encyclop. Art. *Æquation*), quando oſtendit compoſitam plurium terminorum quantitatem zero æqualem, in qua termini partim reales, partim ducti in $\sqrt{- 1}$ reperiuntur, ita eſſe affectam, ut tam termini reales ſimul ſumpti, quam termini imaginarii ſint ſeorſim zero æquales; ac proinde quantitatem in duas diſpertiri poſſe, ſingulas tam realem quam imaginariam, æquales zero: atque hinc facile imaginarium a formula eliminari poſſe. Verum (pace tanti Viri ceterorumque, qui calculis tantum ſublimioribus non ſatis caute ſe commiſerunt) dicam ipſum, cum coeco ac a longe petito Calculo ad hanc veritatem quaſi per vim compulſus pervenerit, non potuiſſe ratione atque evidenti modo aſſequi hæc duo Syſtemata a me indicata, ea lege inter ſe conjuncta, ut quod in uno reale eſt, ſit imaginarium in altero; quod tamen imaginarium, quando reale eſt aliquid, eſt prorſus nullum. Hinc factum fuit, ut veritatem hanc maxime univerſalem, fœcundam, & maximi momenti ab impedimentis Integralis ac Differentialis Calculi extricare minime potuerit, atque ad primas uſque Analyſeos operationes magno ipſius emolumento, commodo ac progreſſu longius producere. Quod tamen a me non improſpere factum confido in mea *Nova Curvarum Geneſi* unius Calculi finiti ope, cujus ſpecimen aliquod jam in Patavina noſtra Academia protuli.

§. *66*. Profecto ſi Analyſtæ antequam ad Methodos ſublimiores ædificandas,

 ad

ad prima Calculi, quem dicunt finitum, fundamenta, a quo ſublimiores illæ originem ſuam neceſſario ac naturali ordine ducunt, animum adjeciſſent; profecto a quibuſdam pravis ac detortis opinionibus liberi, quibus prima Calculi elementa perfunctorie tractantes ſe imbuerunt, ad magis compoſita excolenda feliciori ſucceſſu accedere potuiſſent. Et ſane ſi libera ac ſincera mente omnia ex ordine ac ſucceſſive ad trutinam revocaſſent, nova hæc, quæ trado communi nunc opinioni contraria, a principiis univerſim receptis facile derivaſſent. Nam, ut aliquo exemplo utar, nonne & ab Auctore citato, & a præclariſſimis Analyſeos Magiſtris omnium Analyſtarum conſenſione demonſtratum fuit quantitates imaginarias ad hanc omnes formam reduci poſſe $m + n\sqrt{-1}$? At ab hac tamen una nullo negotio & duo hæc mea jam ſupra tradita Syſtemata, & naturam ac originem imaginarii, & modum, quo hoc tam grave in Analyſi malum vitari poſſit, quin imo in bonum converti, facile deduci poſſe ſic curſim demonſtro.

§. *67*. Ponamus $x = m + n\sqrt{-1}$: at cuique patet eſſe $\sqrt{-1} = \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$; ergo ſubſtituto hoc ultimo valore in æquatione ſuperiori pro primo $\sqrt{-1}$, erit $x = m + n \cdot \overline{\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}}$, ex qua oritur (I[a].) $x - x\sqrt{-1} = m - m\sqrt{-1} + n + n\sqrt{-1} = (m+n) + (m-n) \cdot -\sqrt{-1}$. At, per ea quæ demonſtraſſe Clariſſimum de Boungainville §. *65*. dixi, & quæ ipſe §. *63*. oſtendi, ſuperior æquatio in duas dividi debet æquationes $x = m + n$; & $-x\sqrt{-1} = (m-n) \cdot -\sqrt{-1}$: quæ, ſi recte intelligantur, dant duo noſtra Syſtemata: primum $x = m + n$ Syſtema baſis conſtantis reale; ſecundum $-x\sqrt{-1} = (m-n) \cdot -\sqrt{-1}$ Syſtema baſis variabilis imaginarium. Verum, cum ſit omnium conſenſu $-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$, formula ſuperior ſic efferri poterat $x + \frac{x}{\sqrt{-1}} = m + n + \frac{m-n}{\sqrt{-1}}$; (II[a].) $x\sqrt{-1} + x = (m+n) \cdot \sqrt{-1} + m - n$, ex qua $x\sqrt{-1} = (m+n) \cdot \sqrt{-1}$; & $x = m - n$. (I[a].) dat Syſtema baſis conſtantis imaginarium; (II[a].) Syſtema baſis variabilis reale: ita ut quod in (I[a].) Syſtema erat reale, in (II[a].) fiat imaginarium, & vice-

ver-

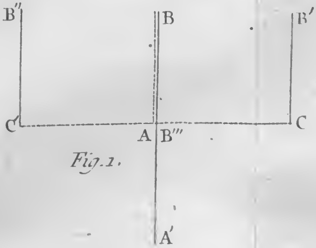


Fig. 1.

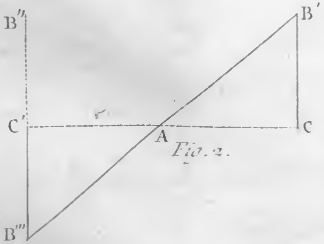


Fig. 2.

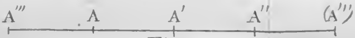


Fig. 3.

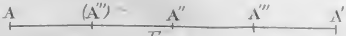


Fig. 4.

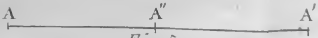


Fig. 5.



Fig. 6.

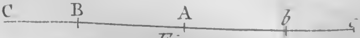


Fig. 7.

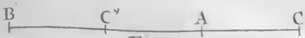


Fig. 8.



Fig. 9.

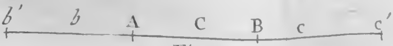


Fig. 10.

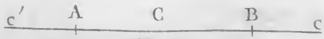


Fig. 11.

verſa. Quibus mirifice confirmantur quæ ſuperius §. 63. dixi, non poſſe ſcilicet uno eodemque tempore duo hæc Syſtemata locum ſimul habere, dum in utriſque ſimul vel creſcere vel decreſcere concipiatur variabilis; quandoquidem dato reali imaginarium in nihilum abeat oportet. Hæc tamen, quæ ſuo loco diligentius erunt excutienda, hic innuiſſe ſatis ſit, ut in anteceſſum evidenter cognoſcatur primam mali labem, quæ latius propagata totam Analyſim contaminavit, in primis elementaribus principiis latuiſſe; atque hinc fruſtra remedium in magis compoſitis quæri, niſi prius ſimpliciora ab omni errore expurgentur, atque expurgata fuſius producantur. Quo comperto confido fore ut faciliores ad cetera a me dicenda mihi aures præbeantur.

CAPUT IV.

De diviſione unius Syſtematis in plura, & de plurium in unum conjunctione.

§. 1. Vidimus Capite ſuperiori quamcumque æquationem primi gradus ex una tantum variabili, & quacumque data a conflatam, eſſe æquationem limitis ad duo illa Syſtemata pertinentem, quæ a me inventa ſunt: unum ſcilicet baſis datæ, in quo $x = a$ maxima dat $y = 0$ minimam & e contra, alterum baſis variabilis, in quo $x = a$ minima dat $y = 0$ minimam, & $x = \frac{x}{0}$ maxima dat item $y = \frac{x}{0} - a$ maximam $= \frac{y}{0}$. In primo itaque baſis datæ Syſtemate uni variabili maximæ æquali baſi ipſi datæ altera reſpondet minima $= 0$; atque ſingulorum omnium parium ſumma æquatur a: contra vero in Syſtemate baſis variabilis ambæ variabiles aut ſimul ſunt minimæ, aut ſimul maximæ, aut ſimul finitæ: minimæ tamen ita inter ſe reciprocantur, ut quando una minima æquatur a, altera ſit zero, & viceverſa; maximæ vero ſingulæ ſunt infinitæ, atque omnium tam maximarum quam minimarum paria, quam earum quæ intermediæ ſunt, inter ſe ſemper differunt quantitate data a. Hinc data æquatione limitis, ut habeantur intermediæ, utrumque Syſtema aſſumendum eſſe diximus; ut ad utrumque, quæ utriſque competit, eadem æquatio limitis referatur. Ita data $x = a$, hanc univerſim eſſe diximus vel $x + 0y = a$, vel $x - 0y = a$, quæ dat æquationes Syſtematis intermedias $x + y = a$; $x - y = a$. Atque ſi fiat in æquatione limitis $x + 0y = a$, $x = 0$, alteram e nihilo exſurgere diximus $y = a$ æquationem limitis, a qua denuo eruuntur intermediæ $y + x = a$; $y = a + x$, vel $y - x = a$: quo artificio ab una directione ad oppoſitam tranſitum fieri docuimus, quin ullum aut variabilibus aut datæ a ſignum immutetur: quod artificium a me *Methodus permutationis* appellatum fuit.

§. 2. Porro cum ab aſſumpta æquatione limitis $x = a$, in qua $y = 0$, oriatur tam $x + y = a$, quam $x = a + y$; & facta $x = 0$, ſit $y = a$ æquatio limitis *homologa*, a qua iterum $y + x = a$, & $y = a + x$ deducitur; data quacumque ex iſtis æquationibus, liberum patere aditum ad ceteras ſic demonſtro. Quoniam quæ ſunt æqualia uni tertio ſunt æqualia inter ſe, facile erit cognoſcere cum veritate apprime congruere æquationes ſequentes

I. II. III. IV. V. VI.

$$x = y = x + y = y + x = x - y = y - x = a.$$

Prima $x = a$ locum habet tam in Syſtemate baſis datæ, quam in Syſtemate baſis variabilis, poſita in primo $x = a$, maxima, $y = 0$, minima: in ſecundo $x = a$, minima, & $y = 0$, itidem minima. Secunda vero $y = a$, in qua relata ad primum Syſtema $y = a$ maxima; $x = 0$ minima: in ſecundo $y = a$ minima, & $x = 0$ minima, eadem eſt ac prima, ſi permutationem variabilium excipias, a qua oppoſitam directionem indicari CAP. ſup. §. 17. oſtendimus. Tertia, & quarta inſervit caſibus intermediis primæ ac ſecundæ in Syſtemate baſis datæ; eodem modo quinta, & ſexta reſpondet primæ ac ſecundæ ad Syſtema baſis variabilis pertinentium, quin ſignum quantitati datæ immutetur. Quare ab una ad ſingulas tranſitum fieri legitime poſſe quis non videt? dummodo probe noſcat quam mutationem ſingulæ ex iſtis æquationibus neceſſario requirant, ſi non in quantitate data, tamen in variabilibus & in directione, ac poſitione linearum.

§. 3. Hic itaque caute atque diligentiſſime tandem vitandus error ille, in quem nimis frequenter in calculis ſubducendis Analyſtæ impingunt omnes: quod ſcilicet, cum incognitam, cujus valor quæritur, eadem primum littera x vel y, & ſigno + vel — ſignaverint, atque ad primam æquationem pervenerint; male arbitrantur, mutata legitimis ſubſtitutionibus primæ æquationis forma atque in aliam transformata, incognitam, quam primo dixerunt x vel y, eamdem numero & in æquatione alio modo effecta conſtanter perſeverare, quia eadem nota ſignatam oculis vident, quæ licet eodem ſymbolo notentur, tamen in ejus valore dato differre poſſunt inter ſe mirum quantum! Error hic, meo quidem judicio maximus, qui impune in Analyſi debacchatur, in cauſſa fuit cur ſigno æqualitatis = non niſi notionem *identitatis* affixerimus, ignorata prorſus notione illa *permutationis* a me indicata; ſemperque addantur vel ſubtrahantur, & invicem multiplicentur atque dividantur &c. variabiles eadem nota ſignatæ, eo ſemper modo, quo in eadem numero quantitate addenda vel ſubducenda vel aliis operationibus ſubigenda fieri debere Arithmetica nos docet. Tamen ex dictis atque dicendis luce clarius conſtabit fieri poſſe ac debere, ut *eædem* ſint ac inter ſe *diverſæ*, & modo unius, modo alterius valoris, prout æquatio modificatur; nec poſſe arbitrio noſtro alterutram ex iſtis notionibus, repugnante ipſa æquationis mutatione actu peracta, ita illis mordicus affigere, ut alterutram repudiemus.

§. 4. Et ſane vidimus §§. 21, & 22. Cap. ſup. (*fig.* 10. *ſup. Cap.*) $x + y = x - x$, vel $x + y = -y + y$, quibus docemur tam $x + y$, quam $x - x$ ſignificare idem Syſtema baſis datæ hoc tamen diſcrimine, quod $x + y$ dat Syſtema baſis datæ, duobus punctis determinatis A, & B; C hinc inde inter A & B fluente: ſecunda vero innuit Syſtema idem, at uno tantum puncto determinato A; b & C fluentibus: in quo caſu dicta AC $= x$, erit Ab $= -x$, & earum ſumma $= a$. At $- y + y$ denotat punctum B tantum fixum; C, c variabilibus; & dicta BC $= y$, erit Bc $= -y$, & BC + Bc $= y - y$

$= a$

$= a$ & Bc $= - y$. At §. 30. ejuſdem Capit. ſup. diximus $x - x = a$, eſſe poſſe (ſine mutatione Syſtematis) $x + x = a$, vel $- x - x = a$: in primo caſu punctum datum A ſit fluens, & punctum C, quod erat fluens, ſit datum, atque tandem, ſignato puncto b ita ut ſit C$b = a$, de medio tollatur punctum A: quo facto $x - x$ (quæ erat diviſa in duas hinc inde a puncto dato A, ac proinde una poſitiva, negativa altera) ſit integra ac poſitiva $=$ Cb. Idem dabit $- x - x = a$, at mutato puncto C in b, ut ſit bC $= - x - x$, reſpectu alterius poſitionis $= a$. Quare æquationem $x = a$, quam (donec x integra conſiderata fuit, hoc eſt nullo puncto intermedio diſtincta) eſſe æquationem limitis utriuſque Syſtematis demonſtravimus, conſtat talem dici non poſſe, niſi hæc conditio integritatis ſubſiſtat: qua ſublata, ipſa ceteras Syſtematis æquationes §. 2. hujus Cap. indicatas poterit repræſentare, atque in duas diviſa variabiles æquationi propoſitæ infinitis modis ſatisfacere.

§. 5. Hinc illud non minoris neceſſitatis in tota Analyſi nondum animadverſum magno hujuſce Scientiæ impedimento, eruendum eſt: æquationem ſcilicet $x = a$, atque ceteras omnes primi gradus una tantum variabili conſtantes, in quibus adhuc uſque variabilis tamquam integra & una ſemper conſideratur (quo nomine æquationes determinatæ dicuntur); poſſe etiam ac debere ut indeterminatas conſiderari, ſi x integra ex aggregato duarum vel plurium variabilium cenſeatur conflata, in quas iterum reſolvi poſſit, ac duarum vel plurium variabilium vices ſubire; prout varia puncta in ipſa determinata pro arbitrio poni poſſunt. Quod quo modo fiat diligentius eſt inquirendum.

§. 6. Sit æquatio ſimpliciſſima primi gradus $x = a$, cui certe quidem, ſi communem methodum conſulas, nihil ad ſuam pleniorem ſolutionem deeſſe videtur. Verum æquatio hujuſmodi, quæ una tantum variabili conſtat, ſi non niſi uno tantum modo determinari poteſt, determinata & ipſa ſit oportet: hinc in methodo communi hujuſmodi æquationes determinatæ dicuntur, quod una tantum determinatio ipſis tributa fuerit. Verum in hac hypotheſi x revera non eſt fluens, nec pro tali uſurpanda, ſed data & ſemper æqualis a, & æquatio identica $a = a$. Ut igitur vere ac proprie x in propoſita æquatione naturam fluentis induat, neceſſe eſt ut ipſa x fluere poſſit, quin æquatio ipſa tollatur, ac proinde vere & proprie æquatio $x = a$ ſit & ipſa indeterminata. Porro duobus modis id obtinere fas eſt.

§. 7. Primo; æquatio $x = a$ (cum ex dictis ſit natura ſua æquatio limitis duorum Syſtematum baſis datæ, ac variabilis) illi Syſtemati applicetur, cui in ſuppoſitione x majoris, vel minoris a vere competit; eaque æquatio indeterminata duabus variabilibus conflata, quæ ſuo ac proprio Syſtemati reſpondet, aſſumatur. Hujuſce methodi in Cap. ſup. prima jecimus fundamenta. Fateor equidem nec inficior uſitatam methodum aliquando ſubſtitutione duarum variabilium a determinatis ad haſce indeterminatas nos ducere, ut hoc artificio ac Locorum geometricorum ope æquationes determinatas conſtruere poſſit. Harum tamen æquationum limitis, quæ dicuntur determinatæ, natura non bene explorata, ac prorſus ignoratis duobus Syſtematibus, ad quæ neceſſario determinata eſt

æqua-

æquatio pro vario valore variabilis x arbitrio conſtituto, nihil erui potuit, quod univerſim ad omnium æquationum determinatarum ſolutionem ampliandam conduceret. Si enim intellexiſſent id, quod ſemel indeterminatum poteſt eſſe, (licet determinatum videatur) ſemper fieri poſſe ac infinitis modis indeterminatum: facile iis fuiſſet cognoſcere æquationes (quæ dicuntur determinatæ, quia unam tantum variabilem ſpecie tenus continere videntur) revera & natura ſua & ipſas eſſe univerſim indeterminatas: atque hinc ad Methodum a me ſuperius traditam ſubſtitutione duarum variabilium, vel ad ſequentem confugiſſent.

§. 8. Quæ ſecunda in eo conſiſtit, ut eadem variabilis x in plures diviſa partes concipiatur, tamquam complexus plurium ac diverſarum variabilium ſimul ſumptarum, licet uno ſymbolo x notata integræ atque unius vicem gerat; ut proinde iterum in plures partes quæ una videbatur reſolvi poſſit. Ut ſimplici exemplo utar, æquationes $\frac{x}{2} = a$; $\frac{x}{2} = b$ ſimul additæ dabunt, æquationem $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = a + b$, atque etiam $x = a + b$. In hac x vel conſiderari poteſt ut individua, vel ut complexa: ſi accipiatur x integra & una, certe quidem non niſi unum valorem $a + b$ habere poterit. Verum quemadmodum orta fuit a duabus partialibus æquationibus ſimul additis; ita in duas iterum reſolvi poſſe, earumque vices diviſam ſubire quis inficias ibit? Porro quemadmodum æquationes partiales & ipſæ infinitis modis mutari poſſunt, quin earum ſumma mutetur (ut puta $\frac{x}{2} = a + b$; $\frac{x}{2} = b - b$; $\frac{x}{2} = \frac{a + b}{2}$; $\frac{x}{2} = \frac{a + b}{2}$; &c.) ita hujuſmodi æquatio $x = a + b$ indeterminata cenſenda eſt, ſi conſideretur tamquam complexus duarum variabilium, cum infinitæ numero dari poſſint variabiles, quæ binæ & binæ ſimul additæ æquationem propoſitam $x = a + b$ conſtituant. Secunda hæc Methodus in Analyſi communi neglecta prorſus (ſi excipias obſcura quædam indicia in Calculis ſublimioribus), ſolutionem æquationum intra anguſtiſſimos limites, repugnante ipſarum natura, coercuit. In hac igitur explicanda diligentius immoremur oportet: ut prima hujuſce Methodi fundamenta ſternamus, a qua tota pendet æquationum una variabili conſtantium, quæ dicuntur determinatæ, perfecta ſolutio atque completa Theoria.

§. 9. Data $x = a$, quam vidimus eſſe natura ſua æquationem limitis utriuſque Syſtematis $x + y = a$ baſis datæ; $x = a + y$ baſis variabilis, duobus modis pro diverſa ratione, qua x conſiderari poteſt, tractari poſſe videtur. Cum enim x æquetur a, aſſumi poteſt primum x & ipſa determinata & identica cum ſuo dato valore a, ac iiſdem prorſus affectionibus obnoxia, quibus ipſa a modificatur. Secundo modo conſiderari poteſt æqualis quidem in hoc caſu valori a, at non cum ipſo identica, ſed ut fluens atque indeterminata: quo in caſu eas vi-

vices ſubire poteſt, quas ipſa a in calculo illam ſubire jubet, quin ulla appareat in ipſo ſymbolo x, quo primum expreſſa fuit, mutatio. Primo modo additur, vel ſubtrahitur, atque demum iiſdem operationibus afficitur, quibus data a: hanc enim eamdem numero repræſentat: ſecundo modo x non mutatur in ſymbolo, per quod fluentis naturam aſſumens cuicumque quantitati æquari poteſt; valores tamen, nota x intacta manente, diverſos induit, prout diverſa conſtantis a modificatio requirit. In primo igitur caſu ſumpta (*fig.* 10.) AB $= a$ integra & una nullo puncto medio dato diſtincta, erit & ipſa x integra & una, cum ſit eadem ac a. At diviſa AB bifariam in C; erit $AB = a$ $= AC + CB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; & etiam $AC = \frac{x}{2}$, $CB = \frac{x}{2}$, & æquatio in hoc caſu $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, & univerſim $\frac{nx}{m} = \frac{na}{m}$: hoc eſt, quibus modis afficitur data a, afficiatur oportet & ipſa x. Hic unus tantum modus perpetuo uſurpatur in Analyſi communi, cum æquationes, in quibus una tantum variabilis reperitur, analyticis operationibus ſubiguntur.

§. 10. Verum ſi, ut ſecundus modus docet, x tamquam fluens a duobus hiſce ſuperius traditis Syſtematibus profecta, licet in limite determinata ſit, ad ea ipſa, a quibus deſcendit, Syſtemata referatur; tunc eadem in ſpecie manente x, ipſa tamen variabilis x fluendo infinitis modis in valore dato mutatur. Nam ſumpto Syſtemate baſis datæ $x + y = a$, & facta $y = 0$, eſt x æquatio limitis hujuſce Syſtematis: at facta $y = \frac{a}{2}$, erit $x = \frac{a}{2}$, quæ eodem ſymbolo x exprimitur, licet hic x ſit dimidia illius x, quæ eſt in æquatione prima $x = a$. At quemadmodum prima $x = a$ eſt æquatio limitis Syſtematis (ut hoc unum hic innuam) $x + y = a$; ita hæc ſecunda $x = \frac{a}{2}$ erit æquatio limitis Syſtematis $x + y = \frac{a}{2}$ baſis datæ $\frac{a}{2}$ dimidiæ primæ: & tamen eædem ſpecies x, y tam in prima, quam in ſecunda perſeverant, licet mutata ſit baſis. In prima x, vel y maxima $= a$; quibus reſpondet y, vel x minima $= 0$: in ſecunda x, vel y maxima non ſuperat dimidiam a, poſita y, vel x minima $= 0$. Æquatio igitur primitiva $x = a$, quæ, donec a integra accipitur, eſt æquatio limitis unius Syſtematis $x + y = a$, diviſa a in duas æquales partes $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ dividitur in duo Syſtemata baſis datæ $x + y + x + y$

=

$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, ac in duas æquationes $x + y = \frac{a}{2}$, $x + y = \frac{a}{2}$, quibus reſpondent æquationes limitis $x = \frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{2}$, poſito in utraque $y = 0$: vel facta $x = 0$; $y = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, quarum ſumma $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, & $x - \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = 0 + 0$, æquationes limitis; atque univerſim $(x + y) - \frac{a}{2} + (x + y) - \frac{a}{2} = 0 + 0$, quæ reſolvitur in duo Syſtemata baſis dimidiæ primi $x + y = \frac{a}{2}$, $x + y = \frac{a}{2}$, licet variabiles iiſdem omnino ſymbolis tam in æquationibus determinatis, quam in indeterminatis notentur.

§. 11. Diviſio itaque unius Syſtematis in plura, vel unio plurium in unum Syſtema, pendet a diviſione baſis integræ in plura puncta data, vel ab unione omnium ipſiuſmet lineæ partium integram lineam conſtituentium, quæ ſingulæ ſingula Syſtemata ſolitaria ante unionem conſtituebant. Quare data $x + y = a$, ac diviſa a bifariam, erit $(x + y) + (x + y) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$,
& $(x + y) + (x + y) + (x + y) + (x + y) +$ &c.
$= \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} +$ &c: ac tandem in tot Syſtemata ſolitaria baſis datæ dividi poterit prima $x + y = a$, in quot partes libet diviſam concipere ipſam lineam datam a. Contra vero facta $\frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = \frac{4a}{4} = a$ integra ſine ullo puncto dato mente diviſa, quæ erant quatuor Syſtemata ſolitaria ſingula baſis $\frac{a}{4}$, ad unum tantum Syſtema $x + y = a$ reducuntur. In quibus tamen omnibus variabiles, quæ in hac Methodo vere fluentes ſunt, iiſdem ſymbolis definiuntur, quibuſcumque tandem modis baſis dividatur, vel in plures diviſa, iterum evaneſcentibus punctis datis intermediis, ad integram redigatur.

§. 12. Et ſane donec data linea(*Tab. IV. fig.* 2.) $AB = a$ integra concipitur, non niſi duo extrema puncta data A, & B in ipſa exiſtunt, a quibus originem ſuam fixam fluentes ducere poſſint. Nullo enim dato puncto nulla origo, di-

directio nulla fluentis, ac proinde nullum fluentis initium aſſignari poteſt: dato vero puncto uno origo quidem fluentis determinatur, at directio indefinita eſt, cum terminus, ad quem fluens tendere debeat, prorſus ſit indeterminatus. At datis duobus punctis A, & B, ſive diſtantia $AB = a$; tum origo ac directio fluentis tam ex puncto A, quam ex puncto B determinatur: puncta enim A, & B fluentia in eadem directione lineæ AB duas variabiles neceſſario conſtituant oportet in puncto aliquo C ſibi invicem occurrentes. Verum, donec A verſus B, vel B verſus A procedente, C intra AB continetur, variabiles $AC + BC = x + y$ conſtituunt unum tantum Syſtema baſis datæ ab æquatione $x + y = a$ indicatum; in quo Syſtemate, ſi C cadat in B vel A, habentur æquationes limitis $AB = x = a$, $BC = y = 0$; vel $BA = y = a$, $AC = x = 0$. Quod ſi punctum C, creſcente AC vel BC ſupra AB vel BA, reperiatur extra AB, nimirum in c, vel c′; tunc in primo caſu tranſitus fit a Syſtemate baſis datæ ad Syſtema baſis variabilis $Ac = x = a + y$: in ſecundo ad alterum Syſtema baſis itidem variabilis $Bc' = y = a + x$: quæ Syſtemata æquationes tantum limitis communes habent cum altero Syſtemate baſis datæ, ut Cap. ſuper. fuſius explicavimus. In hac igitur ſuppoſitione datæ lineæ AB integræ, non niſi ad ſummum duæ variabiles ſive fluentes a duobus tantum punctis datis ortum ducentes obtineri poſſunt: atque hinc non niſi unum, vel alterum Syſtema baſis datæ, aut variabilis licet eruere.

§. 13. At ſi (*in ead. fig.*) diviſam concipiamus AB bifariam in D, ita ut ſit $a = AD + DB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, hoc eſt non amplius integra, ſed puncto tertio dato D medio diviſa; tunc præter puncta A, & B tertium D baſim integram bifariam dividens, quod erat unum Syſtema baſis integræ a, in duo Syſtemata dimidiæ baſis $\frac{a}{2}$ diſpertit, a quibus ſingulis quæ de integro Syſtemate diximus deducuntur. Hinc duo Syſtemata baſis integræ a, hoc eſt $x \pm y = a$, vel $y \pm x = a$, diviſa bifariam a, convertuntur ſingula in duo Syſtemata ſolitaria $(x \pm y) + (x \pm y) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; vel $(y \pm x) + (y \pm x) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, ex quibus oritur $(x \pm y) - \frac{a}{2} + (x \pm y) - \frac{a}{2} = 0 + 0$; vel $(y \pm x) - \frac{a}{2} + (y \pm x) - \frac{a}{2} = 0 + 0$; ex quibus eruuntur Syſtemata baſis datæ $(x + y) - \frac{a}{2} = 0$; $(y + x) - \frac{a}{2} = 0$: vel

Syſte-

Syſtemata baſis variabilis $(x - y) - \frac{a}{2} = 0$; $(y - x) - \frac{a}{2} = 0$: ut propterea quæ ante diviſionem baſis a una erat æquatio $x \pm y = a$; vel $y \pm x = a$, poſt diviſionem baſis in æquales partes ſegregetur quælibet æquatio in duas æquationes, ſingulas zero æquales, iiſdem affectionibus, ac integra a qua deſcendunt, obnoxias.

§. 14. Eodem proceſſu, diviſa data A B $= a$ in quotvis partes ab una æquatione, totidem novæ æquationes enaſcentur, a quibus ſingulis æquationes limitis, ac duo ſimul conſociata Syſtemata baſis datæ, ac variabilis erui poterunt. Ita ex. gr. data $x = a$, quæ, donec integra a concipitur, non eſt niſi una tantum æquatio limitis Syſtematis baſis datæ $x + y = a$, vel variabilis $x - y = a$; ſi fiat $a = \frac{ma}{m} = \frac{a}{m} + \frac{a}{m} + \frac{a}{m} \ldots\ldots + \frac{a}{m}$, diviſa ſcilicet in tot partes, quot unitates in m continentur, erit $x + x + x \ldots\ldots + x = \frac{a}{m} + \frac{a}{m} + \frac{a}{m} \ldots\ldots + \frac{a}{m}$; & $x - \frac{a}{m} + x - \frac{a}{m} + x - \frac{a}{m} \ldots\ldots + x - \frac{a}{m} = 0 + 0 + 0 \ldots\ldots + 0$, ſive ſingulæ $x - \frac{a}{m} = 0$: atque ita quæ erat integra $x = a$, dividitur in tot æquationes $x = \frac{a}{m}$ ſolitarias ea lege, ut ſimul ſumptæ totam a exhauriant. Sit igitur integra A B $= a$ (*fig.* 3.), & diviſa in quatuor æquales partes (hoc eſt ſit $m = 4$) dabit $AD + DC + CE + EB = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4}$, quæ novis datis punctis D, C, E dividitur in quatuor æquationes $AD = \frac{a}{4}$, $DC = \frac{a}{4}$, $CE = \frac{a}{4}$, $EB = \frac{a}{4}$: fluens enim x ab A verſus B in puncto D data hac diviſione determinato, determinatur & ipſa quæ, in prima ſuppoſitione nullo ſumpto puncto dato D, non poterat niſi in B determinari. Itaque fluens x in puncto D erit $= \frac{a}{4}$, & $x - \frac{a}{4} = 0$ æquatio limitis utriuſque Syſtematis baſis datæ, ac variabilis, a qua proinde utrumque Syſtema licet eruere. Æquatio vero $AD + DC + CE + EB = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4}$,

dabit $AD - \frac{a}{4} + DC + CE + EB = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4}$: ſed $AD - \frac{a}{4} = 0$, ergo remanet $DC + CE + EB = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4}$, a qua iterum eruitur $DC - \frac{a}{4} + CE + EB = \frac{a}{4} + \frac{a}{4}$, ſive $CE + EB = \frac{a}{4} + \frac{a}{4}$: & ſic procedendo, tandem æquationem primitivam in tot æquationes dividimus, in quot partes integram a arbitrio diviſimus. En igitur quomodo diviſione unius conſtantis æquatio primitiva in quotvis æquationes diſpertiri poſſit, quin ipſa x in ſymbolo ullam patiatur mutationem, ſed toties ipſa repetatur, in quot partes diviſa intelligatur a, & contra.

§. 15. Et ſane (juvat hoc idem urgere) vidimus ſuperius æquationem $x = a$ eſſe æquationem limitis duorum Syſtematum $x \pm 0\, y = a$: ergo in primo caſu x limitis $= x' + y$, in ſecundo $x = x' - y$: ergo $x \pm 0\, y = a = x \pm y$, ac, dividendo per 2, $\frac{x \pm 0\, y}{2} + \frac{x \pm 0\, y}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{x \pm y}{2} + \frac{x \pm y}{2}$; ergo $\frac{x \pm y}{2} = \frac{a}{2}$, & $\frac{x \pm y}{2} = \frac{a}{2}$. Hinc in primo caſu $\frac{x + y}{2} = \frac{a}{2}$, facta $y = x$, erit $\frac{x + x}{2} = \frac{2\,x}{2} = x = \frac{a}{2}$. Hoc igitur artificio ab æquatione limitis $x = a$ baſis datæ ad æquationem limitis $x = \frac{a}{2}$ tranſitum fecimus; ſive ad $x \pm 0\, y = \frac{a}{2}$, a qua iterum æquationem generalem utriuſque Syſtematis baſis datæ, vel variabilis deduci poſſe, ſive $x \pm y = \frac{a}{2}$ ex dictis ſatis conſtat.

§. 16. Superiori §. a Syſtemate baſis datæ $x + y = a$ tranſitum fecimus ad utrumque Syſtema baſis datæ, ac variabilis $x \pm y = \frac{a}{2}$. Poterit tamen a Syſtemate baſis variabilis $x - y = a$ patere aditus ad alia duo Syſtemata dimidiæ $\frac{a}{2}$, hoc modo. Quoniam $x - y = a$, erit $x = a + y$; ſed $a = x' + y$ in Syſtemate baſis datæ a, ergo $x = a + y = x' + y + y$; & facta $y = x'$

=

$= \frac{a}{2}$, erit $x = a + y = x' + y + y = x' + x' + x' = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$;

& $x - x' = x' + x' + x' - x' = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$: ergo $\frac{x - x'}{2} = \frac{x' + x'}{2}$

$= x' = \frac{a}{2}$, ac tandem $x' = \frac{a}{2}$, æquatio limitis, a qua iterum deducitur $x \pm y = \frac{a}{2}$.

§. 17. Quemadmodum ſuperius unicam æquationem $x = a$ in tot æquationes ſolitarias, ſingulas zero æquales, dividi poſſe oſtendimus, in quot partes punctis datis lubet datam a dividere: ita ab iſtis æquationibus ſolitariis, ſingulis zero æqualibus, ad unam tantum harum additione conflatam zero æqualem facilis eſt tranſitus; ſi ſingulæ datæ quantitatis a portiones ſimul ſumptæ unam tantum lineam integram ſublatis punctis datis intermediis conſtituere concipiantur. Nam poſita æquatione $x = \frac{a}{m}$, quæ eſt æquatio limitis $x \pm 0\, y = \frac{a}{m}$ pertinens ad utrumque Syſtema $x + y = \frac{a}{m}$, $x - y = \frac{a}{m}$; ſi hanc ultimam æquationem ſumamus, erit $x = \frac{a}{m} + y$, & facta $y = \overline{\frac{m-1}{m}} \times a$, erit $x = \frac{a}{m} + \overline{\frac{m-1}{m}} \times a = a$, a qua eruitur duplex æquatio $x \pm y = a$. Poſita igitur AC (*fig.* 4.) $= \frac{a}{m}$, erit $x = AC = \frac{a}{m} + 0\, y$, & $x = AC + CM = \frac{a}{m} + y$; & facta $CM = y = \overline{\frac{m-1}{m}} \times a$, erit $x = AC + CM = AM = a$, ſublato puncto medio C. Vel data æquatione $\frac{a}{m} = x + y = AN + CN = AC$, ſi ſumatur $AM = m. \frac{a}{m}$, erit $AM = a = AN + MN = x + y$, ſublato puncto dato C, ſubſtitutione puncti dati M, fluente N, ac in limite $x = a = AM$ facta $y = 0$, vel facta $x = 0$, $y = a = MA$.

§. 18. Hic primum notandum, in Syſtemate baſis datæ cujuſcumque ex. gr. (*fig.* 5.) $y + x = AN + CN = \frac{a}{2}$, facta $CN = y = 0$, inveniſſe

nos

nos $x = \frac{a}{2} = CA$: at facta $x = 0$, $y = \frac{a}{2} = AC$; (ſcilicet tam x, quam y, licet una alteri ſit in directione oppoſita, quælibet tamen æquatur poſitivæ quantitati $\frac{a}{2}$) eſtque $CA = AC$, ſive $CA = - CA$; aut $- CA = AC$. Itaque bis ſumpta $y + x = \frac{a}{2}$, ſive in directum poſitis lineis AC, CB æqualibus, erit æquatio $y + x + y + x = AN + CN + CM + BM = AC + CB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; & factis $AN = y = 0$, $CM = y = 0$, erit $x + x = CA + CB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$. Sed CA reſpectu puncti C eſt in directione contraria CB; ergo ex doctrina communi erit $CA = \frac{a}{2}$, $CB = -\frac{a}{2}$, vel viceverſa; ergo $\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ vel $x - x = - x + x = x + x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$: quo mirifice comprobatur quod ſæpius in Capitibus ſuper. oſtendi, ſcilicet $\frac{a}{2} - \frac{a}{2}$ quæ, abſtracte ſumpta, ſemper ſubtractionem ſignificare videtur, a Geometrica conſtructione ſæpe tamquam additionem uſurpari. Hinc æquatio §. 14, $x + x + x + x \ldots\ldots = \frac{a}{m} + \frac{a}{m} + \frac{a}{m} + \frac{a}{m} \ldots\ldots$, dabit etiam $\pm x \pm x \pm x \pm x \ldots = \pm \frac{a}{m} \pm \frac{a}{m} \pm \frac{a}{m} \pm \frac{a}{m} \ldots\ldots$ Sed de hoc fuſius in Capite ſequenti.

§. 19. Notandum ſecundo (cum æquatio limitis $x = a$ oriatur ab æquatione $x \pm y = a$, ſive ab $x + y = a$ Syſtematis baſis datæ, vel ab $x - y = a$ Syſtematis baſis variabilis) multum differre x unius æquationis ab altera æquationis alterius (licet utraque eodem ſymbolo x efferatur), nec niſi in unico caſu $y = 0$ variabiles haſce valore eſſe pares. Nam in primo Syſtemate x a zero orta ad ſummum æquatur a, ejuſque valores omnes intra limites zero & a continentur : in ſecundo x non minor a indefinite ſupra a creſcit nullo finito limite circumſcripta : proindeque x, quæ pertinet ad Syſtema baſis datæ, ſemper minor a; at x, quæ pertinet ad Syſtema baſis variabilis, ſemper a major, nec

nec niſi in limite prima maximo, ſecunda minimo æquantur. Quare cum veritate conſentire aperte patet æquationem $\frac{x - x'}{2} = \frac{x' + x'}{2} = x' = \frac{a}{2}$, quam §. 16. invenimus. Quin imo datis æquationibus limitis $x + 0\, y = a$, & $x - 0\, y = a$, & facta y minore $a = b$, prima dabit $x = a - b$, ſecunda $x = a + b$: in quo caſu a eſt baſis data, $y = b$. At ſi ponamus b excedere a, tunc x, quæ æquatur $a - b$ negativæ, erit & ipſa revera negativa, ac proinde non x, ſed $- x$ dicenda eſt, & $- x = a - b$, ſive $x = b - a$, & $x + a = b$, in quo caſu b eſt baſis, & $y = a$; & altera æquatio $x - a = b$, ſive $x = b + a$, in qua a hîc gerit vicem variabilis y. Quare a, prout eſt major vel minor b, datam baſim vel valorem determinatum $y = b$ repræſentat: quod diligenter erit impoſterum animadvertendum.

§. 20. Sequitur tertio in Syſtemate baſis datæ tranſitum fieri ab integro Syſtemate ad partialia Syſtemata, vel a partialibus ad integrum ac totale, diviſione vel additione baſis datæ in quotvis partes. Hinc (*figura* 3.) §. 14 ex $x = AB$ eruimus $x + x + x + x = AD + DC + CE + EB$ diviſione datæ AB in quatuor æquales partes: & e converſo additione $AD + DC + CE + EB = AB$ integræ $= x + x + x + x = x$ ab æquationibus partialibus ad integram $x = AB$ devenimus: ac proinde in hoc Syſtemate puncta extrema ſemper data ſunt, ac punctum variabile (in quo x & y ab extremis hiſce datis punctis procedentes ſibi invicem occurrunt) ſemper intra hujuſmodi data extrema puncta interjacet, cum nunquam x, vel y valorem baſis datæ excedere poſſit. Contra vero in Syſtemate baſis variabilis punctum medium C, atque alterum extremum A data ſunt, altero extremo M (*fig. 6.*) fluente, poſita $AM = x$, $CM = y$; AC data $= a$: vel punctum medium A, atque extremum C, altero extremo m fluente, poſita $Cm = y$, $Am = x$, $CA = a$, ſignis omnibus poſitivis, licet in parte oppoſita primæ ſingulæ dirigantur. Quare in hoc Syſtemate baſis variabilis puncta A, C, donec AC æquatur a, ſemper fixa ſtabilitaque manent: contra vero in Syſtemate baſis datæ origines variabilium x & y puncta (*fig. ead. 6.*) A & C ab invicem recedunt vel accedunt, prout augetur, aut minuitur baſis: atque in Syſtemate baſis datæ una vel altera variabilis in directione ſemper illi contraria procedit, qua una vel altera variabilis in Syſtemate baſis variabilis progreditur. Quare in Syſtemate baſis datæ $x + y = a$, in Syſtemate baſis variabilis $x - y = a$, vel $y - x = a$, ſive $x + y = a = AC = CA$; $x - y = AM - CM = a$, vel $y - x = Cm - Am = a$.

§. 21. Hinc quarto facile erit in Syſtemate baſis variabilis, determinato valore unius variabilis x vel y, eruere quænam ex iſtis datis ſumenda ſit pro baſi Syſtematis baſis datæ. Nam data ex. gr. $x - y = a$ in Syſtemate baſis va-

variabilis, erit $x = a + y$, & facto $y = b$ minore a, erit $x = a + b$, ac in Syſtemate baſis datæ $x + y = x + b = a$, & $x = a - b$: quare in hoc Syſtemate a erit baſis $y = b$ variabilis determinata. At ſi ponamus b majorem a, erit $x - y = b$, & $x = b + a$, ac in Syſtemate baſis datæ erit in hoc caſu b baſis, a variabilis, $y = a$ determinata, ac proinde $x + y = x + a = b$; & $x = b - a$: in quibus omnibus omnia poſitiva manent, licet directiones linearum in oppoſitam prorſus partem translatæ fuerint, & una $x = a - b$, altera $x = b - a$, utraque ſigno poſitivo notata: quemadmodum in Cap. ſequ. conſtructio manifeſte oſtendet.

§. 22. Ac tandem quinto obſervandum eſt nos in Syſtemate baſis variabilis $x - y = a$ oſtendiſſe non poſſe x eſſe minorem a, in quo caſu $y = 0$ minima; poſſe tamen utramque variabilem ad infinitum procedere eadem ſemper quantitate conſtanti inter ſe differentes. Erit igitur etiam $\frac{x}{0} - \frac{y}{0} = a$: verum ex hac una formula ajo nos & utraque Syſtemata, & variabilium permutationem, nec non diviſionem unius vel alterius Syſtematis in plura, vel plurium additionem in unum, vel denique quicquid §§. 14, 15, 16, 17, & 18. ſingillatim eruimus, derivare. Nam ſuperior formula eadem eſt ac ſequens $\frac{x}{1-1} - \frac{y}{1-1} = a$, qua intacta manente, facto tranſitu ad finitum, inveniemus $x - y = a$, ſive $x = a + y$, & facta (*fig.* 7.) $AB = a$, $BM = y$, $x = AM = a + y = AB + BM$: Quoniam vero $\frac{x}{1-1} = \frac{-1}{-1} \cdot \frac{x}{1-1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{-x}{-1+1} = \frac{-x}{-1+1}$ & $\frac{-y}{1-1} = \frac{-1}{-1} \cdot \frac{-y}{1-1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{(-)\ (-y)}{-1+1} = \frac{y}{-1+1}$, hæc eadem formula erit $\frac{-x}{-1+1} + \frac{y}{-1+1} = a$, & finitis ſumptis variabilibus $-x + y = a$, ſive $y = a + x$, ſive $y = Bm = a + x = BA + Am$: utraque licet oppoſitis directionibus ab invicem digrediatur ſigno poſitivo affecta. Item formula eadem $= \frac{x}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + \frac{y}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = a$, & $x + y = \overline{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \cdot a = \overline{1 - 1} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$: ſed vidimus ſuperius

rius $\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{2a}{2} = a$; ergo $x + y = a$, ſive $x + y = AN + BN = a = AB$, ſive $y + x = BN + AN = a = BA$: quo facto a Syſtemate baſis variabilis $a + y$, vel $a + x$ deferimur ad Syſtema baſis datæ a.

Rurſus $\frac{x}{1-1} - \frac{y}{1-1} = \frac{x}{\frac{m}{n} - \frac{m}{n}} - \frac{y}{\frac{m}{n} - \frac{m}{n}} = a$

ſive $\frac{x}{1-1} - \frac{y}{1-1} = \frac{ma}{n}$, ac in finitis $x - y = \frac{ma}{n}$, ſive a Syſtemate baſis variabilis $a + y$ ad Syſtema baſis variabilis $\frac{ma}{n} + y$, ſive ad Syſtema integrum cujuſcumque conſtantis $\frac{ma}{n}$. At $\frac{x}{1-1} - \frac{y}{1-1} = a$; ergo $\frac{mx}{m.\overline{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}} - \frac{my}{m.\overline{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}} = a$; ergo $\frac{mx}{1-1} - \frac{my}{1-1} = \frac{m}{n}.a$, ſive $mx - my = \frac{m}{n}.a$, & $x - y + x - y \ldots\ldots = \frac{a}{n} + \frac{a}{n} + \frac{a}{n} \ldots\ldots$ quemadmodum docet §. 14. tranſitu facto a Syſtemate integro ad Syſtemata partialia. Vel ſi mavis $\frac{mx}{m.\overline{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n}}} + \frac{my}{m.\overline{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n}}} = a$, ex qua $mx + my = \overline{1-1}.\frac{ma}{2n} = \frac{2ma}{2n} = \frac{ma}{n}$, & $x + y + x + y + x + y \ldots\ldots = \frac{a}{n} + \frac{a}{n} + \frac{a}{n} \ldots\ldots$ cum iiſdem ſignorum mutationibus, quas §. 18. innuit. Hæc tamen hac methodo attigiſſe ſufficiat: erunt enim, cum de Infinito Abſoluto agemus, diligentius ac fuſius enucleanda.

§. 23. Ad omnem tamen dubietatis ſpeciem omnemque erroris ſuſpicionem ab hac novitate removendam, animadvertas velim me §. 15. data æquatione $\frac{x + y}{2} = \frac{a}{2}$ jure potuiſſe ſumere y æqualem x. Cum enim $\frac{a}{2}$, conſiderata

ut integra, ſit linea nullo interjecto dato puncto diſtincta, ſed in potentia infinities dato puncto dividenda (punctum enim medium, in quod concurrunt x & y, indeterminatum eſt, cum & ipſæ indeterminatæ ponantur) ; ad ſervandam hanc unam conditionem, quam requirit æquatio, liberum cuique eſt quemcumque valorem tribuere y, vel x; dummodo ſemper ſumma harum variabilium æquetur $\frac{a}{2}$. Ergo poni poteſt $y = x$, in quo caſu punctum C in (*fig.* I.) §. 9. biſariam dividit $AB = a$, ut $\frac{x + y}{2} = \frac{x + x}{2} = \frac{AC + BC}{2}$

$$= \frac{y + y}{2} = \frac{BC + AC}{2} = \frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{2} = \frac{2AC}{2} = \frac{2BC}{2},$$ ſive

$x = y = AC = BC = \frac{a}{2}$: hoc eſt $x = AC = \frac{a}{2}$, facta $y = 0$, puncto medio in C extremum cadente; vel $y = BC = \frac{a}{2}$, facta $x = 0$, puncto medio in idem C concurrente; & eidem quantitati poſitivæ $\frac{a}{2}$ tam AC, quam BC æquales, licet oppoſita directione digrediantur. Syſtema vero integrum $x + y = a$, cujus æquatio limitis erat $x = a$, diviſum fuit in duo Syſtemata partialia dimidiæ baſis $\frac{a}{2}$ æquationis $x + y = \frac{a}{2}$, a qua eruitur æquatio limitis vel $x = \frac{a}{2} = AC$, vel $y = \frac{a}{2} = BC$.

§. 24. Similiter data $x + 0y = a$, erit $\frac{mx}{n} + \frac{m0y}{n} = \frac{ma}{n}$: & æquationes utriuſque Syſtematis univerſales $x + y = a$, $\frac{mx}{n} + \frac{my}{n} = \frac{ma}{n}$. At quoniam variabili y quemcumque valorem ipſius x licet affigere, dummodo ſemper $\frac{mx}{n} + \frac{my}{n} = \frac{ma}{n}$, ſi fiat $y = \frac{\overline{n - m}}{n} . x$, erit $\frac{mx}{n} + \frac{\overline{n - m}}{n} . x = x = \frac{ma}{n}$, quæ eſt æquatio limitis Syſtematis baſis datæ $\frac{ma}{n}$. Ergo a Syſtemate baſis datæ a ab æquatione $x = a$ indicato, ſola multiplicatione membri dati

a per

a per $\frac{m}{n}$ tranſitum fecimus ad Syſtema baſis datæ $\frac{m a}{n}$, eadem manente in ſpecie x : ac proinde ex data æquatione $x = a$ legitime deduci potuit $x = \frac{m a}{n}$, quin per $\frac{m}{n}$ multiplicetur actu incognita x : valores enim fluentes quantitatis x mutantur mutatis datis, licet eamdem invariatam formam ſpecie tenus præſeferant.

§. 25. Et ſane in æquatione $x = a$ quis non videt a, licet ad claſſem quantitatum cognitarum referatur, tamen ita eſſe indeterminatam, ut numerum quemcumque determinatum repræſentare poſſit, atque ipſius loco ſubſtitui? Porro, ut exemplo aliquo utar, ponamus $a = 5$, $m = 2$, $n = 3$: data primum $x = a$, erit $x = 5$: at quid prohibet, intacta manente x, in prædicta æquatione $x = a$, loco a ponere $\frac{2 \cdot 5}{3}$, ut ſit æquatio $x = \frac{2 \cdot 5}{3}$? Nemo quidem id fieri poſſe vetabit. Cur igitur non licebit in æquatione literali $x = a$, intacta manente x, loco a collocare $\frac{m a}{n}$? Fateor equidem data $x + 0 y = a$, utrumque membrum poſſe, ut uſuvenit, per $\frac{m}{n}$ multiplicari: ſed videndum quid primus a me indicatus, quid ſecundus ſemper ab Analyſtis uſurpatus modus ſignificet, & quænam inter utrumque differentia intercedat.

§. 26. Primo igitur a me invento modo, ſumpta $x = a$, ſi fiat $x = \frac{m a}{n}$, intelligendum eſt nos ex Syſtemate baſis datæ a, cujus æquatio $x + y = a$, additione primum facta totidem a; quot unitates continentur in m, ex integra a perveniſſe ad integram $m a$, & a Syſtemate baſis a ad Syſtema baſis $m a$, quæ diviſa in tot partes, quot unitates habet n, nos duxit ad tot numero n Syſtemata partialia, quorum unum dat æquationem limitis $x = \frac{m a}{n}$, & æquationem generalem $x + y = \frac{m a}{n}$. Hoc vero facile obtinemus ea methodo, qua ſupra uſi ſumus: nam repetita æquatione $x = a$ tot vicibus, quot unitates ſunt in m, erit $x + 0 y + x + 0 y + x + 0 y \ldots\ldots = m x + m 0 y = a + a + a \ldots\ldots = m a$, quæ, conſiderata ut integra, dabit $x + 0 y = m a$ & $x + y = m a$: & demum, diviſa $m a$ in partes numero n, ac una ex ipſis partibus accepta, hoc eſt facta $y = \overline{n - 1} \cdot x$, erit $\frac{x + y}{n}$

$= \frac{x + \overline{n - 1} . x}{n} = x = \frac{ma}{n}$: ac denique $x + y = \frac{ma}{n}$. Ex prima igitur $x = a$, additione facta totidem a, quot unitates in m continentur, ex totidem numero m partialibus Syſtematibus ad unum baſis ma pervenimus: & ab hoc diviſa ma in tot partes, quot numerus n deſignat, ad totidem Syſtemata partialia baſis $\frac{ma}{n}$ iterum deſcendimus, quarum unum dat $x + y = \frac{ma}{n}$, & $x = \frac{ma}{n}$, vel $y = \frac{ma}{n}$ in limite. Hac methodo ab una æquatione primum data unius Syſtematis æquali zero ad Syſtemata plura, & ad plures æquationes, ſingulas æquales zero, compoſitione transferimur: vel æquationem primariam ad unum Syſtema pertinentem in plura Syſtemata, & in plures æquationes ſolitarias dividimus, quæ cum ſingulæ æquentur zero, ſeorſim ſingulæ tractari poſſunt, ſive multiplicari, dividi, ad poteſtatem elevari, vel ad inferiorem deprimi, &c. quod quantum ad Analyſeos incrementum conducat, Capitibus ſequentibus, quæ de ulteriorum graduum æquationibus agent, palam fiet.

§. 27. At vero ſi communem, qua vulgo utimur, methodum in æquationibus ſolvendis conſulamus, patebit primas, quas ea docet, regulas ad id tendere, ut ita diſponantur cujuſcumque æquationis termini, ut unum membrum teneat ſola incognita omni prorſus liberata factore, alterum quantitates notæ, quæ incognitæ valorem oſtendant. Quare primum communi methodo (cum incognita ſemper tamquam una atque integra intelligatur, licet ea poſſit eſſe aggregatum vel differentia plurium variabilium eodem ſymbolo ſignatarum, quarum ſingulæ ſingulis quantitatis notæ diviſæ partibus, ut vidimus, æquentur) tacite ſupponit x ſemper unam atque individuam ab uno tantum eodemque ſemper Syſtemate deductam, cum tamen poſſit eſſe aggregatum vel differentia plurium variabilium ad plura Syſtemata pertinentium. Secundo, cum nullo factore aut diviſore afficiatur membrum notum, quin eodem modo eodemque factore afficiatur incognita in altero membro, hac ſecunda regula variabilis contra ipſius naturam, quæ ſemper fluens cenſenda eſt, eodem modo determinata ſumitur quo quantitas data; cum, mutato valore quantitati datæ diviſione vel multiplicatione cujuſcumque factoris, per eumdem factorem & ipſam x, ac ſi determinata eſſet, dividendam ſemper eſſe aut multiplicandam Analyſis communis ea lege jubeat, ut piaculum eſſet aliter agere.

§. 28. Quod ſi hujuſce univerſalis confirmatæ opinionis præcipuam originem inveſtigare velimus, noverimus hanc repetendam eſſe ab ignoratione illius veritatis a me primum Capite ſuperiori indicatæ, qua ſcilicet docemur quamcumque æquationem unius variabilis eſſe æquationem limitis ortam ab æquatione duarum ſaltem variabilium conflatam, in qua vel alterutra variabilis fit zero, vel una alteri æquata, aut opportune valore alterius modificata (quod liberum ſemper eſſe vidimus) complexum duarum ſaltem variabilium repræſentat. Ab hujuſce item veri-

veritatis ignoratione alterum conſequitur malum, quod ſcilicet æquationes omnes, in quibus una tantum variabilis reperitur, æquationes determinatæ nuncupentur, atque ut tales in Analyſi tractentur non uno plus valore donatæ, quam quem vult exponens maximus incognitæ; cum potius vera earum natura probe explorata æquationes limitis dicendæ eſſent ab æquationibus indeterminatis manantes, atque revera & ipſæ natura ſua indeterminatæ, cum liberum ſemper ſit ac eſſe debeat haſce ad primam, a qua manarunt, originem reſtituere. Quare communis methodus, quæ, falſæ cujuſdam ſimplicitatis ſpecie decepta, omnia ad unitatem redigit, & incognitam eo tractat modo quo datam, viam ſibi obſtruit ad eam, quam ſibi unam compoſitione ex pluribus efformavit, æquationem in plures iterum, ſingulas zero æquales, reſolvendam: atque ignorata prorſus æquatione limitis (quæ ſemper ad duplex ſaltem Syſtema pertinet, in uno maxima, in altero minima) aditum ſibi intercludit ad plura iterum Syſtemata deducenda ab uno Syſtemate ſolitario, quo plura Syſtemata ſæpius ipſa operationibus analyticis concluſerat: & contra. Hinc arctiſſimis tamquam vinculis per vim a cultoribus ſuis obſtricta Analyſis, quæ natura ſua infinitatem quandam in ſuis formulis complectitur, quid mirum, ſi ſæpe ac ſæpius excidat auſis, atque ipſius Geometriæ, cui præfertur, veſtigia ſæpius ſequi nequeat?

§. 29. Antequam tamen progrediens hoc quod dico magis ſemper ac magis in ſequentibus confirmem, finem huic Capiti imponam animadvertendo, ut fecimus in fine Cap. III. §. 54. & ſeqq., quam facile ſit in ipſo ſtatim meæ, qua utor, Methodi limine imaginarium illud, quod totam pene Analyſim nullo ſuffragante contaminavit, ubi lubet, eliminare. Nam poſita AB (*fig.* 2.) $= a$, ſi communem ſequamur methodum, erit quidem BA $= -a$: ſed ex mea methodo $x + y =$ AC + BC = AB $= a$, ergo facta $y = 0$, erit $x =$ AB $= a$; at facta $x = 0$, erit $y =$ BA, quam BA ſi dicimus $-a$, erit $y =$ BA $= -a$, & hoc jubente omnium Analyſtarum conſenſu. Porro ſi ab hac radicem extrahamus, incidimus ſtatim in $\sqrt{y} = \sqrt{-a}$, ſive in imaginarium illud nulla nota methodo eliminandum. Tamen ex iis, quæ dixi, ſtatim patet, quemadmodum poſita $y = 0$ eſt $x =$ AB, ita poſita $x = 0$ eſſe $y =$ BA in directione prorſus oppoſita ipſius x: ergo eadem ratione, qua fecimus BA $= -a$, erit $x = -y$, & $-x = y$. Hic vero valor pro y ſubſtitutus in ultima æquatione dabit $\sqrt{y} = \sqrt{-x} = \sqrt{-a}$; & dividendo per $\sqrt{-1}$; $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{x} = \sqrt{a}$: ergo in æquatione $\sqrt{y} = \sqrt{-a}$ poſita $-x$ pro y, erit $\sqrt{-x} = \sqrt{-a}$, & $\sqrt{x} = \sqrt{a} = \sqrt{\text{AB}}$; ex qua $x =$ AB. Vel ſumpta æquatione $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{x}$ (quoniam eſt $x = -y$) erit $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-y}$, & $\sqrt{y} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{y}$: at

ex

ex communi methodo $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$: ergo primum $1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = -1$: ſecundo $\sqrt{y} = -\sqrt{y}$, & $\sqrt{y}.\sqrt{y} = -\sqrt{y}.\sqrt{y}$, ſive $y = -y$; ſed $-y = x$, ergo $y = x$, ſive $y = a$. Vel in æquatione $\sqrt{y} = \sqrt{-1}.\sqrt{a}$, cum ſit $y = -a$, & $a = x$, erit $\sqrt{-a} = \sqrt{-1}.\sqrt{x}$, & $\sqrt{a} = \sqrt{x}$; vel $\frac{-\sqrt{a}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}.\sqrt{x}$, & $-\sqrt{a} = -\sqrt{x}$; vel $-\sqrt{a} = \sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{x} = \sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-y}$, ſive $-\sqrt{a} = \sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{y} = \sqrt{y}$, & (ponendo pro y, ut ſupra, $-y$) $-\sqrt{a} = \sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{y} = \sqrt{y}$ ſequendo communem methodum. Ex quo conſtat æquationes illas neceſſario profluere, quæ tam acriter impugnantur, quibus tamen tollitur imaginarium: quod certe in Analyſi communi nequit oriri, niſi prius ponatur $y = -a$, ſive membrum primum ſpecie tenus poſitivum æquale alteri negativo: quemadmodum in mea Præfatione §. 10. indicavi. Quomodo igitur repudiari poteſt æquatio $1 = -1$, ſi legitima dicitur æquatio $\sqrt{y} = \sqrt{-a}$? & quo potiore jure hæc eadem $1 = -1$ contra me impugnari poteſt, quando ab æquatione imaginaria, quam defendunt, invictiſſime ſuſtinetur?

§. 30. Verum ſi caute quod docet Analyſis ſub hac formula imaginaria inveſtigare velimus, noverimus vel y, quæ ſpecie tenus eſt poſitiva, ſumendam eſſe negativam, vel $-a$, quæ ſe offert negativam, ſumendam eſſe poſitivam: cum revera y, quæ eadem eſt ac BA, negativa ſit oporteat, ſi BA volumus negativam $= -a$; vel $-a$, quæ eſt eadem ac y, ſumendam eſſe poſitivam, ſi y poſitivam velimus: aut, quod idem eſt, invertendam eſſe vel quantitatem negativam ſub ſigno radicali, vel alteram ſub eodem ſigno radicali poſitivam. Ita in noſtro exemplo, erit $\sqrt{y} = \sqrt{BA}$, ſive $\sqrt{BA} = \sqrt{BA}$; ergo vel $\sqrt{-y} = \sqrt{-a}$, vel $\sqrt{y} = \sqrt{-BA} = \sqrt{-(-a)} = \sqrt{a} = \sqrt{AB}$, quo utroque modo fit variabilium permutatio, ut quæ BC diceba tur y, dicatur $x = AC$, & $AC = x$ dicatur $y = BC$; vel ceteris intactis manentibus ſumatur BA poſitiva, nullo habito reſpectu alterius directionis AB, cum punctum originis primum ſit in B verſus A, ac proinde fluxus verſus A poſitivus: quemadmodum mea palam oſtendit Methodus, quæ ex æquatione $x + y = a$ tam eruit (facta $x = 0$) $y = a = BA$, quam (facta $y = 0$) $x = a = AB$: & proinde eſt $BA = AB$, ſive $-a = a$, vel $a = -a$, ſive ambæ poſitivæ.

§. 31. Hoc idem obtinebitur, ſi ab æquatione limitis $y = -a$ ad æquationem utriuſque Syſtematis, ad quod ipſa pertinet, tranſitus fiat. Nam poſita primum $y = -a$, æquatione limitis Syſtematis baſis datæ $-a$, ab æquatio-

tione $x + y = -a$ deducta, $\sqrt{y} = \sqrt{-a}$ in hanc convertitur $\sqrt{\overline{x+y}} = \sqrt{-a}$; ſed ex dictis $x = -y$, & $y = -x$: ergo $-y - x = -a$, & $y + x = a$: ergo etiam erit $\sqrt{\overline{-y-x}} = \sqrt{-a}$; ex qua $\sqrt{\overline{y+x}} = \sqrt{a}$, facta variabilium permutatione, &, facta $x = 0$, erit $\sqrt{y} = \sqrt{a}$, æquatio limitis realis. Quod ſi ad Syſtema baſis variabilis $-x + y = -a$ referatur, in quo caſu $-x = \overline{-a + (-y)}$, in qua baſis variabilis $-a + (-y)$; erit $\sqrt{\overline{-x+y}} = \sqrt{-a}$, & facta $y = 0$, $\sqrt{-x} = \sqrt{-a}$, æquatio limitis: vel $\sqrt{\overline{x-y}} = \sqrt{a}$, & $y = 0$, $\sqrt{x} = \sqrt{a}$: quod idem orietur ſi in æquatione $\sqrt{-x} = \sqrt{-a}$ facta fuiſſet utriuſque membri inverſio.

§. 32. Item, quoniam $\sqrt{y} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$, & $\sqrt{-1} = \dfrac{1 + \sqrt{-1}}{1 - \sqrt{-1}}$, erit $\overline{1 - \sqrt{-1}} \cdot \sqrt{y} = \overline{1 + \sqrt{-1}} \cdot \sqrt{a}$, & $\sqrt{y} - \sqrt{a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$: at (per ea quæ diximus CAP. III. §. 63, & quæ in Capite hoc de diviſione unius Syſtematis in plura) erit $\sqrt{y} - \sqrt{a} = 0$, $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = 0$; a qua, facta diviſione per $\sqrt{-1}$, deſcendit $\sqrt{y} + \sqrt{a} = 0$. Vel data $\sqrt{y} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$, oritur $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{y} = -\sqrt{a}$, & $\overline{1 + \sqrt{-1}} \cdot \sqrt{y} = -\sqrt{a} \cdot \overline{1 - \sqrt{-1}}$; ergo $\sqrt{y} + \sqrt{a} = -\sqrt{-1} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$, ac denuo $\sqrt{y} + \sqrt{a} = 0$; $-\sqrt{y} + \sqrt{a} = 0$; ergo $\sqrt{y} = \pm \sqrt{a}$, & $\pm \sqrt{y} = \sqrt{a}$, omnia realia, quemadmodum §. 29. hujus Cap. oſtendebat.

§. 33. Adverte (quod animadvertiſſe inde juvabit) ex hac æquatione imaginaria $\sqrt{y} = \sqrt{-a}$ ſuperioribus artificiis æquationes ſingulas utriuſque Syſtematis $-y + a = x$ baſis datæ, & $y - a = x$ baſis variabilis (ad quas univerſim reduximus §. ſuper. æquationem limitis $y = -a$) in duos factores reales inferioris ordinis nos reſolviſſe. Nam multiplicatio factorum $\overline{\sqrt{y} + \sqrt{a}} \cdot \overline{-\sqrt{y} + \sqrt{a}}$, dat productum $-y + a = 0$; multiplicatio alterius paris factorum $\overline{\sqrt{y} - \sqrt{a}} \cdot \overline{\sqrt{y} + \sqrt{a}}$ dat productum $y - a$, æquationes limitis, quæ ſi ſingulæ ponantur æquales x, prima dabit $a = y + x$ æquationem Syſtematis baſis datæ; ſecunda $y = a + x$ æquationem Syſtematis baſis variabilis: facta vero prima, & ſecunda $= -x$, erit prima $a = y - x$, ſive $a + x = y$, Syſtema baſis variabilis, ſecunda $y + x = a$, Syſtema baſis datæ. Sed de his nunc ſatis. Hæc tamen volui in anteceſſum attingere, ut manifeſte pateret quantum hæc etiam leviter perſtricta conſpirent cum iis, quæ Cap. III. §. 54. & ſeqq. innuimus: ut horum omnium unanimi conſenſione viam nobiſmet ſternamus ad ea æquius expendenda, quæ ex compoſito de hoc imaginario ſuo loco fuſius differemus.

CA-

CAPUT V.

De legitima Syſtematum conjunctione in æquationibus linearibus.

§. 1. HIſce in anteceſſum animadverſis, ut negotium hoc, a quo tota pendet ſolutio æquationum cujuſcumque gradus una variabili conſtantium, qui eſt hujuſce Scientiæ finis præcipuus ne dicam unus, ut inquam negotium hoc tanti in Analyſi momenti certo ordine urgeamus; memoria revocemus velim jam ſuperius nos demonſtraſſe, donec data linea A B (*Tab. IV. fig.* 1.) tamquam integra concipitur, æquationes limitis $x = a =$ A B, quando $y = 0$, &, quando x eſt zero, $y =$ B A (eodem ſemper ſigno + affecta a, licet in diverſam plagam in alterutro caſu progrediatur), utraſque tam ab uno, quam ab altero Syſtemate baſis datæ, ac variabilis manare: hoc tamen diſcrimine, quod utraque a Syſtemate $x + y = a$ baſis datæ procedit; ſi x, & y reciprocantur ita, ut quando eſt $x = a$ maxima, ſit $y = 0$ minima, & viceverſa: ſi vero a Syſtemate baſis variabilis deſumantur, prima $x = a$ minima eruitur a Syſtemate baſis variabilis $x = a + y =$ A B + B C (*fig.* 8.), in quo $y = 0$BC $= 0$ item minima, & maximæ utræque infinitæ; ſed x ſemper eſt major y quantitate a: altera vero $y = a + x =$ B A + A c; in quo $y =$ B A $= a$ minima, & $x = 0$A c minima; ſed maxima y infinita major eſt maxima infinita x, quantitate a: ut præcipue §§. 40, & ſeqq. CAP. III. docuimus.

§. 2. At ſi dividatur linea bifariam in C puncto dato (*fig.* 1.), erit $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, ſive, ex dictis CAP. IV. §§. 13, & ſeqq., facta $x = x + x$, æquatio ſuperior in hanc convertitur $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, in qua quælibet x æquatur $\frac{a}{2}$, ac proinde dividit æquationem ſuperiorem, quæ erat una, in duas æquationes $x =$ A C $= \frac{a}{2} =$ C A; $x =$ C B $=$ B C $= \frac{a}{2}$, quæ ſingulæ ſeparatim conſiderari poſſunt tamquam æquationes limitis Syſtematis baſis datæ $\frac{a}{2} = x + y$, vel variabilis $x = \frac{a}{2} + y$: e quibus ſingulis ea eruuntur,

quæ

quæ de integra $x = a$ ſuper. §. diximus. Quare æquatio compoſita ex iſtis, ſive $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ conſiderari poteſt vel ut complexus duarum limitis æquationum a duobus Syſtematibus baſis datæ $\frac{a}{2}$ proficiſcentium; vel a duobus Syſtematibus ſimul ſumptis baſis variabilis; vel tandem tamquam aggregatum unius Syſtematis baſis datæ, & alterius baſis variabilis. Videndum igitur diligenter quid ex hac triplici diverſa combinatione oriatur.

§. 3. Primum tamen animadvertendum illam ex iſtis combinationibus probandam eſſe, quæ in conſtructione exhibet revera $x + x = x$; & $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$, hoc eſt quæ conſtituit $x + x$, vel $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ æqualem lineæ integræ nec abruptæ x, vel a: & quæ ſemper non ſolum in limite, ſed etiam in caſibus omnibus intermediis ſervat prædictas conditiones: ut ſemper poſſit æquatio analytica geometrice verificari, & a partialibus ab integra $x = a$ deductis ad integram iterum tranſitus fieri. Ad explorandam veritatem uniuſcujuſque combinationis indicio conſtituto, ponamus primum æquationem propoſitam $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ conſtare ex aggregato duarum æquationum limitis, quarum ſingulæ originem ducant a Syſtemate baſis datæ $\frac{a}{2}$, in quo $x = \frac{a}{2}$ maxima, $y = 0$ minima. In hac ſuppoſitione erit $x + 0y + x + 0y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; & æquatio generalis exprimens unionem duorum Syſtematum baſis datæ $\frac{a}{2}$ erit $x + y + x + y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} =$ (*fig. 9.*) $AC + BC = AC + CB = CA + CB = CA + BC$, ut ex dictis conſtat: ergo in primo caſu duo partialia Syſtemata erunt $x + y = AC$, $x + y = BC$; & ex primo $x = AC - y$, & ex ſecundo $x = BC - y$. Fiat igitur in primo $Cd = y$, & in ſecundo $CD = y$, ut ſit in primo $x = AC - Cd = Ad$; in ſecundo $x = BC - CD = BD$, earumque ſumma $x + x = AC - Cd + BC - CD = Ad + BD$, quæ neque lineam continuam, neque æqualem a conſtituit,

niſi

niſi in unico caſu, in quo $y = 0$, ſive $x + x = AC + BC$ in limite, in quo x maxima $= \frac{a}{2}$, $y = 0$.

§. 4. Sumpta vero ſecunda æquatione $x + y + x + y = AC + CB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, erit $x + y = AC$, $x + y = CB$; quæ dabunt $x = AC - y = AC - Cd = Ad$, $x = CB - y = CB - BD = CD$; & $x + x = Ad + CD$, quæ non niſi in limite verificatur, in quo $y = 0 = Cdo = BDo$, & $x + x = AC + CB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$. Tertius vero caſus, quem vult æquatio tertia $x + y + x + y = CA + CB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, dat $x + y = CA$, $x + y = CB$, & $x = CA - y = CA - Ad = Cd$; $x = CB - y = CB - BD = CD$, & $x + x = Cd + CD$. Quartus vero caſus æquationis $x + y + x + y = CA + BC$, jubet eſſe $x = CA - y = CA - Ad = Cd$, & $x = BC - y = BC - CD = BD$, & $x + x = Cd + BD$: quarum neutra conditionibus requiſitis ſatisfacit, niſi in limite, in quo x maxima $= \frac{a}{2}$, $y = 0$ minima, in quo tantum limite in tertia eſt $x + x = CA + CB$: at in quarta $x + x = BC + CA$.

§. 5. Ex dictis facile eſt cognoſcere loco x poni poſſe variabilem y: ſatis enim eſt in iſtis limitis æquationibus non x maximam $= \frac{a}{2}$, & y minimam $= 0$, ſed contra y maximam $= \frac{a}{2}$, & x minimam $= 0$ ſupponere: quo facto directiones tantum primæ hypotheſis mutantur. Hinc cum id, quod diximus de variabili x, applicari poſſit alteri variabili y, una pro altera ſumi in calculo poteſt, ſumpta $x = -y$, vel $x = y$: in utroque enim caſu res bene ſuccedit.

§. 6. Ex iſtis igitur ſingulis æquationibus quatuor hæ ſequentes proficiſcentur (*fig. ead. 9.*)

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{I.}^a) & x + x = y + y = -y - y = Ad + BD\text{: \& in limite} = AC + BC \\ (\text{II.}^a) & x + x = y + y = -y - y = Ad + CD\text{: \& in limite} = AC + CB \\ (\text{III.}^a) & x + x = y + y = -y - y = Cd + CD\text{: \& in limite} = CA + CB \\ (\text{IV.}^a) & x + x = y + y \mp -y - y = BD + Cd\text{: \& in limite} = BC + CA \end{array}\right\} 0 = \pm a$$

Omnes

Omnes tamen iſtæ quatuor æquationes conditiones propoſitas univerſim non ſervant: nulla enim earum in caſibus intermediis lineam & continuam, & æqualem a conſtituit: ſed ſolum in limite unaquæque verificatur.

§. 7. Hic tamen notandum, quod ſi (facta AB plaga poſitivorum, & BA huic contraria negativorum) ſigna, ut communis methodus docet, quantitatibus præfigantur, ſuperiores æquationes limitis in ſequentes convertuntur

(I.am) $x - x = y - y = -y + y = AC + CB$

$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$; & $-x + x = -y + y = y - y = -a$

(II.am) $x + x = y + y = -y - y = AC + CB$

$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$; & $-x - x = -y - y = y + y = -a$

(III.am) $-x + x = -y + y = y - y = AC + CB$

$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$; & $x - x = y - y = -y + y = -a$

(IV.am) $-x - x = -y - y = y + y = AC + CB$

$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$, & $x + x = y + y = y - y = -a$:

quæ omnes hac una $\pm x \pm y = \pm a$ comprehenduntur. Ex quibus omnibus evidenter eruitur quod in Capitibus ſuperioribus ſæpius inculcavi, omnes iſtas æquationes ſemper ſummam $\pm a$ conſtituere, licet contrario ſigno affectæ tam quantitates variabiles, quam datæ inter ſe æquales, ſeſe invicem deſtruere videantur. Unione tamen horum duorum Syſtematum partialium baſis utriuſque datæ $\frac{a}{2}$, in quæ dividitur unica æquatio $x = a$, $y = 0$; vel $x = 0$, $y = a$, numquam $\pm x \pm y = \pm a$ invenies, niſi in æquatione limitis $x = 0$, vel $y = 0$.

§. 8. Quod ſi data æquatio $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ ſupponatur aggregatum æquationum limitis duorum Syſtematum baſis variabilis; in quibus proinde x minima ſit æqualis $\frac{a}{2}$; ex hoc caſu quatuor æquationes ſequentes dabunt ſequentes conſtructiones eodem ordine expreſſas

(I.am) $x - y + x - y = AC + BC$: facto C d $= y$; CD $= y$ (*in fig.* 10.)

(II.am) $x - y + x - y = AC + CB$: facto CD $= y$; B d $= y$ (*in fig.* 11.)

(III.^{am}) $x - y + x - y = CA + BC$: facto $Ad = y$; $BD = y$ (*in fig.* 12.)

(IV.^{am}) $x - y + x - y = BC + CA$: facto $CD = y$; $Ad = y$ (*in fig.* 13.)

ex quibus quatuor combinationibus eruuntur æquationes

$$(I^a)\ x + x = AC + y + BC + y = AC + Cd + BC + CD = Ad + BD \text{ (fig. 10.)}$$

$$(II^a.)\ x + x = AC + y + CB + y = AC + CD + CB + Bd = AD + Cd \text{ (fig. 11.)}$$

$$(III^a.)\ x + x = CA + y + CB + y = CA + Ad + CB + BD = Cd + CD \text{ (fig. 12.)}$$

$$(IV^a.)\ x + x = BC + y + CA + y = BC + CD + CA + Ad = BD + Cd \text{ (fig. 13.)}$$

quæ neque lineam unam continuam (ſi tertiam excipias) conſtituunt, cum x, x ſuperimpoſitæ aliquam totius lineæ partem communem habeant, neque ſummam $x + x$ valori a æqualem, niſi in extremo limite, quando $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$ ſunt minimæ, conſervent.

§. 9. In altero vero limite (in quo x & y maximæ ſunt infinitæ, ea tamen lege, ut ſemper differentia $x - y = \frac{a}{2}$) ſuperiores æquationes dabunt conſtructiones exhibitas a figuris 14, 15, 12, & 16, in quibus valores $x + x$ ita abludunt a valore dato $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, ut fiant infiniti. Combinatio igitur duorum Syſtematum baſis variabilis inepta & ipſa prorſus eſt ad univerſim conſervandam ſummam variabilium x, x conſtantem & æqualem a: in iſtis tamen differentia coordinatarum ſemper conſtans perſeverat, & æqualis a, quocumque modo Syſtemata inter ſe conjungantur: quicumque enim ſit valor datus variabilis y in æquatione $x = a + y$, ſemper erit $x - y = a$.

§. 10. Reſtat tertia Syſtematis baſis datæ cum Syſtemate baſis variabilis combinatio: ac data $x = a$, & diviſa in duas æquationes limitis $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ (ut ſuperius animadvertimus) fiat tranſitus ad duo ſolitaria Syſtemata baſis datæ, ac variabilis; ac facta una $x = x + y$, altera $x = x - y$, erit

erit æquatio duo hæc Syſtemata complectens $x+y+x-y=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. Quare repetitis æquationibus §. *6.* habebimus

$$\text{I.}^{\text{am}}\left\{\begin{array}{l} x+y+x-y=AC+BC;\ \&\ x+x=AC-y+BC+y:\ \text{vel} \\ x-y+x+y=AC+BC;\ \&\ x+x=AC+y+BC-y: \end{array}\right.$$

$$\text{II.}^{\text{am}}\left\{\begin{array}{l} x+y+x-y=AC+CB;\ \&\ x+x=AC-y+CB+y:\ \text{vel} \\ x-y+x+y=AC+CB;\ \&\ x+x=AC+y+CB-y: \end{array}\right.$$

$$\text{III.}^{\text{am}}\left\{\begin{array}{l} x+y+x-y=CA+CB;\ \&\ x+x=CA-y+CB+y:\ \text{vel} \\ x-y+x+y=CA+CB;\ \&\ x+x=CA+y+CB-y: \end{array}\right.$$

$$\text{IV.}^{\text{am}}\left\{\begin{array}{l} x+y+x-y=BC+CA;\ \&\ x+x=BC-y+CA+y:\ \text{vel} \\ x-y+x+y=BC+CA;\ \&\ x+x=BC+y+CA-y: \end{array}\right.$$

§. 11. Porro ſi hujuſmodi æquationes conſtruantur, poſita primum y minori $\frac{a}{2}$, ex antecedentibus inveniemus

$$\text{I.}^{\text{am}}\left\{\begin{array}{l} x+x=AC-y+BC+y=AC-Cd+BC+Cd \\ \quad =Ad+Bd=a:\ \text{vel} \\ x+x=AC+y+BC-y=AC+CD+BC-CD \\ \quad =AD+BD=a:\ (\textit{fig. 9.}) \end{array}\right.$$

$$\text{II.}^{\text{am}}\left\{\begin{array}{l} x+x=AC-y+CB+y=AC-Cd+CB+BD \\ \quad =Ad+CD\ (\textit{fig. 17.}) \\ x+x=AC+y+CB-y=AC+Cd+CB-Bd \\ \quad =Ad+Cd\ (\textit{fig. 18.}) \end{array}\right.$$

$$\text{III.}^{\text{am}}\left\{\begin{array}{l} x+x=CA-y+CB+y=CA-Ad+CB+BD \\ \quad =Cd+CD\ (\textit{fig. 17.}) \\ x+x=CA+y+CB-y=CA+Ad+CB-BD \\ \quad =Cd+CD\ (\textit{fig. 19.}) \end{array}\right.$$

$$\text{IV.}^{\text{am}}\left\{\begin{array}{l} x+x=BC+y+CA-y=BC+CD+CA-AD \\ \quad =BD+CD\ (\textit{fig. 20.}) \\ x+x=BC-y+CA+y=BC-CD+CA+Ad \\ \quad =BD+Cd.\ (\textit{fig. 19.}) \end{array}\right.$$

Ex

Ex hiſce omnibus tamen non niſi (I.ª) univerſim & in omnibus caſibus verificatur; dummodo eaſdem prorſus numero, ac directione ſumas lineas, prout in ſingulis ſuperioribus. Puncta enim (*fig.* 9.) d, D ab oppoſitis punctis A, & B manantia cum ſibi invicem occurrant, in puncto d, vel D congrediuntur, atque commiſcentur invicem, ita ut ſit C d = C D, vel C D = C d, & revera $x + x = a = AC + BC$.

§. 12. Ex his deſcendunt nova, ac maximi momenti in tota Analyſi Corollaria, præter ea, quæ ſuperius recenſuimus. Nam vidimus tam A C, quam B C, licet ſingulæ in partem contrariam procedant, tamen eodem ſigno +, vel — affici debere. Etenim $AC = \frac{a}{2}$ eſt, reſpectu B C, $= -\frac{a}{2}$, & viceverſa $BC = \frac{a}{2}$ reſpectu A C æquatur $-\frac{a}{2}$: ſed cum ſint puncto dato C inter ſe diviſæ, non niſi a puncto proprio originis earum pendet directionis determinatio. Verum ſi B C ponamus identicam cum A C, tunc erit $AC + BC = AC - AC = BC - BC = -AC + AC$; ergo primum (*fig.* 1.)

(Iª.) $AC + BC = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = -BC - AC = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \pm a$;

in quo caſu cum ſint diverſæ A C + B C, ſemper ſummam poſitivam, vel negativam ſignificant. At ſi ponamus A C, B C identicas, erit (*fig. ead.* 1.)

(IIª.) $AC + BC = AC - AC = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = 0$; vel $-BC + BC$

$= -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = -0$;

ut quæ primo erat poſitiva, fiat negativa in ſecundo caſu, & viceverſa reſpectu ſecundæ. Quare vera erit æquatio $AC + BC = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2}$

$= \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, dummodo ſigno æqualitatis non identitatem utriuſque æquationis membri, ſed eam, quam ſæpius inculcavi in his quæ edidi, ac ſuperius tot modis demonſtravi, transformationem ſignificari rectius intelligamus.

§. 13. Ad hoc igitur negotium totum difficillimum ſane, ac hucuſque pro deſperato prorſus habitum ac neglectum, facilius pleniuſque expediendum, ad duo ſequentia diligentiſſime eſt attendendum. Primum diſtinguenda accurate eſt *æqualitas* quantitatis ab ejuſdem *identitate:* una enim linea alteri *æqualis* eſſe poteſt, quin ſit cum altera *identica*, & poteſt quidem uno eodemque tempore *æqualis* eſſe, atque *identica*. Ex hac duplici notione duplex notio deducitur, quæ ſigno = eſt affigenda. In ſecundo caſu membrum unum æquationis æquale per-

perfecte eſt alteri, quia cum hoc *identicum* prorſus eſt: in primo vero eſt omnino infinitis prope modis diverſum. Analyſtæ hactenus ſigno $=$ non niſi hanc unam *identitatis* notionem tribuerunt, etſi ſæpius ab ipſis, quos ſubducunt & probant, calculis admoniti alteram notionem huic ſigno neceſſariam ſubodorari facile poterant. Hinc ex hac duplicis notionis ignoratione difficultates omnes, atque ambages, controverſiæ, ac vera mixta falſis, & denique origo illius imaginarii adhuc ignota, ejuſque uſus non ſatis bene exploratus in Analyſim, dolentibus omnibus, nemine ſuffragante, irrepſerunt.

§. 14. Secundum non minoris momenti probe noſcendum, quandonam ſcilicet quantitates eadem nota data, vel variabili ſignatæ, ut æquales tantum ſumendæ ſint, quandonam ut identicæ, & quomodo, ac quando a ſimplici *æqualitate* ad *identitatem*, & viceverſa a calculo neceſſario ducamur. In hoc etiam graviter, ac varie in Analyſi peccatum eſt. Creditum enim uſquedum ſemper fuit eamdem ſemper determinationem, quam vel primo ſumpſimus, vel calculus præbuit, in quantitatibus datis vel variabilibus conſtanter perſeverare, licet varia calculorum operatione neceſſario cogantur aliam vicem ſubire, ac ſignificationem a prima toto cœlo diverſam aſſumere. In duobus hiſce igitur diligenter, & caute excutiendis immorandum eſt.

§. 15. Data igitur linea (*fig.* 21.) AB cujuſcumque valoris, ſed determinati a, hoc eſt extremis tantum finita punctis A, & B, nulloque puncto medio dato diſtincta, ut quantitatis integræ, ſive unitatis naturam referat; ex dictis erit tam $AB = x = a$, quam $BA = x = a$, & utraque æquatio $x = a$ eſt æquatio limitis vel Syſtematis baſis datæ $x + y = a$, vel alterius Syſtematis baſis variabilis $x = a + y$. In prima æquatione limitis $AB = x = a$ erit æquatio generalis Syſtematis baſis datæ $x + y = AD + BD = a = AB$, & $x = AD$, $y = BD$, ex quo, cum ſit x maxima $= a = AB$, & y minima $= o BD = o$, eruitur limitis æquatio prima $x = a$. Syſtema vero baſis variabilis erit $x = a + y$, & $x = a + y = AB + BD'$, & $y = BD'$: in hoc x, y maximæ fiunt infinitæ, & x minima $= a = AB$, y vero minima $= o BD'$, earumque conſtans differentia $= a$. At poſita $BA = x = a$, Syſtema baſis datæ erit $x + y = Bd + Ad = a = BA$, & $x = Bd$; $y = Ad$, & maxima in hoc caſu $x = a = BA$; minima $y = o Ad$. Syſtema vero baſis variabilis erit $x = a + y = BA + Ad'$; x, & y maximæ infinitæ, & x minima $= a = BA$, & y minima $= o Ad'$, atque earum differentia $x - y = a = BA$. Hic igitur ſtatim conſtat, licet iiſdem ſymbolis, ſigniſque afficiantur quantitates variabiles & notæ, earum tamen directiones in una æquatione eſſe prorſus oppoſitas directionibus quantitatum earumdem in altera æquatione: ac non niſi factam fuiſſe coordinatarum permutationem, ut quæ in prima dicebatur x, in ſecunda dicatur y, & viceverſa: & quæ in Syſtemate baſis datæ in uno caſu erat maxima, in ſecundo fiat minima: in Syſtemate vero baſis variabilis, quæ erat minima $= a$, fiat minima $= o$, & viceverſa.

§. 16.

§. 16. Ex Syſtemate primo baſis datæ $x + y = a =$ AB (*fig.* 1.), erit $x = a - y =$ AB $- y =$ AB — BC : &, facta $y = \frac{a}{2}$, erit $x = \frac{a}{2}$ $=$ AC. At ex Syſtemate ſecundo baſis datæ $x + y =$ BA, erit $x =$ BA $- y$ & facto $y = \frac{a}{2} =$ AC, erit $x = \frac{a}{2} =$ BC : ac ſumma harum in Syſtemate utriuſque baſis datæ $x + x =$ AC + BC $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$: ac facta prima $x = 0$, ſive AC $= 0$; $x = 0$AC + BA $= a$ integræ : facta vero ſecunda $x = 0$, ſive BC $= 0$, erit $x =$ AB + 0BC $= a$ integræ. En quomodo combinatione duorum Syſtematum ejuſdem baſis datæ a ad duo alia Syſtemata ſolitaria baſis datæ dimidiæ $\frac{a}{2}$ tranſitum fecimus ; quæ ſingula in duo Syſtemata baſis datæ, vel in duo baſis variabilis, perinde ac prima, dividi poſſunt : & quomodo ex iſtis in integrum iterum recidere liceat. Hoc vero ope puncti medii dati C, quo bifariam lineam integram AB diviſimus, obtinuimus. Illud vero notandum, cum hoc artificio æquationes limitis ſemper inveniantur, unam tantum variabilem x, vel y in calculo adhiberi poſſe ; quæ tamen, licet non continuo fluant per omnia minima ſpatia, tamen infinities indeterminatæ cenſendæ ſunt ; cum earum valores pendeant a diviſione baſis datæ in puncta data, quæ numero infinita infinitis modis, atque variis baſim datam dividere poſſunt. Nam ſi datum punctum C non ſit medium, ſed (*fig.* 22.) in C, ita ut ſit AC $= b$, erit $x + x = b + (a - b) =$ AC + BC, ſive $x =$ AC $= b$; $x =$ BC $= a - b$; & facta prima $x = 0$, $x = b - b + a$ $= a =$ AB ; vel x ſecunda $= 0$, $x = b - b + a =$ BA $= a$: quæ tamen, ſi more communi tractetur, dat $- b + (- a + b) = - b + b - a$ $= - a =$ BA.

§. 17. Sumamus nunc duo Syſtemata baſis variabilis, ſcilicet $x =$ AB + BD (*fig.* 12.) $= a + y$; $x =$ BA + Ad $= a + y$. Quoniam vero in hiſce Syſtematibus x minima æquatur a, quando y minima $= 0$; x non poteſt eſſe zero : diviſa tamen biſariam AB in C, ex dictis erit $x = x + x$ $=$ AC + CB + BD $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + y =$ AC + CD, & $x =$ AC, & $x =$ CD ſublato puncto B ; ergo dempta prima x, erit $x =$ CB + BD $= \frac{a}{2} + y$, &, facta y minima $= 0$, erit x minima $=$ CB $= \frac{a}{2}$: eodem

modo

modo in altero Syſtemate $x = BA + Ad$ inveniemus $x = CA + Ad = \frac{a}{2} + y$, & in limite minimorum $x = CA = \frac{a}{2}$, $Ad = y = 0$: atque ſumma harum æquationum limitis $x + x = CB + CA$, vel $= CA + CB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$. Hinc patet, licet CA reſpectu CB ſit negativa, vel viceverſa, tamen, quia non ſunt identicæ, eſſe ſemper $x + x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{-a}{2}$, ac proinde non zero, ſive ſubtractionem, ſed ſummam conſtituere. Quoniam vero in hac conſtructione non niſi puncta A, C, B data ſunt, limes alter maximorum dabit in utroque tam x, x, quam y, y maximas infinitas; ſed ſecundæ y, y ſunt ſemper minores primis quantitate $\frac{a}{2}$, & $x = x$, $y = y$.

§. 18. Si conferamus æquationes limitis maximi, quæ oriuntur a combinatione duorum Syſtematum baſis datæ §. *16.* cum æquationibus limitis minimi duorum Syſtematum baſis variabilis §. ſup. 17, inveniemus eas quidem inter ſe æquales, quo docemur hujuſmodi æquationes limitis oriri poſſe tam a combinatione duorum Syſtematum baſis datæ, & tum x, x maximas eſſe; quam a combinatione duorum Syſtematum baſis variabilis, ubi x, x minimarum vices ſubeunt. In primo caſu non poſſunt eſſe x, x majores $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$; in ſecundo nequeunt eſſe minores. In primo caſu igitur ex unione duorum Syſtematum baſis datæ $\frac{a}{2}$ oritur Syſtema integrum baſis item datæ, ſed duplæ $\frac{a}{2}$, in quo $x + y$, ſive $x + x = a$ ſemper æquatur $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, ſive a. In ſecundo caſu ex combinatione duorum Syſtematum baſis variabilis $\frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} + y = Cd + CD$ (*fig. ead.* 12.), oritur Syſtema integrum baſis variabilis dD, vel Dd, & $x + x - y - y = dC + DC - Ad - BD = Cd - Ad + CD - BD = CA + CB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$. In hoc igitur ſecundo caſu differentia variabilium utriuſque Syſtematis partialis baſis variabilis $\frac{a}{2} + y$, ſive $x - y + x - y = Cd - Ad + CD - BD$

conſtans eſt, & æqualis $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = CA + CB$; ſed etiam (quod diligenter eſt obſervandum) hujuſmodi differentia horum Syſtematum partialium æquatur differentiæ variabilium unius integri Syſtematis baſis variabilis $AD - BD = AB$, ſive $x - y = a$ vel alterius $Bd - Ad = BA$, ſive $x - y = a$: Hinc dato integro Syſtemate baſis variabilis $x - y = a = AB = BA$; ſi dividatur AB bifariam in C, tunc duplicandæ ſunt variabiles, & erit $x - y + x - y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$: quo facto quod erat unum Syſtema integrum baſis variabilis AD, vel Bd, dividitur in duo Syſtemata baſis variabilis $x - y = \frac{a}{2}$ hinc inde a puncto C medio.

§. 19. Inſuper notandum ex duobus Syſtematibus partialibus baſis datæ $\frac{a}{2}$ nos inveniſſe §. 16. $x + x = AC + BC$ (*fig.* 1.): ex Syſtematibus vero partialibus baſis variabilis §. 17. $x + x = CA + CB$ (*fig.* 12.): in primo caſu facta $AC = \frac{a}{2}$, $x + x = \frac{a}{2} + -\frac{a}{2}$; in ſecundo $-\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$: ſive in primo caſu puncta prima originis data x, x fluentium utriuſque Syſtematis eſſe A, B intra A, B cum extremo altero puncto variabili ſibi occurrentium: in ſecundo vero punctum commune datum originis x, x duorum Syſtematum partialium baſis variabilis eſſe C, hinc inde ad infinitum divergentibus punctis d, D. In primo caſu duo puncta data extrema A, B, medium C variabile; in ſecundo unum tantum punctum medium C datum, extrema d, D variabilia, ac ſemper magis inter ſe divergentia; cum nequeant inter ſe proximius accedere, quam diſtantia AB jubet: cum enim $x = \frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{2}$ ſint minimæ in hiſce Syſtematibus, puncta d, D non poſſunt inter ſe minori diſtantia, quam AB, ad ſe invicem accedere.

§. 20. Quare in primo caſu Syſtematis baſis datæ $AC + BC$ (*fig.* 1.) $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ ſemper in omnibus caſibus intermediis majores ſunt variabilibus $x + x$; nec niſi in limite extremo, in quo x, x maximæ iſtis æquantur: in ſecundo e contrario quantitates datæ $CA + CB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ ſemper minores variabilibus $x + x$; nec niſi in limite extremo, in quo x, x minimæ ſunt, iſtis æquan-

quantur. Hinc in primo caſu datis punctis A, B, poteſt C fieri variabilis, (*fig.* 1.) & A B integra $= a$; atque unum tantum Syſtema baſis datæ conſtituere, hoc eſt (*fig.* 23.) $x + x = x =$ AB $= a =$ AD + BD, vel alterum BA $= a =$ BD + AD: vel manente dato etiam C (*fig.* 20.), erit AC + BC = AC − CD + BC + CD $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = x + x$; quo facto unum vel alterum Syſtema baſis datæ in duo baſis datæ Syſtemata dividitur, quæ ſimul ſumpta unius, vel alterius Syſtematis integri baſis datæ a vicem gerunt. In ſecundo vero caſu, dato tantum puncto medio C, (*fig.* 12.) erit $x =$ CD, $x =$ Cd, atque ſumma $x + x =$ CD + Cd, punctis d, D variabilibus hinc inde a puncto C in oppoſita directione ad infinitum excurrentibus. At facta CD = CB + BD $= \frac{a}{2} + y$; Cd = CA + Ad $= \frac{a}{2} + y$; erit $x + x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} + y$: quibus determinantur præter C etiam puncta A, B hinc inde a puncto C: atque determinata duo Syſtemata baſis variabilis hinc inde a puncto C, in quibus x, x procedere quidem poſſunt indeterminate uſque ad infinitum, ſed minores non poſſunt eſſe ſingulæ ſingulis datis $\frac{a}{2}$: tunc enim a duobus Syſtematibus baſis variabilis ad duo Syſtemata baſis datæ tranſitus fieret, ſive ad ſuperiora Syſtemata baſis datæ $\frac{a}{2}$. Illud vero obſervandum ex duobus hiſce Syſtematibus baſis variabilis, cum x, x procedant ad infinitum, ſemper licere hinc inde a puncto C abſcindere CB, CA cujuſcumque valoris dati; ac proinde a duobus Syſtematibus baſis variabilis ad duo quæcumque Syſtemata baſis datæ cujuſcumque tranſitum fieri. Quod ſi ſupponamus integram CA + CB $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$, tum ſublato puncto dato medio C, dantur tantum puncta A, & B: hinc $x + x = x = a =$ AB; vel $x + x = x =$ BA $= a$: & æquatio $x = a$ vel eſt æquatio limitis Syſtematis baſis variabilis $x =$ AB + BD $= a + y$, vel æquatio limitis alterius $x =$ BA + AD $= a + y$. Ergo quæ in primo caſu, manentibus punctis datis A, C, B, erant complexus duorum Syſtematum baſis variabilis ſimul ſumptorum $x + x =$ CB + BD + CA + Ad $= \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} + y$, da-

bunt in ſecundo, ſublato puncto medio C, $x + x = x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} + y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + y + y = a + y = AB + BD$, vel $= BA + Bd$, hoc eſt unum tantum, vel alterum Syſtema baſis variabilis. In hoc enim caſu data integra A B, una x excedere poteſt a, vel a B verſus D, vel ab A verſus d. Et ſane invenimus ſupra $x + x = CD + Cd$: ergo facta $x + x = x$, erit etiam $x = CD + Cd = 2\,CD$, vel $2\,Cd$, & $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + y + y = \frac{2a}{2} + 2y = a + y + y = a + y = AB + BD = BA + Ad$: cum y prorſus indeterminata quemcumque valorem valeat repræſentare.

§. 21. Ex §. 18. ſcimus æquationem $x = a$, quæ eſt æquatio limitis Syſtematis vel baſis datæ, vel baſis variabilis, reſolvi poſſe in duas æquationes limitis $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ duorum Syſtematum baſis datæ, vel duorum ſimul ſumptorum baſis variabilis. Primo modo conſideratas vidimus eſſe $x + x = AC + BC$ (*fig.* 1.) $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, ſive $x = AC$; $x = BC$; ſive univerſim $x + y = AC$; $x + y = BC$; atque earum aggregatum $x + y + x + y = AC + BC = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; & $x + x = AC - y + BC - y = \frac{a}{2} - y + \frac{a}{2} - y$ (I.ª).

Secundo vero modo conſideratæ dant $x - y = CA = \frac{a}{2}$; $x - y = CB = \frac{a}{2}$; earumque complexus $x - y + x - y = CA + CB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; & $x + x = CA + y + CB + y = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} + y$ (IIª). Igitur ſumma variabilium erit ſemper $x + x = AC - y + BC - y = CA + y + CB + y$ (III.ª); eo neceſſario vinculo inter ſe copulatæ, quo æquationes limitis duorum Syſtematum baſis datæ, & baſis variabilis inter ſe conjunguntur. Hoc poſito, ſi methodum communem ſequamur, erit certe quidem $AC - y + BC - y = CA + y + CB + y$; &, facta $y = 0$, $AC + BC = CA + CB$. Verum ſi hæ more communi tractentur, eruemus æquationes in utroque caſu $1 = -1$, vel $-1 = 1$, quæ tantum abeſt ut ſint abſurdæ, ut etiam ex hac

hac mea univerſaliori Theoria doceamur quantitates, quæ ex duorum Syſtematum baſis datæ complexu oriuntur, eſſe directione prorſus oppoſitas iiſdem quantitatibus ortis ex aggregato duorum Syſtematum baſis variabilis, a quibus eodem jure manare poſſunt. Hinc erit $x = AC - y$; $x = BC - y$; $x = CA + y$; $x = CB + y$, hoc eſt eadem x, quæ eruitur ex Syſtemate baſis datæ, prorſus contraria eſt quantitati illi, cui æquatur quando eruitur a Syſtemate baſis variabilis, & e contra. Verbo; variabilium x origines in uno caſu ab extremis punctis A, & B ad centrum C; in altero a centro C ad extrema A, B directionibus prorſus oppoſitis fluendo proficiſcuntur. In primo caſu ſumma $x + y = AC$, $x + y = BC$; in ſecundo differentia $x - y = CA$, $x - y = CB$; & facta $y = 0$, erit in primo $x = AC$, $x = BC$; in ſecundo $x = CA$, $x = CB$: earumque ſumma in primo $x + x = AC + BC$, in ſecundo $x + x = CA + CB$, quas tamen, licet oppoſitas, in utroque caſu invenimus $= a$.

§. 22. Ut vero veritatem æquationis (III^a) ſuperioris §, quam neceſſariam eſſe calculo evicimus, ab omni etiam repugnantiæ ſpecie liberatam evidentiſſime demonſtremus, æquationem ſuperiorem ex duobus Syſtematibus baſis datæ conflatam iterum ſumamus: ſcilicet $x + x = AC - y + BC - y$, in qua poſuimus $y = Cd$ (*fig. 9.*), $y = CD$ diverſas, quippe ortas a duobus Syſtematibus ſolitariis baſis non identicæ, ſed in utroque æqualis $\frac{a}{2}$: ac proinde $x + x = AC - y + BC - y = AC - Cd + BC - CD = Ad + BD$, quæ ſic accepta conditionem, qua fit univerſim $x + x = \frac{2a}{2} = a$, non ſervat: proptereaque diximus §§. 6, & ſeqq. hujus Cap. unionem duorum Syſtematum baſis datæ, ſi ſtricto modo ſumatur, non niſi in limite conditionem quæſitam ſervare. Verum ſi ponamus unam y non ſolum æqualem alteri y, ſed etiam eamdem numero, hoc eſt vel $y = CD$, vel $y = Cd$: in primo caſu erit $- Cd = CD$; in ſecundo $- CD = Cd$: ergo in primo caſu $x + x = AC - Cd + BC - CD = AC + CD + BC - CD = AD + BD = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$; in ſecundo $x + x = AC - Cd + BC - CD = AC - Cd + BC + Cd = Ad + Bd = \frac{a}{2} - y + \frac{a}{2} + y$; quo facto & conditionem requiſitam univerſim ſervamus, & tranſitum facimus a duobus Syſtematibus baſis datæ ad duo Syſtemata, quorum unum baſis datæ, baſis varia-

bilis

bilis alterum; ex quorum tantum conſociatione ſumma variabilium $x+x$ conſtans manet, & æqualis $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$. En igitur quomodo facta identitate utriuſque y, æquatio prima, a qua x, x a ſolitariis Syſtematibus baſis datæ ſeorſim deſumptæ indicantur, convertitur in alteram quæ veram ac neceſſariam duorum Syſtematum unionem ſignificat. Vera igitur eſt æquatio $x+x$, $=\frac{a}{2}-y+\frac{a}{2}-y=\frac{a}{2}+y+\frac{a}{2}-y=\frac{a}{2}-y+\frac{a}{2}+y$, ſi modo quid ipſa velit recte aſſequamur: ad eam enim, quam rei natura poſtulat, unionem obtinendam, atque eamdem ſemper conditionem primariam ſervandam non ſolum æqualitas variabilium y, y ſed etiam identitas neceſſario requiritur. Hoc itaque pacto verificantur æquationes omnes §§. 10, 11, quas illic prout ortas a combinatione duorum Syſtematum ejuſdem naturæ univerſim rejecimus, quæ tamen ſingulæ ſuppoſita identitate variabilium y, y ad combinationem duorum Syſtematum, neceſſaria conditione ſervata, legitime deducuntur. In hiſce vero x, x originem punctorum diverſam habent: prima enim ab A verſus B (*fig. ead. 9.*), altera a B verſus A procedit: y, y vero ab eodem puncto medio C profectæ, a ſe invicem in oppoſita plaga digrediuntur.

§. 23. Quoniam igitur facta variabilium y, y identitate, æquatio prima in hanc mutatur $x+x=\frac{a}{2}+y+\frac{a}{2}-y=\frac{a}{2}-y+\frac{a}{2}+y=AD+BD$ $=Ad+Bd$, ſi hæc æquatio compoſita in ſua Syſtemata ſolitaria ſegregetur, erit $x=\frac{a}{2}+y$; $x=\frac{a}{2}-y$, quarum prima dat Syſtema baſis variabilis $x=\frac{a}{2}+y$, ſecunda Syſtema baſis datæ $x+y=\frac{a}{2}$: in prima y minima zero, y maxima infinita: in ſecunda y minima eſt quidem zero, ſed y maxima non poteſt excedere valorem $\frac{a}{2}$ baſis datæ. Itaque licet in ſuperiori compoſita æquatione videatur y a zero per omnes magnitudines indefinite excurrere poſſe; tamen ut & identitas variabilium y, y, & conſociata Syſtemata primo ſumpta ſerventur, y debet neceſſario intra limitem minimum zero, & maximum $\frac{a}{2}$ ſe continere, ut utriſque Syſtematibus eodem tempore ſerviat. In data igitur æquatione $x+x=\frac{a}{2}+y+\frac{a}{2}-y$, facta primum y minima $=0$, erit $x+x$

=

$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, quo in caſu x, x non identicæ, ſed æquales inter ſe fiunt, ſcilicet $x = AC = \frac{a}{2}$; $x = BC = \frac{a}{2}$. Creſcente vero x ſupra zero, erit $x + x = AD + BD$, vel $= Ad + Bd$,

& $\begin{matrix} x = AD, \\ x = BD \end{matrix}$ vel $\begin{matrix} x = Ad \\ x = Bd \end{matrix}$ ſcilicet inter ſe inæquales, & quidem infinitis modis, tam ab una, quam ab altera parte puncti medii C: hinc x numero infinitæ binæ & binæ ſumptæ ac legitime conſociatæ ſummam ſemper conſtantem $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ adæquant. Tandem facta $y = \frac{a}{2}$ valore maximo, fiunt x, x una maxima, altera minima, ſcilicet $x + x = x + 0x = AB + 0BD = a$; vel $x + x = 0x + x = 0Ad + BA = a$: quo facto combinationes omnes, & quidem infinitæ, quæ dant infinita variabilium x paria legitima, quæ pertinent ad duo Syſtemata ſupra ſumpta ſimul colligata, omnino exhauriuntur.

§. 24. Ex §§. 21, 22, & 23. diſcimus æquationem $x + x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y = AC + y + BC - y$ (*fig. ead. 9.*), in qua y, y identicæ, tranſmutari in æquationem $x + x = AC - y + BC - y$, ſuppoſitis y, y diverſis: ergo $y + y = AC - x + BC - x$: & facta x identica cum x, erit eadem ratione $y + y = AC + x + BC - x = AC - x + BC + x = AC + CD + BC - CD = AC - Cd + BC + Cd$, ut ſupra. Hoc modo igitur facta fuit coordinatarum permutatio, ut x, x, quæ prius diverſam originem a punctis diverſis A, B ſingulæ trahebant, nunc originem ab eodem puncto medio C ducentes identicæ fiant; y, y vero, quæ identicæ ab eodem puncto C prius manabant, nunc ſeorſim ſingulæ a diverſis punctis A, B profectæ vicem gerunt x, x primi caſus. Poterat etiam ab eadem æquatione $x + x = AC + y + BC - y$ eadem veritas erui hoc modo. Quoniam $x + x' = AC + y + BC - y$, erit $x - AC + x' - BC = y - y$; ſed $- AC = CA$, & $CA = BC$; $- BC = CB$, & $CB = AC$: ergo $BC + x + AC + x' = y - y$: & *in figura 9.* $\begin{matrix} BC + x = BC + Cd \\ AC + x' = AC + CD: \end{matrix}$ ſed $Cd = x = - CD = - x'$, & $CD = x' = - Cd = - x$; ergo $y - y = BC + x + AC + x' = BC - x' + AC + x' = BC + x + AC - x$. Sed identicæ $y - y = y + y'$ diverſis; ergo $y + y' = BC - x' + AC + x'$ $= BC$

$= BC + x + AC - x$, ſive $y + y' = \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2} + x = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$ $= BC - CD + AC + CD = BC + Cd + AC - Cd = BD + AD$ $= Bd + Ad$. Q. E. D.

§. 25. Hinc illud pro certo ſtatuendum, quantitates omnes ſive datas, ſive variabiles, quando diverſæ ſumuntur, aut a diverſis punctis originem trahunt (in quo caſu æquales quidem poſſunt eſſe, ſed non identicæ), ſemper ſigno + affici poſſe ac debere, quodcumque ſignum in calculo præſeferant, cum ſemper additionem poſitivam, a quacumque parte ſumantur, indicent: quando vero identicæ ſumuntur, atque ab eodem puncto originem trahere ponuntur, ſubtractionem ſemper ſignificare, licet eæ iiſdem ſignis in calculo affectas ſe ſe exhibeant. Quod enim ſuperius ſæpe oſtendimus de lineis datis AC, BC æqualibus, ſed diverſis (eſſe ſcilicet $AC + BC = CA + CB = \frac{a}{2} + {}^{-}\frac{a}{2}$ $= {}^{-}\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = {}^{-}\frac{a}{2} + {}^{-}\frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a = AB = BC$, quæ ſunt zero, dum identicæ ponuntur); id omnibus cujuſcumque generis ac naturæ quantitatibus contingere facile ex dictis colligi poteſt.

§. 26. Ex æquatione (III.ª) §. 21. deduximus æquationem limitis $x + x$ $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ univerſim eſſe $x + x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} + y$, ſive $x + x$ æquales aggregato duorum Syſtematum baſis variabilis, in quo tamen §. 8. oſtendimus $x + x$ non niſi in limite minimo æquari $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, cui tamen ſummæ differentia $x - y + x - y$ univerſim æquatur. Cum vero hujuſmodi æquationem ſubſtitutis lineis pro datis literis invenerimus §. 21. $x + x = CA + y + CB + y$ (*fig.* 12.), & $x = CA + y = \frac{a}{2} + y$, $x = CB + y = \frac{a}{2} + y$, quæ utraque dat Syſtema baſis variabilis, x in utriſque non poterit eſſe minor $\frac{a}{2}$: minima enim $y = 0$ in utriſque dat minimam itidem x, ſed æqualem $\frac{a}{2}$, ſive $x = CA = \frac{a}{2}$; $x = CB = \frac{a}{2}$: ſumma igitur variabilium $x + x$ in hac ſuppoſitione non poteſt eſſe minor ſumma $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = CA + CB$. In ceteris

vero

vero caſibus $x = CA + y = CA + Ad$; $x = CB + y = CB + BD$, & æquatio compoſita $x + x = CA + Ad + CB + BD$, & $y = Ad$; $y = BD$. In hac vero facta $y = y$, ſive $Ad = BD$, erit $x = x$, ſive $x = CA + Ad = Cd = x = CB + BD = CD$, ſive $x + x = Cd + CD$, quæ, donec ita diſpoſitæ ſunt variabiles x, x, a communi puncto C originem ducunt, & æquantur quidem inter ſe, ſed non ſunt identicæ, cum oppoſitis directionibus ab eodem puncto C digrediantur: atque in hoc caſu ſumma $x + x = Cd + CD$ maxima infinitum prorſus utrinque a puncto C attingit.

§. 27. Quod ſi in æquatione compoſita $x + x = CA + y + CB + y$, CA ſit identica cum CB; quoniam $CB = - CA$, tum ſumma $CA + CB$ convertitur in ſubtractionem, & $CA - CA = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = 0$, & æquatio $x + x = y + y$, ſive ſumptis lineis $x + x = CA + Ad - CA + BD = Ad + BD$, quo in caſu ſublata diſtantia $AC + CB$, puncta A, B coincidunt in C, & $x + x = Cd + CD = y + y$, & $x = y = Cd = x = y = CD$, fiuntque x, x eædem ac y, y. Hoc pacto fit coordinatarum permutatio, ut quæ erant x, fiant y, & viceverſa. Et ſane, ſi facias $x + x = CA + x + CB + x = y + y$, poſitis CA, CB æqualibus, ſed diverſis, erit $y = CA + x = CA + Ad$; $y = CB + x = CB + BD$, & $y = Cd$, $y = CD$, & $x = Ad$; $x = BD$; quando in primo caſu invenimus $x = Cd$, $x = CD$; $y = Ad$, $y = BD$.

§. 28. Tractata æquatione compoſita methodo §. 26, & 27, x, x, vel (facta permutatione) y, y ſemper a centro C originem ducunt, hinc inde ab hoc puncto in diverſa ſingulæ divergentes, quæ cum ad infinitum utrinque procedant, inter ſe æquales cenſeri poſſunt. Verum ſi æquationi ſuperiori $x + x = Cd + CD$ addatur $CA - CA = 0$, erit $x + x = CA + Cd + CD - CA$, ſive $x + x = \frac{a}{2} + Cd + CD - \frac{a}{2} = BC + CD + CD - CB = BC + Cd + BD = Bd + BD$: vel addita $CB - BC = AC - CA$, $x + x = Cd - CA + AC + CD = Ad + AD$: & hoc modo quæ prius æquales erant x, x, vel y, y, fiunt inæquales, & in primo caſu $x = Bd$, $x = BD$; in ſecundo $x = Ad$, $x = AD$: ſumma vero ſemper $x + x = Cd + CD = Bd + BD = Ad + AD$ conſtans, ſed indeterminata: & hoc modo quæ prius æquales erant, fiunt inæquales.

§. 29. Invenimus §. ſuper. $x + x = Cd + CD$ (*fig. ead.* 12.) $= x + x = Bd + BD =$ &c. facta in his itaque primum $x = Cd = 0$, $x = Bd = 0$, erit æquatio (I.ª) $0x + x = 0Cd + Dd = 0x + x = 0Bd + Dd$: & facta $x = CD = 0$; $x = BD = 0$, (II.ª) $x + 0x = dD + 0CD = x + 0x = dD + 0BD$. Hinc poſita una, vel altera x minima, eruimus fieri unam, vel alteram x maximam, ſive vel $x = Dd$, vel $x = dD$; quo docemur Dd integram nullo puncto medio diviſam ab una tantum variabili x repræſentari, atque ab hoc puncto poſito, aut non poſito duplicem, aut ſimplicem variabilem in calculo pendere, quæ poſſunt eſſe æquales, vel inæquales, prout punctum hoc bifariam, vel non datam lineam Dd ſecat. Facta igitur

$$Dd = \frac{Dd}{2} + \frac{Dd}{2}, \ \& \ dD = \frac{dD}{2} + \frac{dD}{2}, \text{ erit}$$

$$(\text{I.}^a)\ x + 0x = Dd = x + x = \frac{Dd}{2} + \frac{Dd}{2} = DC + Cd$$

$$(\text{II.}^a)\ 0x + x = dD = x + x = \frac{dD}{2} + \frac{dD}{2} = dC + CD$$

$$(\text{III.}^a)\ x + 0x = Dd = x + x = DC + dC = dC + DC$$

$$(\text{IV.}^a)\ x + 0x = dD = x + x = Cd + CD = CD + Cd$$

quoniam tam III.ª, quam IV.ª eamdem ſemper ſummam conſtituunt. Porro hiſce duabus ultimis æquationibus addatur $\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = 0$, ſive ſint identicæ $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$, quo proinde æquatio non turbatur, erunt

$$(\text{V.}^a)\ x + x = DC + \frac{a}{2} + dC - \frac{a}{2} = dC + \frac{a}{2} + DC - \frac{a}{2}$$
$$= DA + dA = dB + DB$$

$$(\text{VI.}^a)\ x + x = \frac{a}{2} + Cd - \frac{a}{2} + CD = \frac{a}{2} + CD - \frac{a}{2} + Cd$$
$$= Bd + BD = AD + Ad:$$

ſive tandem

$$(\text{VII.}^a)\ x + 0x = y = x + x = y + y = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = x + x'$$
$$= y + y' = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2} = dB + DB.$$

(VIII.ª)

$$(\text{VIII.}^a)\ x + 0x = y = x + x = y + y = \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} + x = x + x'$$

$$= y + y' = \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2} + y = \text{AD} + \text{Ad} = \text{Bd} + \text{BD};$$

in primo caſu una tantum variabilis, & Dd, vel dD integra; in ſecundo duæ variabiles, ſed æquales; in tertio duæ, & inæquales variabiles. Licet vero ſeptima eadem ac octava videatur, tamen in ſeptima x, x, & y, y diverſam habent originis puncta d, D, atque invicem ſibi occurrunt; in octava commune habent originis punctum A, vel B, atque in diverſa divergunt: quæ omnia diverſam exhibent exiſtendi poſitionem, ut inferius dicemus.

§. 30. In §§. antecedentibus ex combinatione duorum Syſtematum baſis datæ, vidimus oriri æquationem §. 22. compoſitam ex aggregato æquationis $x + x = \text{AC} + \text{BC} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ maximæ; & minimæ $x + x = \text{Cd} + \text{CD} = \text{Cd} - \text{Cd}$ identicis (*fig.* 9.) $= \text{CD} - \text{CD} = 0$; atque hanc eſſe $(\text{I.}^{am})\ x + x + x + x = \text{AC} + \text{CD} + \text{BC} - \text{CD} = \text{BC} + \text{Cd} + \text{AC} - \text{Cd}$: at §. 29. ex combinatione duorum Syſtematum baſis variabilis oriri æquationem compoſitam ex æquatione $x + x =$ (*fig.* 12.) $\text{DC} + \text{dC} = \text{Cd} + \text{CD}$ maximis indeterminatis uſque ad infinitum excurrentibus, & ex æquatione $x + x = \text{AC} + \text{BC} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ minimis in hoc caſu, ſed identice ſumptis, ut ſit $x + x = \text{AC} + \text{BC} = \text{AC} - \text{AC} = \text{BC} - \text{BC} = 0$, & æquatio in hac combinatione

$$(\text{II.}^a)\ x + x + x + x = \text{dC} + \text{CB} + \text{DC} - \text{CB} = \text{dC} - \text{AC} + \text{DC} + \text{AC}$$

$$= \text{BC} + \text{Cd} + \text{CD} - \text{BC} = \text{Cd} - \text{AC} + \text{AC} + \text{CD}.$$

In (I.^a), ſumma variabilium $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ ſemper conſtans, & x, x maximæ, & differentia $x - x = \text{Cd} + \text{Cd} = \text{CD} + \text{CD} = \text{Dd} = \text{dD}$, variabilis, ſed quæ, ad ſummum, valorem $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ attingere poteſt. In (II.^a) vero ſumma $x + x = \text{dC} + \text{DC}, = \text{Cd} + \text{CD}$, quæ ſunt indeterminatæ, atque uſque ad infinitum excurrere poſſunt; ſed $x + x = \text{dC} + \text{DC}$ determinat quodammodo puncta d, D arbitrio ſumpta, cum x a primo puncto originis d, D originem deſumat, quod proinde primum arbitrio determinandum eſt. Secunda vero $x + x = \text{Cd} + \text{CD}$ indicat Cd, CD prorſus infinitas, cum primum originis punctum utrique commune ſit datum punctum C. Differentia

vero $x - x = BC + BC = AC + AC = BA = AB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$ conſtans eſt valor minimus, infra quem ſumma variabilium $Cd + CD$ deprimi nequit.

§. 31. Ut igitur una eademque formula generali duplicem horum Syſtematum diverſam combinationem complectamur, omneſque qui accidere poſſunt caſus univerſim nobiſmet ob oculos ponamus, ut prout res fert formulam in peculiaribus caſibus facile, & ſine erroris periculo opportune modificemur, ſic in genere ſcribatur formula

$$(\text{III.}^a) \pm x \pm y \mp x \mp y = x + x + x + x = AC + Cd + BC + CD,$$

quæ vulgo (ſemper vetera ſignorum placita ſequendo) ad *zero* damnatur: tamen ſi hæc legibus ſupra a me traditis caute excutiatur, nodum ſolvit omnem, atque ambages inextricabiles (quibus in ſignis quantitatibus præfigendis hactenus impliciti, ſummorum etiam virorum teſtimonio, hæremus) mirabili extricat facilitate, atque elegantia. In hac igitur ſemper AC, BC, & Cd, CD æquales ſumendæ ſunt: illud tantum examinandum, quandonam ut æquales & identicæ, quandonam ut ſimpliciter æquales conſiderandæ ſint. Si $Cd = CD$ ponatur minor AC, tum incidimus in combinationem primam duorum Syſtematum baſis datæ §. 16, & alibi indicatam, atque ideo Cd, CD identicis ſumptis, earumque ſumma æquata zero, æquatio (I.ª) §. antecedentis ſumenda erit, ad quam unam, excluſa ſecunda, pertinet hæc ſuppoſitio. Quod ſi velimus $Cd = CD$ majorem $AC = CB$, tum factis identicis, & æqualibus AC, BC, ut ſit $AC + BC = AC - AC = BC - BC = 0$, æquales ſed diverſæ Cd, CD ſigno ſemper poſitivo afficiantur, ut æquatio (II.ª) ejuſdem §. antecedentis hic tantum legitima occurrat.

§. 32. In primo igitur caſu æquatio erit

$$(\text{I.}^a)\ x + x + x + x = BC + Cd + AC - Cd\ (\textit{fig. 9.}) = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$$

$$= Bd + Ad = BC - CD + AC + CD = \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2} + x = BD + AD,$$

in quo ultimo caſu, cum utrimque punctum C evaneſcat, ex quatuor x in primo membro duæ tantum ſumi poſſunt, cum $x + x = Bd + Ad = BD + AD$; ita ut ſit $x + x + x + x = BC + Cd + AC - Cd = BC - CD + AC + CD$

$$= x + x' = Bd + Ad = BD + AD = x + x = BC + AC$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = x = BA = a$$

$$x + x' = Ad + Bd = AD + BD = x + x = AC + BC$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = x = AB = a$$

Dif-

Differentia vero ſumpta methodo communi

$x - x = Cd + Cd = CD + CD = x + x = Dd = dD$; ſive mea methodo, factis BC, AC identicis, in quo caſu $BC + AC = 0$,

$x + x = Cd - Cd = Cd + CD = Dd = CD + Cd = dD = x$.

In hac æquatione $x + x = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, licet x, tam quæ ſunt in primo membro, quam quæ in ſecundo, eodem ſymbolo exprimantur, tamen x, x primi membri & inter ſe & cum x ſecundi differunt mirum quantum! Nam, donec ita exprimitur æquatio, x, x ſecundi membri ſunt ſemper æquales, & identicæ; x, x vero primi ſunt inæquales, prima $x = \frac{a}{2} + x$, ſecunda $x = \frac{a}{2} - x$, ac differunt inter ſe quantitate x ſecundi membri. Itaque ut primæ a ſecundis diſtinguantur, alio ſymbolo y deſignari poterunt, ut ſit $y + y = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, vel $x + x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$: nec inter ſe y, vel x primi membri æquari poterunt, niſi ſublato $x - x = 0$ a ſecundo membro, ut fiat $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ & $x = x = \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$.

§. 33. Antequam progredior multum intereſt illud animadvertere, in æquationibus ſcilicet unius variabilis x variari valores x, prout legitima ſubſtitutione, aut conſtantium diviſione, aut quavis alia tranſmutatione variantur, atque modificantur formulæ; neque poſſe perpetuo aut eodem, aut diverſo ſymbolo variabiles deſignari: quæ enim una & eadem prius erat, ex dictis conſtat eam facta formulæ variatione diſpertiri poſſe in plures diverſas, ſed æquales, atque etiam inæquales; & quæ primo diverſæ, & etiam inæquales ſe ſe offerebant, iterum variata formula, in diverſas, ſed æquales, atque etiam in unam eamdemque converti poſſe. Ita in allato exemplo una $x = a$, fit $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = AC + BC$ (*fig. ead. 9.*), diviſa bifariam data a; qua diviſione x una dividitur in duas $x + x$ diverſas, ſed æquales, $x = AC = x = BC = \frac{a}{2}$; at facta $x + x = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, quæ erant in primo membro æquales, ſed diverſæ, fiunt inæquales & diverſæ inter ſe, & cum x identica in ſecun-

ſecundo membro. Vel ſi mavis $x + x = \frac{a}{2} - y + \frac{a}{2} + y$ (quo modo æquationis indeterminatæ duarum variabilium x, y formam refert), facta variabilium translatione, erit $y - y = \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2} - x$, quæ tamen ut ad normam redigatur, ſumendæ ſunt $y - y$, quæ erant identicæ in ſecundo membro, hic in primo diverſæ & inæquales; & $x + x$, quæ, donec primum membrum occupabant, erant diverſæ & inæquales, translatæ in ſecundum ſunt identicæ, ſive $x + x = x - x$; ut formula rectius ſic efferatur $y + y = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, quæ cum linea conſtructionis comparata nos docet hac translatione factam fuiſſe variabilium permutationem, ut A d + B d (*fig. ead. 9.*), vel A D + B D, quæ in primo caſu appellabantur $x + x$, & y, C d, vel C D; nunc A d + B d eſſe $y + y$, & C d, vel C D, x. Patet igitur in ipſo ſtatim limine, quam a veritate aberret communis analytica methodus, quæ in æquationibus primi gradus unius variabilis non niſi unam, eamque determinati ſemperque conſtantis valoris variabilem x ſtatuit, atque hoc nomine *æquationes determinatas* appellat, quæ potius *æquationes limitis primi gradus* eſſent appellandæ: cum, opportunis adhibitis artificiis, infinitis prorſus variationibus obnoxiæ ſint, dummodo eæ binæ & binæ ſumantur, quæ propoſitas conditiones ſupradictas ſervent.

§. 34. Neque hoc, quod diximus, ita difficile obtentu eſt, ac primo intuitu videri poſſet: quin imo nulla facilior, nulla promptior via ad hoc obtinendum excogitari poteſt, quam quæ rei hujuſce natura, & ratio poſtulat: ut potius dicendum ſit hoc artificium nimia, qua præſtat, facilitate Analyſeos cultoribus effugiſſe, iis prorſus neglectis quæ ante pedes habent, dum ad devia, ac remotiſſima (prout eſt hominum natura) mentis aciem intendunt. Si enim, diviſa bifariam data a, ut ſit $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, huic ſecundo membro addatur tantum cifra o, quæ certe quidem nihil in valore æquationis immutat, totum hoc, quod quærimus, negotium perfectum eſt. Nam $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, dat $x = x = \frac{a}{2}$; at addito zero in ſecundo membro erit $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + o$, ſed $o = oy = y - y = -y + y$ (numerus enim quicumque a ſe ipſo ſubtractus dat zero): ergo $x + x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y = \frac{a}{2} - y + \frac{a}{2} + y$: quo facto $x + x$ primi membri, quæ, nulla facta additione zero in ſecundo mem-

membro, æquales erant, hoc ſubſtituto infinitis prope modis differunt inter ſe, eamdem licet invariatam ſummam $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ perpetuo ſervent.

§. 35. Neu tamen putes (quod mirum, & novum videbitur) in hac æquatione $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 0$ cujuſcumque quantitatis additionem, ac ſubtractionem pro zero legitime ſubſtitui poſſe, ea ſolum ratione, qua conſtat quamcumque quantitatem a ſe ipſa ſubtractam æquari cuicumque alteri a ſe ipſa ſubtractæ, ſive ſemper zero æquari zero: ideoque prædictæ æquationi cujuſcumque naturæ zero addi poſſe. Verum quidem eſt zero æquari ſemper zero, atque $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 0$ eſſe identicum, cujuſcumque naturæ ipſum ſit, donec æquationem ſequenti modo efferamus, ſcilicet $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \pm 0$: eſt enim in hoc caſu æquatio limitis, quá x, x æquantur inter ſe, & cum $\frac{a}{2}$. Sed cum ſit $\pm 0 = y - y$, ſi y a ſe invicem ſeparentur, atque una uni $\frac{a}{2}$, altera alteri $\frac{a}{2}$ affigatur (cum ex dictis $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ ſint diverſæ, ſcilicet $= AC + BC$) longe a veritate aberrat, qui pro y quamcumque quantitatem in æquatione reponere poſſe putat. Hoc enim modo diſpoſita formula $x + x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y = \frac{a}{2} - y + \frac{a}{2} + y$ dat omnes, quos x, x habere poſſunt, valores inæquales, qui licet infiniti ſint, intra tamen certos limites continentur, atque ipſius y valores certis terminis definiunt, quos ultra citraque nequit conſiſtere rectum: qui proinde limites ſunt inveniendi, ne ultra progreſſi in devia ducamur. Ut vero hos aſſequamur, in memoriam revocemus æquationem $x + x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$, in qua $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ diverſæ, y, y identicæ, diſpertiri in $x = \frac{a}{2} + y$, & $x = \frac{a}{2} - y$. Sed ex hujuſmodi partialibus æquationibus prima $x = \frac{a}{2} + y$ dat Syſtema baſis

ſis variabilis, ſecunda dat $x + y = \frac{a}{2}$ baſis datæ Syſtema, in quo ultimo y non poteſt ſuperare valorem $\frac{a}{2}$, ad quem aſſurgit, cum $x = 0$: ergo $y = \frac{a}{2}$ eſt valor maximus, quem attingere poteſt y in hoc baſis datæ Syſtemate. Sed y hujuſce Syſtematis debet eſſe identica cum y alterius Syſtematis : ergo licet, in Syſtemate baſis variabilis, y a zero per quaſcumque magnitudines uſque ad infinitum exſpatiari poſſit ; tamen limitatur ab altero Syſtemate baſis datæ, cui conjunctum eſt, atque y intra limites o minimum, $\frac{a}{2}$ maximum cogitur contineri.

§. *36.* Facto igitur $y = 0$ valore minimo, erit $y - y = 0 - 0$, & æquatio $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \pm 0.0 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \pm (0-0).0$,

ſive $x + x = \frac{a}{2} + 0 + \frac{a}{2} - 0 = \frac{a}{2} - 0 + \frac{a}{2} + 0$, dat primum minimorum y limitem, in quo x, x æquantur inter ſe, & cum $\frac{a}{2}$. At facto $0y = \pm 0.\frac{a}{2} = \pm\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right)$, æquatio erit

$$x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = (\textit{fig. } 1.)\ AC + CB + BC - BC = AB$$

$$x + x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \qquad AC - CA + BC + CA = BA$$

In prima igitur $x + 0x = AB = a$; in ſecunda $0x + x = BA = a$: in prima ergo x prima, quæ originem ducit ab A verſus B, eſt maxima, & deſinit in B, cui reſpondet altera $x = 0BC$ minima $= 0B =$ puncto : in ſecunda e contra x ſecunda, quæ originem ducit a B verſus A, eſt maxima deſinens in A, cui prima $x = 0AC = 0A$ puncto reſpondet : quarum tamen ſingulæ licet in oppoſitam plagam procedant, eodem ſigno $+$ tam ipſæ, quam valor earum a afficiuntur, ultra quem hinc inde progredi nequeunt. Intra vero hoſce limites infinitæ prorſus x, x una major, minor altera reciprocantur ea lege, ut minor deficiat ea quantitate, qua major augetur : & prima conditio neceſſaria, quæ earum ſummam ſemper conſtantem, & æqualem $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ requirit,

rit, intacta ſervetur. Æquatio igitur (I.ª) §. 30.

$x + x = AC + Cd + BC - Cd$ (*fig. 9.*) $= AC + CD + BC - CD$

legitima eſt, donec Cd, vel CD intra limites o, & $\frac{a}{2}$ continetur.

§. 37. Hiſce demonſtratis, ad formulam (II.am) §. 30. excutiendam veſtigiis (I.mæ) inſiſtendo accedamus. Ea eſt (*fig.* 12.)

$$(\text{II.}^a)\; x + x + x + x \begin{array}{l} = dC + CB + DC - CB = dC - AC + DC + AC, \\ = BC + Cd + CD - BC = Cd - AC + AC + CD \end{array}$$

in qua quoniam identicæ ſupponuntur AC, BC, erit $\begin{array}{l} AC - AC = o \\ BC - BC = o \end{array}$

ſive $x + x = BC + CB = BC - BC = o$, & remanet æquatio

$x + x = y + y = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2} = y + y + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = y + y \pm o.\frac{a}{2}$; ſummaque variabilium $x + x = y + y$ æquatur ſemper ſummæ indeterminatarum $y + y$: quo monemur, expuncto ab æquatione termino $\pm o.\frac{a}{2}$, tam $x = x$ quam $y = y$, hoc eſt ſummam indeterminatarum $x + x$ diviſam fuiſſe bifariam in C, ſive

$$x + x \begin{array}{l} = dC + DC = DC + dC = y + y \\ = Cd + CD = CD + Cd = y + y \end{array}$$

At aſſumpto termino $\pm o.\frac{a}{2}$, atque uti docuimus diſtributo, erit æquatio $x + x = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$, in qua y, y ſunt diverſæ æquales; $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ identicæ: at y, y eo ordine jungendæ ſunt, quem docet antecedens formula, ut vel a duobus diverſis punctis d, D diverſam originem ſumant, concurrentes in C punctum medium; aut ſimul ab eodem communi puncto medio profectæ deſinant in C. Æquatio ſic conſtituta dividitur in duas partiales $x = y + \frac{a}{2}$, $x = y - \frac{a}{2}$; & x, x non modo diverſæ, ſed inæquales fiunt, & æquatio compoſita conſtat ex duobus Syſtematibus baſis variabilis $x = \frac{a}{2} + y$, $x = y - \frac{a}{2}$, ſive $x + \frac{a}{2} = y$: in primo x major y; in ſecundo y major x: in primo y intra limites zero, & infinitum continetur, in ſecundo y intra limites $\frac{a}{2}$ minimum, & infinitum ma-

ximum coarctatur. Ut vero y, licet diverſæ, tamen inter ſe ſemper æqualitatem ſervent, iiſdem manentibus Syſtematibus, y minima non poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$, maxima infinita: qui ſunt limites a ſecundo Syſtemate conſtituti. In hac igitur combinatione prorſus excluduntur limites formulæ (I.^{a}), quæ non aliam cum hac (II.^{a}) communicationem habet, niſi in puncto A, vel B limitis ipſius maximi, qui eſt minimus in hac noſtra ſecunda, quando ſcilicet in utraque formula eſt $y = \frac{a}{2}$. Licet igitur ſemper zero æquetur zero, tamen in hac ſecunda formula y non poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$, & ab $y - y = \pm\, 0.\frac{a}{2}$ terminus $0y$ incipiens uſque ad $0.\infty y$ excurrere poteſt: intra igitur hoſce tantum limites æquatio (II.^{a}) rite uſurpari poteſt. Verum illud percommode accidit, quod huic deficienti intra limites $0, \frac{a}{2}$ ſuccurrit altera, & e contra: ita una alteri opem fert, & conjurat amice; qua mutua conſpiratione maximum hoc, ac difficillimum analyticum negotium, adhuc uſque fruſtra tentatum, ad exitum tandem felicem perducitur.

§. 38. Nunc inter ſe utramque formulam (I.^{am}) & (II.^{am}) conferamus. Ac primum revocatæ formulæ generales §. 30. rem totam ſimul complectentes, ita literis, ac lineis exprimantur

$$(\mathrm{I.}^a)\ \overset{\mathrm{I}}{x} + \overset{\mathrm{II}}{x} + \overset{\mathrm{III}}{x} + \overset{\mathrm{IV}}{x} = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y = AC + CD + BC - CD\ (\mathit{fig.9.})$$

$$(\mathrm{II.}^a)\ \overset{\mathrm{I}}{x} + \overset{\mathrm{II}}{x} + \overset{\mathrm{III}}{x} + \overset{\mathrm{IV}}{x} = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2} = DC + CA + dC - CA = CD + AC + Cd - AC\ (\mathit{fig.12.})$$

in hac ultima inverſis literis, ac lineis, qua inverſione fit tranſitus a punctis D, d originis verſus C ad punctum originis C commune ad diverſa D, d hinc inde a puncto dato C: valores vero $\overset{\mathrm{I}}{x}$, $\overset{\mathrm{II}}{x}$ &c. primi membri æquantur ſingulis terminis ſecundi, eo ordine quo ſcripti ſunt. In (I.^{a}) autem $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ ſunt æquales, ſed diverſæ; y, y æquales, & identicæ, $y = CD$, vel $= Cd$. In (II.^{a}) e contra y, y ſunt æquales, ſed diverſæ; $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ ſunt identicæ, $\frac{a}{2} = CA = AC$, vel $= CB = BC$. Ac in utriſque formulis erit in (I.^{a}), limite mini-

minimo $y = 0 : \overset{I}{x} + \overset{III}{x} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = AC + BC : \overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = 0 - 0$ (x maxima) $= \overset{I}{x} + \overset{III}{x}$: in (II.ª) limite minimo $y = \frac{a}{2} : \overset{I}{x} + \overset{III}{x}$ $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \begin{matrix} DC + dC \\ CD + Cd \end{matrix} : \overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \pm 0 . \frac{a}{2}$; in qua tam x minima, quam $y = \overset{I}{x} + \overset{III}{x}$. In limite igitur minimorum reſpectivo utriuſque formulæ eadem omnino ſe ſe offert æquatio quoad quantitatem : differunt tamen inter ſe poſitione puncta originis, ac directiones linearum.

§. 39. In (I.ª) enim cum ſit $\overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = 0 - 0$, erit $\overset{II}{x} = \overset{IV}{x} = 0$ $= C$ (*fig.9.*) ſive punctum originis utriuſque commune C hinc inde ab hoc puncto fluens; & $\overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = \pm 0 . 0 = \pm C$; $\overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = + C$, $\overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = - C$ $= - 0 + 0$; quod ſignificat permutationem variabilium, ſive $\overset{II}{x}$ in $\overset{IV}{x}$, & viceverſa; qua evincitur liberum ſemper eſſe initio motus unam, vel alteram ſumere poſitivam, vel negativam. Secunda vero æquatio in hoc limite eſt $\overset{I}{x} + \overset{III}{x}$ $= AC + BC = BC + AC$; hoc eſt vel $\overset{I}{x} = AC$, $\overset{III}{x} = BC$; vel $\overset{I}{x}$ $= BC$, $\overset{III}{x} = AC$, quæ hoc ordine ſimul ſunt copulandæ. In hac x, x diverſa habent originis puncta A, B, a quibus initium motus ſumentes concurrunt in punctum C medium. In (II.ª) vero $\overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = CB - CB$ (*fig.12.*) $= CA - CA = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \pm 0 . \frac{a}{2}$: at in hoc caſu $\overset{II}{x}$, $\overset{IV}{x}$ non ſunt variabiles, ſed ſingulæ $= \frac{a}{2}$; licet igitur conſideratæ ut identicæ æquentur zero, tamen earum ſumma æquatur perpetuo $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$: hinc conſtat $\overset{II}{x} + \overset{IV}{x}$ ſumendas eſſe identicas, ſive $\overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = \overset{II}{x} - \overset{II}{x} = \overset{IV}{x} - \overset{IV}{x} = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$, ac proinde $x + x$ diverſas, ſumendas eſſe identicas, ac contrario ſigno afficiendas, originemque communem, ſi diverſæ ſumantur, a puncto C ducentes hinc inde ſtatim puncta A, & B determinant: ergo $x + x = x - x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = CB - CB$

 $= CB$

$= CB + (-CB) = CB + (-AC) = CB + CA$, quoniam $CB = AC$ æqualis, & non identica. Hîc etiam patet, tam CA ſumi poſſe negativam, & CB poſitivam, quam viceverſa: hîc non niſi ſubtractio ejuſdem quantitatis a ſe ipſa intelligenda eſt. Altera æquatio vero in hac (II.ª) formula in limite minimo erit $\overset{\text{I}}{x} + \overset{\text{III}}{x} \begin{array}{l} = dC + DC = AC + BC \\ = Cd + CD = CA + CB \end{array}$, quæ perfecte congruit cum illa formulæ (I.ª) in limite maximo. Itaque quoniam æquatio ultima eſt tam æquatio limitis maximi in (I.ª) formula, quam æquatio limitis minimi in formula (IIª.), hac communi æquatione eleganter ab una formula ad alteram, prout una aut altera mutatis circumſtantiis legitima fit (quoniam ambæ eodem tempore nequeunt conciliari), perducimur. In utraque vero formula

$$\overset{\text{I}}{x} + \overset{\text{III}}{x} = AC + BC = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = AB + oBC = AB + oB = a$$

$$\overset{\text{I}}{x} + \overset{\text{III}}{x} = AC + BC = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = oAC + BC = BC + oA = a$$

quibus docemur $\overset{\text{I}}{x} + \overset{\text{III}}{x} = \overset{\text{I}}{x} + o\overset{\text{III}}{x} = x = a = AB$, vel $o\overset{\text{I}}{x} + \overset{\text{III}}{x} = x = BA = a$: hoc eſt (ſublato puncto medio C facta linea a integra, quæ erat ſumma duarum æqualium $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$) unam vel alteram ex variabilibus fieri zero; in quo caſu una eſt maxima, altera minima.

§. 40. Itaque hæc maximi momenti veritas conſequitur, in æquatione ſcilicet limitis, quando nempe una variabilis ponitur, ſemper huic alteram neceſſario reſpondere maximam vel minimam, prout propoſita erat minima, vel maxima. Igitur in noſtro caſu cum $x = a$ in (I.ª) formula ſit maxima, erit altera x (quam diximus y) $= o$ minima; in formula vero (II.ª) cum $x = a$ ſit minima, erit altera x maxima $= \infty$: at quoniam utramque formulam eadem æquatio amplectitur, æquationi limitis tam y zero, quam y infinitam neceſſario ſemper reſpondere intelligendum eſt. Qui limites ab æquatione ſecunda $\overset{\text{II}}{x} + \overset{\text{IV}}{x} = o$, quæ communis eſt utrique formulæ, ſponte exhibentur. Si enim ſit $\overset{\text{II}}{x} + \overset{\text{IV}}{x} = y - y$, facta $y = o$, erit $\overset{\text{II}}{x} = \overset{\text{IV}}{x} = o$ minima; ac proinde altera $\overset{\text{I}}{x} + \overset{\text{III}}{x} = x = a = AB = BA$ maxima, quæ æquatio cum ſit formulæ (I.ª) æquatio generalis, pertinet ad hoc Syſtema, in quo x, x; vel y, y non poſſunt excedere valorem $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$: eſt enim maximus poſ-

poſſibilis. Si vero ſumatur $\overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$, & $x = x = \frac{a}{2}$ (ſumptis diverſis quæ erant identicæ), tunc $x + x = x = a$ eſt minima; ergo $y + y = y$, & altera x debet eſſe infinita.

§. 41. Hæc de limite maximo formulæ (I.ª), & minimo formulæ (II.ª) explicata viam ſternunt ad ea eruenda quæ intra hoſce limites in utraque formula contingunt. Et quoniam in (I.ª) $x + \overset{II}{x} = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$, erit $-y + y = \frac{a}{2} - x - \overset{II}{x} + \frac{a}{2}$; ſed $x + \overset{II}{x} = x + x$ æqualibus (ſublato $y - y = 0$) $= AC + BC$ (*fig. 9.*) $= CB + CA$ æqualibus, ſed diverſis, $= CB + BC = CB - CB$ identicis; ergo facta hac translatione, erit $y - y = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, ſed $y - y$ identicæ æquantur $y + y$ diverſis (quod patet etiam quoniam $y - y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$): ergo $y + y = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$. Ergo terminorum translatione facta fuit permutatio variabilium, ut quæ in primo caſu $x + x' = Ad + Bd = AC + BC = x + x$ originem ducebant a punctis diverſis A, & B, nunc a centro communi C ducant, & fiant identicæ: y, y vero vicem ſubeant x, x primo æquales, inde inæquales y, y'. Atque hinc facta x minima $= 0$, erit $y + y = y = a$ maxima: reciprocantur igitur in hoc Syſtemate x, y, nec una poteſt eſſe zero, quin altera evadat maxima. Porro in formula (II.ª) $x + x' = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$, & $x + x$ æquales inter ſe, ſunt æquales $y + y$, quæ etiam ſunt inter ſe æquales; ergo ſecunda dat (*fig.* 12.)

(II.am) $y + y = x + x$; & $y + y' = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2}$

$= DC + CA + dC - CA = DA + dA$,

vel $= dB + DB$, & $\begin{matrix} y = DA, \\ y = dA \end{matrix}$ vel $\begin{matrix} y = dB \\ y = DB \end{matrix}$, in hac tamen x non poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$. In utroque igitur caſu neque x, neque y poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$; ac proinde in hoc Syſtemate, quando y eſt minima $= \frac{a}{2}$, erunt $x = y$, $x = y$ mini-

mæ:

mæ: atque ſolum facta fuit permutatio ita, ut quæ in ſecundo membro æquales erant inter ſe, ſed diverſæ $y + y = dC + DC$, & $x + \overset{1}{x}$ diverſæ & inæquales $= dA + DA = dB + DB$, fiant in hoc caſu $x + x = dC + DC$, & $y + y' = dA + DA = dB + DB$ &c.

§. 42, Ut igitur univerſim caſus omnes perſequamur, qui ex unaquaque ſuperiori formula (I.ª) & (II.ª) contingere poſſunt, ſit æquatio $x = a$, quæ eſt æquatio limitis, tam orta a (I.ª), quam a (II.ª) formula: in primo caſu quando $x = a$ eſt maxima, erit altera minima $= 0$, ac proinde pertinet ad formulam (I.ᵃᵐ), quæ complectitur omnes caſus, qui inter limites 0, & a accidere poſſunt. Quando vero $x = a$ ſupponitur minima, altera item $=$ zero erit minima; at cum ſupponatur minima, non poteſt fieri niſi major, & quidem uſque ad infinitum (continetur itaque intra limites a, & ∞), in quo caſu & altera quidem fieri poteſt infinita, limitibus tamen 0 & ∞ circumſcripta. Hæc pertinet ad formulam (II.ᵃᵐ), in qua ſemper $x > a$. Hoc poſito, ſit primum $x < a$, & maxima $x = a$, quæ proinde formulæ (I.ª) obnoxia eſt: ut ad hanc reducatur, diviſa a bifariam (*fig. 9.*), erit ex dictis $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = AC + BC$, & $x = x + x = AC + BC$; $x + x' = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$, vel §. 41, $y + y' = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$. Hiſce præparatis, tres ſtatim caſus ſponte ſe ſe offerunt: in (I.°) quando $y = 0$, x dividitur in duas æquales, ſed diverſas variabiles $x + x = AC + BC = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, hic enim diviſa eſt bifariam a, & $x = x = AC = BC = \frac{a}{2}$: in (II.°) quando y eſt aliquid, ſed minor $\frac{a}{2}$ (vidimus enim in hoc Syſtemate ad ſummum æquari poſſe $\frac{a}{2}$), erit $x + x' = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y = AC + CD + BC - CD = AC - Cd + BC + Cd = AD + BD = Ad + Bd$: igitur x, x inæquales,

ſive $\begin{matrix} x = AD \\ x' = BD \end{matrix}$, vel $\begin{matrix} x = Ad \\ x' = Bd \end{matrix}$, quæ binæ & binæ ſumptæ conſtituunt infinita prorſus paria radicum, tam ab una, quam ab altera parte puncti C, intra limites A, & B: ac proinde infinitæ radices (ſi modo quæ reciprocantur binæ & binæ ſumantur) ſimul additæ ſummam a eamdem retinent: in (III.°) facta $y = \frac{a}{2}$ maxima, erit $x + x' = x + 0x' = 0x + x' = x = x' = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$

$=$

$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = AC + CB + BC - BC$ (*fig. ead. 9.*)
$= AB + oBC = a$, vel $= AC - AC + BC + CA = oAC + BA$
$= a$: in quo caſu una x eſt maxima $= a$, altera minima $= o$;
& vel $\begin{matrix} x = AB = a, \\ x' = oBC \end{matrix}$ vel $\begin{matrix} x = BA = a \\ x' = oAC \end{matrix}$.

In primo caſu duæ tantum radices, & æquales $\frac{a}{2}$; in ſecundo infinitæ prorſus radices binæ ſumptæ ſatisfaciunt; in tertio vero duo radicum paria, ſive $\begin{matrix} x = AB, x' = o \\ x = BA, x' = o \end{matrix}$, quorum ſingula quantitate quidem æquantur, ſed reſpectu directionis opponuntur.

§. 43. In ſecunda hypotheſi, in qua y minima $= \frac{a}{2}$ a (II.ª) formula in limite minimo profecta, erit $x + x = y + y = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$

$= dC + DC$ (*fig.* 12.) $\begin{matrix} = dC + CB + DC \\ = dB + DB - CB \end{matrix}$
$\begin{matrix} = dC - CA + DC + CA \\ = \quad\quad dA + DA \end{matrix}$, tres itidem caſus occurrunt: (I.^{us}) cum $x + x$ æquales, ſive $x = x = y = y = Cd = CD$ æqualibus, ſed diverſis, quæ æquantur inter ſe intra limites $\frac{a}{2}$, & ∞ (y enim ab $\frac{a}{2}$ uſque ad infinitum progredi poſſunt) punctis D, d in diverſa ad infinitum excurrentibus. (II.^{us}) cum inæquales $x + x' = dB + DB$, vel $= dA + DA$, ($\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ identicis & y, y æqualibus, ſed diverſis) quæ binæ ſumptæ ſunt prorſus infinitæ; quæ tamen ſic ſunt comparatæ, ut una alteram quantitate a ſuperet: eſt enim $x = y + \frac{a}{2}$, & $x' = y - \frac{a}{2}$; ergo $x - x' = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$. Itaque in formula $x + x' = dC + CB + DC - CB = dC - CA + DC + CA$, in quibus y, y diverſæ ſunt, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ identicæ; ſi fiant contra y, y identicæ,

$\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ diverſæ, fit tranſitus a ſumma ad differentiam, & $x + x' = x - x$ $= CB - CB = CB - AC = CB + CA$; vel $= CA - CA$ $= CA - BC = CA + CB$, & $CB = AC$; $CA = BC$: quæ hinc inde a puncto C originis communi procedunt. (III.[us]) tandem, facta $y = \frac{a}{2}$, erit $x + x' = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$ $= AC + CB + BC - CB$ (*fig.* 12.) $= AC + CB + BC - BC$ $= AB = a$; vel $x + x' = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = BC - CA + BC + CA$ $= BC - BC + BC + CA = BA = a$:

in prima $x + x' = x + 0x' = AB + 0B = a + 0B = a$

in ſecunda $x + x' = 0x + x' = 0A + BA = 0A + a = a$;

ſive $x + x' = dB + DB = dA + DA$; ac facto $DB = 0DB = 0B$ (in quo caſu $dA = 0$, & $dB = AB$; Cd enim ſemper $= DC$), $x + 0x'$ $= AB = a$: & facto in ſecunda $dA = 0dA = 0A$ (in quo caſu DB $= 0$, & $DA = BA$) $x + x' = 0x + x' = AB + 0B = 0A + BA$ $= a$. In hiſce tamen caſibus (*fig.* 24.) tam $x = a$, quam $x = 0$ ſunt ambæ minimæ. Nam in hac hypotheſi variabiles x, x differunt quantitate a; ergo facta una minima $= 0$, erit altera item minima $= a$.

§. 44. Si attente differentiam, quæ intercedit inter (I.[am]) & (II.[am]) formulam §. 30. inveſtigemus, noverimus totam difficillimi hujuſce arcani explicationem petendam eſſe a duplici hoc ſequenti Canone, qui adhuc latuit.

I.

Quantitates lineares ab uno, vel a duobus punctis profectæ, eodem poſitivo vel negativo, aut etiam contrario ſigno affectæ, ſi diverſæ ſumantur, ſemper ſummam poſitivam (vel, ſi malis, negativam) utriſque æqualem, quæcumque ſit ipſarum directio, conſtituunt: identicæ factæ, ſi ſunt æquales, fiunt zero; ſi inæquales earum differentiam poſitivam exhibent: cum non niſi minor majori ſuperimpoſita una cum majoris portione ipſi æquali, identica fieri poſſit.

II.

II.

Quantitates lineares identicæ, quæ ſi ſunt æquales dant zero, ſi inæquales differentiam poſitivam, diverſæ factæ eodem poſitivo, vel negativo, aut contrario ſigno affectæ, ſummam poſitivam (vel negativam, ſi lubet inverſam accipere) conſtituunt.

Hoc ex demonſtratis in toto hoc Opere ſatis patet. Itaque data æquatione $\overset{I}{x} + \overset{II}{x} + \overset{III}{x} + \overset{IV}{x} = AC + CD + BC + Cd$; in qua, ut vidimus, fluentes CD, Cd neque lineam unam continuam, neque ſummam, aut differentiam datam conſtituunt, ſi diverſæ CD, Cd ſumantur identicæ; cum CD æquetur $-$ Cd, & Cd $= -$ CD, erit una aut altera poſita in æquatione ſuperiori

$$\overset{I}{x} + \overset{II}{x} + \overset{III}{x} + \overset{IV}{x} = AC + CD + BC - CD = AC - Cd + BC + Cd:$$

& $\overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = \overset{II}{x} - \overset{IV}{x}$, vel $- \overset{II}{x} + \overset{IV}{x}$ identicæ, & æquales eliduntur; ex quo exſurgit formula noſtra (*fig.* 9.)

(I.ª) $\overset{I}{x} + \overset{III}{x} = x + x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y = AC + CD + BC - CD = AC - Cd + BC + Cd = AD + BD = Ad + Bd$. Quod ſi fiant in formula ſuperiori AC + BC identicæ, cum ſit AC = CB, BC = CA, erit

$$AC + BC = AC + CA = AC - CA = 0$$
$$AC + BC = CB + BC = CB - BC = 0,$$

& $\overset{I}{x} + \overset{III}{x} = \overset{I}{x} - \overset{III}{x} = - \overset{I}{x} + \overset{III}{x} = 0$; & formula noſtra (*fig.* 12.)

(II.ª) $\overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2} + y = - \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} + y$

$= y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2} = y - \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} = dC + CB + DC - BC$
$= dB + DB = dC - BC + DC + CB = dC - CA + DC + CA$
$= dA + DA$: quæ eſt formula noſtra ſecunda. Quod ſi termini omnes identici ponantur, tunc exſurget tertia æquatio

(III.ª) $\overset{I}{x} + \overset{II}{x} + \overset{III}{x} + \overset{IV}{x} = \overset{I}{x} + \overset{II}{x} - \overset{III}{x} - \overset{IV}{x} = \overset{I}{x} - \overset{II}{x} - \overset{III}{x} + \overset{IV}{x}$
$= - \overset{I}{x} + \overset{II}{x} + \overset{III}{x} - \overset{IV}{x} = - \overset{I}{x} - \overset{II}{x} + \overset{III}{x} + \overset{IV}{x} = AC + CD - AC - CD$
$=$ &c.

$= \&c. = 0 + 0$, qui bini & bini alternatim accepti æquantur zero duplici; totaque æquatio compoſita in duas dividitur partiales æquationes, ſingulas zero æquales. Ex hiſce fœcundiſſimis ſane, atque novis principiis conſecutiones novæ, a quibus totum hoc analyticum opus in ampliorem, & meliorem formam inſtauratur, profluunt libentiſſime, a nobis pro re nata in poſterum expromendæ.

§. 45. Nunc interim animadvertamus, formulam (I.^{am}) compoſitam ex uno Syſtemate baſis variabilis $x = \frac{a}{2} + y$, & ex altero baſis datæ $x = \frac{a}{2} - y$, ſive $x + y = \frac{a}{2}$, conſtituere tamen Syſtema integrum baſis ſemper non ſolum datæ, ſed ejuſdem a: eſt enim ſemper $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$. Quin imo, ut Syſtema baſis datæ ſemper obtineatur, neceſſe eſt dividere x in duo Syſtemata partialia baſis datæ, & variabilis. Hinc formula (I.^{a}), quæ eſt compoſitum baſis datæ, ac variabilis, ſemper ſumenda erit, quoties Syſtema baſis datæ compoſitum requirendum erit: ideoque formula (I.^{a}) ſic elata, ita propria eſt Syſtemati baſis datæ, ut alteri baſis variabilis legitima applicari nequeat. Formula vero (II.^{a}) componitur ex duobus Syſtematibus baſis variabilis $x = y + \frac{a}{2}$, $x = y - \frac{a}{2}$, in qua y non poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$, neque $y + y$ minores a, quarum ſumma $x + x = y + y$ conſtituit Syſtema integrum baſis totius variabilis, quando in partialibus baſis variabilis conſtabat ex data ac variabili. Formula igitur hæc (II.^{a}) ſemper dabit, & unice Syſtema integrum baſis variabilis. Hoc poſito quoniam ex §. 38. in formula (I.^{a}) $\overset{I}{x} = \frac{a}{2}$; $\overset{II}{x} = y$, $\overset{III}{x} = \frac{a}{2}$, $\overset{IV}{x} = -y$, erit in hoc Syſtemate baſis datæ $\overset{I}{x} + \overset{II}{x} + \overset{III}{x} + \overset{IV}{x}$; $\overset{I}{x} + \overset{III}{x} =$ diverſis $x + x$, & $\overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = -\overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = \overset{II}{x} - \overset{IV}{x} = 0 = x - x$ identicis. Si vero ex iſtis in hoc Syſtemate acceptis conflabitur Syſtema baſis variabilis, erit hoc $\overset{II}{x} + \overset{I}{x} + \overset{IV}{x} + \overset{III}{x}$; $\overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = x + x$ diverſis; $\overset{I}{x} + \overset{III}{x} = -\overset{I}{x} + \overset{III}{x} = \overset{I}{x} - \overset{III}{x} = 0 = x - x$ identicis, cum ſemper prima x tertiæ, ſecunda quartæ æquetur. Quod ſi ſumpta primum tamquam comparationis termino (III.^{a}) formula, fiat $\overset{I}{x} + \overset{II}{x} + \overset{III}{x} + \overset{IV}{x} = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$;

& hoc

& hoc ordine diſponantur termini formulæ (I.ª), idem prorſus inveniemus, hac ſolum differentia, quod in (I.ª) $\overset{I}{x} + \overset{III}{x} = x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = x = a$ datæ; $\overset{II}{x} - \overset{IV}{x} = - \overset{II}{x} + \overset{IV}{x} = y - y = 0y$ variabili; ac viceverſa in (II.ª). Syſtema baſis datæ impoſterum ſigno (S. A.), baſis variabilis (S. Y.) exprimetur. Suo loco demonſtrabitur, has notas vicem gerere quantitatum, quæ in Calculo communi logarithmico, & exponentiali *ſubtangentes* vocantur, quarum natura ignorata, atque uſus arbitrio factus, fructum ipſarum præcipuum uſque adhuc rapuit.

§. 46. Ex his conſequitur illud maximi momenti Corollarium: (cum in uno Syſtemate quantitates æquales diverſæ, ſint identicæ in altero Syſtemate, & viceverſa; atque quantitates diverſæ ſemper ſigno poſitivo ſimul afficiantur, quantitates identicæ ſigno negativo) conſequitur, inquam, ut quæ eſt ſumma in uno Syſtemate fiat differentia in altero, & viceverſa, nec repugnet quominus fiat zero quæ erat dupla quantitas, & viceverſa, dummodo quæ jam ſuperius demonſtravimus attente perpendantur. Hinc ſpecies illa omnis repugnantiæ, quam præſeferebant formulæ, quas in meis illis ſcriptis edideram, omnino evaneſcit: quæ cum a legitimis, & paſſim uſurpatis Calculi operationibus neceſſario profluant, enodatio hujuſce arcani erat expectanda, aut inveſtiganda potius quam omnia, quæ protuli, ſus deque negare, atque ſimul omnia hujuſce Scientiæ principia funditus evellere.

§. 47. Cum vero in primo Syſtemate baſis datæ y debeat eſſe ſemper minor $\frac{a}{2}$, & in altero Syſtemate y ſemper major; ab uno Syſtemate ad alterum noſmet transferamus oportet, quando in uno Syſtemate conſtituti eam, quæ propria erat hujuſce Syſtematis, conditionem, altera alterius in locum ſuffecta, arbitrio tollimus. Ut rite igitur procedamus, non amplius in eo, quod prima requirebat conditio, Syſtemate inſiſtendum eſt, ſed mutata conditione, Syſtema etiam huic mutatæ conditioni proprium ſumamus neceſſe eſt. Porro duobus prorſus modis ab uno ad alterum Syſtema legitimus tranſitus fieri poteſt. Primus modus in eo conſiſtit, ut rejecta prima, quam ſumpſimus, formula primæ poſitionis propria, ad alteram noſmet convertamus: vel manente eadem primæ poſitionis formula, termini, qui erant diverſi, ideoque poſitivi, ſigno contrario afficiantur, fiantque identici $= 0$; & qui erant identici, & zero æquales, fiant diverſi, ac eodem ſigno poſitivo affecti. Licet vero omnia æque evenire videantur utro utaris modo; tamen multum differre utrum unam, vel alteram inſiſtas viam contendo. Nam ponamus modo Syſtema baſis datæ, cujus æquatio eſt $x + x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$ (in qua $y < \frac{a}{2}$) $= AC + CD + BC - CD$: (*fig.* 25.) ſi fiat $y > \frac{a}{2}$, & $y = \frac{b}{2} > \frac{a}{2}$ data, docuimus terminos identicos

efficiendos eſſe diverſos, & diverſos identicos; ergo in hac ſuppoſitione $CD' - CD' = Cd' - Cd' = \frac{b}{2} - \frac{b}{2} = CD' + Cd' = Cd' + CD'$;

& $AC + BC = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = AC + CA = BC + CB = oA = oB$;

& æquatio $x + x = d'C + CA + D'C - CA = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$: atque in hoc Syſtemate in hac ſuppoſitione mutantur puncta originis linearum, ut quæ in primo caſu $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ erant $AC + BC$, a duobus originis punctis A, & B profectæ, nunc a communi centro C hinc inde procedant, & Cd, CD quæ a communi centro C in diverſa fluebant, nunc a punctis originis datis d', D' diverſis ſibi invicem occurrant. Porro cum $\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \pm o\frac{a}{2} = \pm oy$, hoc pro $o\frac{a}{2}$ ſubſtituto (hoc eſt quæ erat conſtans facta variabili), erit tandem æquatio $x + x = d'C + CD + D'C - CD = d'C - Cd + D'C + Cd = \frac{b}{2} + y + \frac{b}{2} - y$. Hoc modo in eodem ſemper Syſtemate baſis datæ conſiſtimus, ceteris intactis manentibus, ac ſolum facta baſis datæ mutatione, ut quæ primo erat $\frac{a}{2}$, fiat $\frac{b}{2}$: quod Syſtema tandiu valet, quandiu y æquatur $\frac{b}{2}$, in quo y conſequenter fit maxima: & puncta A, B quæ erant data, fiunt variabilia, ac fiunt d', D' data, quæ erant variabilia. Creſcente vero y ſupra $\frac{b}{2}$, reformanda denuo erit formula eo modo, quo in primo caſu, ac toties reformanda, quoties Cd' variabile factum maximum ſuperabit valorem Cd' jam datum. Hac igitur methodo, quæ requirit ſemper baſim datam (cum primum ſupponat puncta d', D' fixa, ſtabilitaque, ut ab ipſis primam originem verſus C ducant d'A, D'A) non niſi per partes, ac repetitis operationibus ad infinitum licet procedere, ut cuicumque valori dato y, qui ad infinitum uſque excurrere poteſt, formula rite poſſit accomodari. Hoc vero in praxi facile obtinetur, ſi data ex. gr. (I.ª) formula $x + x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$,

ſub-

ſubtrahatur portio ſecunda a prima, ut ſit $x - x = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$: data vero (II.ª) $x + x = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$, fiat $x - x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$: in quo caſu differentia (I.ª) æquatur ſummæ (II.ª); & differentia (II.ª) æquatur ſummæ (I.ª). Ideſt, quod erat identicum in primo caſu, & æquale zero, fit diverſum in ſecundo, & duplum; & viceverſa.

§. 48. Secunda vero methodus uno opere, aut, ut ita dicam, uno hauſtu accepta tantum formula (II.ª), omnia obtinet: eſt enim formula (II.ª) $x + x = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$, in qua y quemcumque tandem valorem repræſentare poteſt, qui ſit major $\frac{a}{2}$: verum in hac formula eſt $\frac{a}{2} - \frac{a}{2}$, quæ erat $x - x$ in (I.ª): hoc eſt in hac formula x conſtans eſt, quæ erat variabilis in (I.ª), & hic eſt variabilis y, quæ erat conſtans $= \frac{a}{2}$ in (I.ª). Hæc igitur formula (II.ª) requirit puncta A, B (*fig.* 12.) data, & d, D variabilia prorſus contrario modo, quem (I.ª) poſtulat. Supponit itaque primum punctum originis linearum variabilium Cd, CD commune, atque ipſas ab eodem puncto dato C hinc inde indefinite procedere, & CA, CB ſemper conſtantes. Porro revocata formula (II.ª) §. 37., quæ eſt

$$(\text{II.ª}) \quad x + x = dC + CB + DC - CB = dC - AC + DC + AC$$
$$x + x = BC + Cd + CD - BC = Cd - AC + CD + AC$$
$$= y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2} = dB + DB = dA + DA$$

: & patebit (II.am) hanc

$$= y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2} = Bd + BD = Ad + AD$$

primo modo elatam ſupponere prius data puncta d, D originis diverſa, ut ab iſtis motus incipiat; at ſecundo inverſe ſupponere prius datum punctum commune utriſque C, vel B, A; ac proinde in hoc ultimo caſu etiam CA, CB: puncta enim B, A data, ac fixa nequeunt eſſe, quin ſit data ipſa CA, vel CB $= \frac{a}{2}$. Quare hæc (II.ª) formula, ſi primo modo ſcribatur, pertinet ad primum modum, quo §. antecedenti uſi ſumus ad reformandam formulam, ut legitime reſpondeat conditioni ipſi repugnanti: ſi vero invertatur, pertinet ad illud Syſtema, quod recte cum appoſita conditione congruit. Licet vero hæc a me

me pluribus explicata differentia, quæ intercedit inter utrumque modum tranſeundi ab uno ad alterum Syſtema, nullius momenti primo intuitu videri poſſit; tamen cum de æquationibus ſecundi gradus agemus, conſtabit quantum conferat hanc in anteceſſum animadvertiſſe.

§. 49. Atque hic in naturam formulæ æcumenicæ $x+x=AC+CD+BC+CD$, a qua §. 30. formulas (I.^{am}) & (II.^{am}) duorum Syſtematum generalium baſis datæ, ac variabilis eruimus, diligentius eſt inquirendum. Hæc quatuor conſtat terminis, qui primo ſumpti inter ſe æquales omnes, poſſunt eſſe vel omnes diverſi, vel omnes identici; vel duo diverſi, identici duo. Item quatuor iſti termini in duo æqualium paria dividi poſſunt inter ſe inæqualia, quorum ſingula ſimul conſtent terminis æqualibus ſed diverſis; vel ſingula terminis æqualibus, & identicis; vel alternatim uno identico, alterum quantitates æquales, ſed diverſas continet. Si iſti termini omnes ſumantur diverſi, ſed æquales omnes inter ſe, ſigno poſitivo omnes (ut docuimus §. 44.) ſunt afficiendi, ſummamque ſemper conſtituunt poſitivam. Hi tamen hoc modo concepti iis carent conditionibus, quas vidimus §. 3. eſſe neceſſarias, ut legitima Syſtematum unio conſtituatur. Nam, vel erit

$$x+x=\frac{a}{2}+y+\frac{a}{2}+y=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=y+y+y+y=(\textit{fig. } 25.)$$

$$AC+CB+BC+CA=AD+Bd, \text{ vel }=AD'+Bd',$$

quæ componitur ex duabus partialibus, quarum nec ſumma, nec differentia conditionem, quam requirit unum aut alterum Syſtema, univerſim ſervat. In Syſtemate enim baſis datæ ſumma, licet terminis datis conflata, valorem mutat, æquatur enim duplæ a; differentia vero ſemper zero: in altero vero Syſtemate baſis variabilis ſumma & ipſa dupla eſt veræ, & item differentia nulla. Idem prorſus eveniet, ſi bini & bini tantum inter ſe æquales ponantur. Nam ut conditiones requiſitæ univerſim ſerventur, neceſſe eſt ut in (I.^{a}) formula Syſtematis baſis datæ ſit ſumma $x+x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$, & differentia $x-x=y+y$: at vero contra in (II.^{a}) baſis variabilis ſumma $x+x=y+y$, & differentia $x-x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. Hinc ad hæc omnia ſervanda, neceſſe eſt ut par unum terminorum identicorum, diverſorum par alterum ſumatur, atque unum quantitatibus datis, alterum conſtet variabilibus.

§. 50. Nec melius res procedit, ſi omnes identici, & æquales ſumantur; tunc enim æquatio $x+x=o+o$ itemque differentia: quæ tam a veritate abludit, ut non niſi puncta A, B (*fig.* 25.) determinet, facta $x+x=AC-AC+BC-BC=AC+CA+BC+CB=oAC+oBC=oA+oB$; vel uno tantum puncto communi C bis ſumpto, ſi fiat $x+x=CA+AC+CB+BC=oCB+oBC=oC$

$= oC + oC$. Quod ſi omnibus quidem æqualibus ſumptis par unum identicum, alterum diverſum ponatur, tunc æquatio erit vel $x + x = AC + BC + AC - AC = AC + BC + oAC = BC + AC + BC - BC = BC + AC + oBC = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$: vel $x + x = CD + Cd + CD - CD = y + y + oCD = y + y + oDC = y + y + odC$: in quo caſu ſervatur quidem conditio neceſſaria ſummæ, ſed non ea, quam requirit differentia; in primo enim caſu differentia æqualis eſſet ſummæ datæ, ſcilicet $x - x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, quæ debet eſſe variabilis $= y + y$, ſive ſummæ (II.^{a}): in ſecundo differentia $x - x = y + y$, quæ debet eſſe conſtans $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} =$ ſummæ formulæ (I.^{a}).

§. 51. Quoniam igitur, ut omnia rite procedant, alterutrum par diverſum, alterutrum identicum ſit oportet, atque inſuper par unum variabiles, alterum datas contineat; videndum nunc quid noſtræ formulæ eveniat, ſi quæ diverſa erant fiant identica, & viceverſa. In noſtra igitur formula $x + x = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} + y$, in qua & datæ, & variabiles ſunt diverſæ, ſi ſumantur identicæ variabiles, exſurgit formula (I.^{a}) $x + x' = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$, quæ dat Syſtema baſis datæ, in qua ſumma $x + x' = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, & differentia $x - x' = y + y$, quæ cum univerſim legitima ſit, dat etiam, ut vidimus, tam radices limitis, ſive maximam & minimam $x + ox' = AB = a$, vel $ox + x' = BA = a$, quam radices æquales $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, quando ſcilicet $y = o$; quam quæ intermediæ ſunt intra hoſce limites prorſus infinitæ, $x + x' = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$, in qua y valorem $\frac{a}{2}$ nequit ſuperare. Quod ſi datæ, quæ erant diverſæ, fiant identicæ, & variabiles, jam identicæ fiant diverſæ (id quod facile obtineri docuimus, ſi ipſarum ſigna mutentur, contrario ſigno affectis quæ erant poſitivo, poſitivo quæ erant contrario ſigno notatæ); tum æquatio (I.^{a}) in (II.^{am}) convertitur

tur $x + x' = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$, in qua ſumma $x + x' = y + y$, & differentia $x - x' = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, & in qua y omnes quidem valores ſupra $\frac{a}{2}$ obtinere poteſt, infra non poteſt, ſalva identitate conſtantium $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$, & unius lineæ nec abruptæ, nec ſuperimpoſitæ continuatione, ut ex figura facile colligi poteſt. Hic igitur facta una minima, vel maxima, eſt itidem minima, vel maxima altera; maximæ quantitate infinitæ, intermediæ vero numero infinitæ, quæ tamen omnes cum maximis ac minimis differre debent quantitate a. Differentia igitur, quæ intercedit inter (I.am) ac (II.am) formulam, ideſt inter unum, ac alterum Syſtema, in eo ſita eſt, quod cum quælibet conſtet quatuor quantitatibus binis & binis inter ſe æqualibus, ac duabus identicis, binis diverſis, quæ ſunt identicæ in uno Syſtemate fiant diverſæ in altero, & viceverſa. Id vero nobis in Syſtemate baſis datæ conſtitutis toties neceſſario faciendum eſt, quoties y ſuperat valorem $\frac{a}{2}$: tunc enim factis identicis datis $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$, & diverſis y, y tranſitum obtinemus ad Syſtema variabile, in quo ad infinitum quidem utraque y progredi poteſt, ſed non poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$.

§. 52. Vidimus ſuperius eſſe $x + x' = CA + CB = CA + Ad' + CB + BD'$ (*fig.* 25.) $= Ad' + CA + CB + BD' = BD' + CB + CA + Ad'$: ſed $CA + CB = BA$; ergo $x + x' = BD' + BA + Ad' = BD' + Bd'$ $= y + y' = y - \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$. Item quoniam Cd $= CD$, erit $Cd - AC = CD - BC$, ſive $Ad = BD$, & $Ad + AD$ $= AD + BD$, & $Bd + BD = Bd + Ad$, ſive $x + x' = y - \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2}$ $=$ (*fig.* 12.) $Ad + AD = BD + Bd = AD + BD = Bd + Ad$ $= AB + BD + BD = BA + Ad + Ad = a + y + y$ $= y + \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2}$, facto Ad, vel $BD = y$, ſive $AD + BD$ $= AD + AD - AB$; $Bd + Ad = Bd + Bd - BA = y' + y' - a$ $= y' - \frac{a}{2} + y' - \frac{a}{2}$: quoniam ſupra vidimus $y + y' = Ad + AD = BD + Bd$.

Igi-

Igitur valet æquatio $x+x'=y'+y''=y+\frac{a}{2}+y-\frac{a}{2}=y'+\frac{a}{2}+y'+\frac{a}{2}$ $=y''-\frac{a}{2}+y''-\frac{a}{2}$; ſed in primo membro y, $y=$ Cd, CD ad centrum C, in aliis caſibus y æquales, vel $y'=$ Ad $=$ Bd; vel $y''=$ AD $=$ BD, prout a poſitiva, vel negativa ſumitur. Quamobrem in æquationibus $x+x$ $=y+y=y'+\frac{a}{2}+y'+\frac{a}{2}=y''-\frac{a}{2}+y''-\frac{a}{2}=$ Ad $+$ CA $+$ Ad $+$ CA (*fig. ead.* 12.) $=$ AD $-$ AC $+$ AD $-$ AC, x, & y, quæ ſunt in primo membro, fiunt ſic transformata æquatione æquales, & etiam identicæ. Si vero ſumatur Cd, CD (*fig.* 9.) minor CA, erit tunc facta Ad $=y$; Ad $+$ Bd $=y+$ AB $-$ Ad $=y+2.\frac{a}{2}-y=y+a-y$; vel facta BD $=y'$; Ad $+$ Bd $=a-y'+y'$; atque diviſa a in duas partes $x+x'=\frac{a}{2}+y+\frac{a}{2}-y=\frac{a}{2}-y'+\frac{a}{2}+y'$; ſive $x+x'=a+y-y$ $=a-y'+y'=\frac{a}{2}+y+\frac{a}{2}-y=\frac{a}{2}-y'+\frac{a}{2}+y'$. Sumptæ igitur æquationes in primo caſu $x+x=y+y+a=y'+y'-a$: in ſecundo $x+x=-y+y+a=y'+a-y'$ ſic diſpoſitæ primæ non dant ſummam $=y+y$, ſed differentiam $x-x=-a=a$: quæ quidem excepto ſigno eſt conſtans: ſecundæ dant quidem ſummam conſtantem $=a$, non vero differentiam, quæ eſt $x-x=-y-y-a=y'+y'-a$ $=y+y+a=-y'-y'+a$. Hinc ut ſimul in unoquoque Syſtemate duæ conditiones ſupradictæ univerſim ſerventur; æquatio $x+x=y+\frac{a}{2}+y-\frac{a}{2}$, quando $y>\frac{a}{2}$, quando vero $y<\frac{a}{2}$; $x+x=\frac{a}{2}-y+\frac{a}{2}+y$ eſt aſſumenda.

§. 53. Diligenter itaque obſervandum, æquationes §. 52.
(I.^{am}) $x+x=y+y+a=y'+y'-a$
(II.^{am}) $x+x=-y+y+a=y'-y'+a$, in quibus conditiones requiſitæ univerſim non verificantur, in limite tamen conditionibus neceſſariis ſatisfacere: dummodo recte intelligantur. Nam in (I.^{a}) quæ eſt propria Syſte-

matis baſis variabilis, quæ dat duas æquationes (1) $x + x' = y + y + a$; (2) $x + x' = y + y - a$; in (1) y minima debet eſſe zero, in (2) y minima debet eſſe a: igitur facta in prima $y = 0$, ſive una $x = y = 0$; erit $x' = a$, minima: ergo in hac æquatione, minima una æqualis zero; minima altera $= a$. In ſecunda vero y minima debet eſſe $= a$, ſive $x = y = a$, ex qua eruitur altera $x' = 0$ minima, ac proinde etiam earum differentia erit $= a$: hoc ſolum animadverſo, ut illæ x inter ſe comparentur, atque addantur, ſubtrahanturque, quæ inter ſe conſociantur, hoc eſt quæ in alterutra continentur. Cum enim prima det differentiam $x' - x = y + a - y$, facta $y = 0 = x$, erit $x' = a$; in ſecunda cum ſit differentia $x - x' = y - y + a$, facta $x = y = a$, ut æquatio requirit, erit $x' = 0$. (II.ª) vero dat (1:am) $x + x' = - y + y + a$; (2:am) $x + x' = y + a - y$; in quibus ſingulis vel fiat y minima $= 0$, vel maxima $= a$, erit ſemper $x + x' = a$; $x = 0$ minima, $x' = a$ maxima; vel $x = a$ maxima, $x' = 0$ minima: differentia vero vel $x' - x = x' - 0x = a$; vel $x - x' = x - 0x' = a$, quæ dant ſingulæ maximam. Porro in ſingulis iſtis æquationibus (I.ª,), & (II.ª) non niſi una, aut altera variabilis y, vel y' continetur, ac proinde in iſtis valores y, y ſemper æquales in unaquaque æquatione inter ſe: ab iſtis igitur ſic elatis, non niſi unus, aut alter valor y erui poteſt, licet in primo membro valores $x + x'$ ſint diverſi.

§. 54. Facile tamen hæ reducuntur ad inæquales valores y continendos; nam cum in (I.ª) ſit $y + a = y'$, & $y' - a = y$; & in (II.ª) $a - y = y'$; $a - y' = y$, erit in

(I.ª) $x + x = y + y + a = y' + y' - a = y + y' = y' + y$; in

(II.ª) $x + x = - y + y + a = y' - y' + a = y + y' = y' + y$.

Sed in primo caſu $y' + y = \mathrm{AD} + \mathrm{Ad}$ (*fig.* 12.) $= \mathrm{Ad} + \mathrm{CA} + \mathrm{CB} + \mathrm{BD}$ $= y + y$, diverſis ad centrum, & æqualibus; & minimæ $y + y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, maximæ $y + y$ infinitæ, & æquales: in ſecundo erunt $y + y'$ (*fig.* 9.) $= \mathrm{Ad} + \mathrm{BD} = y + y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, ſingulæ maximæ. Rurſus in primo caſu maximæ infinitæ $y + y = \mathrm{Cd} + \mathrm{CD} = \mathrm{Cd} + \mathrm{BC} + \mathrm{CD} - \mathrm{BC}$ (*fig.* 12.) $= y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$; in ſecundo vero maximæ $y + y$ (*fig.* 9.) $= \mathrm{AC} + \mathrm{BC} = \mathrm{AC} + \mathrm{CD} + \mathrm{BC} - \mathrm{CD} = \mathrm{AC} - \mathrm{Cd} + \mathrm{BC} + \mathrm{Cd}$ =

$= \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$; ergo

$$(\text{I.}^a)\ x + x = y + y + a = y' + y'' - a = y + y' = y' + y = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$$

$$= y - \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} = (\textit{fig. } 12.)\ \text{Bd} + \text{BD} = \text{Ad} + \text{AD}$$

$$(\text{II.}^a)\ x + x = y - y + a = y' - y' + a = y + y' = y' + y = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$$

$$= \frac{a}{2} - y + \frac{a}{2} + y\ (\textit{fig. } 9.) = \text{Ad} + \text{Bd} = \text{AD} + \text{BD};$$

in quibus ultimis æquationibus utrique valores inæquales continentur, atque in in iſtis ultimis tantum univerſim in (I.ª) ſumma variabilis $x + x = y + y = y + y' = y' + y$ æqualibus, inæqualibus, permutatis variabilibus; & differentia $x - x = \text{AD} - \text{Ad} = \text{Bd} - \text{BD} = y - y' = y' - y = a = \text{AB} = \text{BA} = a$ conſtanti: & in (II.ª) ſumma data $x + x' = a$, & differentia $x - x' = x' - x = y - y' = y' - y = y + y = y' + y'$. Atque in (I.ª) una $x = y$ intra limites o minimum, & ∞ maximum; altera $x = y'$ intra limites a minimum, & ∞ maximum continetur; utræque vero a ſuo quæque limite profectæ ſimul augentur, vel minuuntur, ut tamen ſemper inter ſe differant quantitate data a. In (II.ª) vero una & altera x intra limites o minimum, & a maximum continetur; ſed ita inter ſe copulantur, ut uni minimæ = o altera reſpondeat maxima = a, & viceverſa; atque in caſibus intermediis creſcente una, altera decreſcat eadem menſura, qua prima augetur.

CAPUT VI.

De Syſtemate indeterminato, ex quo eruuntur veræ Infiniti, & Infiniteſimi tam abſoluti, quam relativi notiones.

§. 1. Quoniam in formula Syſtematis baſis variabilis $x + x' = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$, eſt $\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{0a}{2} = \overline{1 - 1} . \pm \frac{a}{2} = \overline{1 - 1} . \pm 0x$, & x poteſt quemcumque valorem obtinere, dummodo non ſuperet y, ſcilicet a zero uſque ad y; poterit & ipſa $\frac{a}{2}$ in variabilem tranſmutari, ita ut ſit formula $x + x' = y + x + y - x$ prorſus indeterminata, in qua nulla data reperitur. Syſtema igitur huic formulæ reſpondens erit prorſus indeterminatum, quod quid ſignificet diligenter eſt inveſtigandum. Poſita igitur formula $x + x' = y + x + y - x$, erit (*fig.* 12.) d C $= y =$ D C $= y$, quoniam y debent eſſe æquales, ſed diverſæ, & x identica $=$ C A, vel C B: quod ſi fiat $x + x' = x + y + x - y$, erit d C $= x$ $=$ D C $= x'$ diverſis, & y identica $=$ C A, vel C B. Hæc ſubſtitutis lineis, erit $x + x' =$ d C + C B + D C − C B = d C − C A + D C + C A. Verum cum in ſic elata formula puncta originis prius exiſtentia (§. 48. Cap. ſup.) ponantur d, D, ac punctum medium C; A vero, vel B variabile, poteſt ipſa pertinere ad formulam (I.^{am}) §. 44 Cap. ſup., in qua licet in hoc caſu d C + D C $= y + y = 2y$ variabiles; tamen hujuſmodi puncta d, D fixa permanent, donec C A vel C B minor ſit C d vel C D: facta vero C A = C d, vel C B = C D, ſive facta C A maxima = C d, & d A minima = 0; vel C B maxima = C D, & D B minima = 0; radices erunt d A = 0 d A $= y = 0$ minima, & D A = D d $= y + y = 2y$ maxima: vel D B = 0 D B $= y = 0$, minima; & d B = d D $= y + y = 2y$ maxima. Sed quoniam per eumdem §. Cap. ſup. eadem ſic efferri poteſt formula $x + x'$ = B C + C d + C D − B C = A C + C D + C d − A C

= C d

$= Cd + CD = CD + Cd = BD + Bd = AD + Ad$; videndum quid ſingula ex iſtis æqualibus membris in poſitione ſignificent. Ac primum $x + x = Cd + CD = CD + Cd$ non determinat niſi punctum C medium, a quo tamquam communi centro hinc inde Cd, CD ad infinitum æqualiter procedunt. At $x + x' = BD + Bd$ determinat tantum punctum B, quod ſi ſolitarium ſumatur, tamquam centrum poni poteſt, hinc inde ab ipſo puncto B; Bd, BD ad infinitum æqualiter fluentibus. Verum ſi referatur ad punctum primum medium C determinatum, cum & ipſum ab hac ſecunda determinetur, erit determinata diſtantia BC, quam vocavimus $\frac{a}{2}$. Similiter tertia $x + x' = Ad + AD$ determinabit punctum A reſpectu puncti C, quod quidem reſpectu ſuæ æquationis in quovis loco A dato ſitum eſſe poterit; ſed quoniam debet etiam eſſe $Ad + AD = BD + Bd$, ſive $Ad + AC + CD = BD + BC + Cd$; & per primam $CD = Cd$; ergo $Ad + AC = BD + BC$, quæ æquatio cum univerſim ſemper verificari debeat, etiam in caſu Ad, BD minimarum $= 0$, ſit oportet $AC = BC$. Ut igitur hæc omnia locum habeant, atque tres ſimul æquationes eodem tempore verificentur; neceſſe eſt tria ſimul puncta A, C, B determinare, C centrum, & A, B hinc inde a puncto C æqualiter diſſita. Quare ut æquatio $x + x = Cd + CD = AD + Ad = BD + Bd$ omnes haſce ſervet conditiones, licet prima non determinet niſi punctum C, ac proinde $Cd = CD = y$, fluere a zero uſque ad infinitum libere hinc inde a centro C poſſit; hoc tamen nequit cum ſecunda & tertia conciliari: hinc neceſſe eſt, ut (*fig. ead.* 12.) CB, & CA ſit minimus valor, ad quem deprimi poſſit valor CD, & Cd: non poteſt igitur $y = CD$ minor eſſe $CB = \frac{a}{2}$, & $y = Cd$ minor $CA = \frac{a}{2}$: intra limites igitur $\frac{a}{2}$, & ∞ valor y continetur; $\frac{a}{2}$ minimum, maximum ∞. Quare in Syſtemate baſis variabilis, ſumptis tantum duabus æquationibus $x + x' = AD + Ad = Bd + BD$, omiſſa prima æquatione, ſive non conſiderato puncto medio C, erit $x + 0x' = AB + 0Ad = a + 0Ad$, ſive AD minima $x = a$, Ad minima $x' = 0Ad = 0A$; vel $0x + x' = BA + 0BD = a + 0B$, in qua x mimima $= 0BD = 0B$; x' item minima $= BA$: quo pacto utriſque conditionibus ſatisfit, atque ſemper $x - x' = AB = BA = a$ datæ.

§. 2. Intra igitur limites §. ſuper. indicatos eodem tempore creſcunt, vel decreſcunt æqualiter ſimul Ad, BD æquales, ſed diverſæ. At extra hoſce limites, hoc eſt a puncto A (*fig. 9.*) verſus B, & a puncto B verſus A, ſi accipiantur Ad, BD æquales & diverſæ, ut in caſu ſuperiori, nec ſumma, nec dif-

differentia ſervatur, nec linearum continuatio: ſunt igitur accipiendæ inæquales, atque in eo puncto d, vel D, in quod concurrunt: tunc enim A d + B d = A D + B D lineam integram conſtituunt $= a$, quæ in primo caſu æqualis erat differentiæ $x - x'$: hinc quæ erat differentia in primo caſu, fit ſumma in hoc ſecundo, & A d $= x$, B d $= x'$; vel A D $= x$, B D $= x'$, ut ſit $x + x' =$ A d + B d $= a$. At poſito puncto medio C, erit C d $= y = \frac{a}{2} - x$; & $x = \frac{a}{2} - y =$ A d; B d $= x' = \frac{a}{2} + y$, ergo $x + x'$ = A d + B d $= \frac{a}{2} - y + \frac{a}{2} + y$; ſive $x + x' =$ A D + B D $= \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$. Atque hinc decreſcentibus C d, C D infra C A, C B a puncto A, vel B; vel ſumpto C unico originis puncto, ex quibus hinc inde (*fig.* 12.) uſque ad infinitum procedebant diverſi valores y, (quorum ſumma æquabat $x + x'$ ab eodem puncto hinc inde profectas) tranſitus fit ex puncto medio C ad duo puncta A, & B originis diverſæ x, x', quæ ſibi occurrunt in puncto aliquo intra A, & B; (hoc eſt tranſitus fit a *fig.* 12. ad 9.) $y =$ C d, vel C D identica originem ex C ducente. Quare hic creſcente A d decreſcit B D (*fig.* 12.) fitque B d (*fig.* 9.); & viceverſa; atque ideo hic A d, B D, quæ in altero Syſtemate eodem tempore creſcebant, vel decreſcebant ſimul, reciprocantur ita, ut facta una minima æquali zero, altera ſit maxima æqualis A B, vel B A, a quarum complexu ſemper conſtanti, & æquali a denominationem ſuam Syſtema baſis datæ deprompſit. Contrario prorſus ratiocinio, ac ductu, nobis in Syſtemate baſis datæ conſtitutis fas erit ad Syſtema baſis variabilis pervenire.

§. 3. Quare ſumpta æquatione $x + x' = y + x + y - x$, in primo membro $x + x'$ ſolitariæ debent eſſe diverſæ, ac ſemper numero infinitæ, & inæquales (excepto caſu in quo $x = 0$, in quo tantum æquantur) quæ binæ & binæ ſumptæ æquantur ſummæ $y + y$. In altero vero membro y, y ſemper debent eſſe æquales, ſed diverſæ; at x, x æquales, ſed identicæ; ut ſit $x - x = 0x$. Quod ſi fiat $y + y = y - y$, & $x - x = x + x$, ut ſcilicet quæ erant æquales, ſed diverſæ, fiant etiam identicæ, & viceverſa; tum fit permutatio variabilium, quæ inter ſe vicem mutant: quæ mutatio tunc fieri debet, quando x ponitur major y, ut recte (quemadmodum vidimus) æquatio procedat, nec puncta originis prima y, y alterentur. Inſuper ſi quæ diverſæ ſunt in ſecundo membro x, x æquales, ponantur variabiles; tunc y identica cum altera y valoris dati ſit oportet. Si enim tam ſumma, quam differentia x, x' primi membri ſit incognita, quomodo aliquid erui poterit ad earum valorem determinandum? Ut vero id obtineamus, quod propoſitum nobis eſt, neceſſe eſt determinare punctum C (*fig.* 12.) originis commune ipſis y, y, quo determinato conſequi poſſimus valorem datum differentiæ C d — A d $= y - x = \frac{a}{2}$; C D — B D $= y - x = \frac{a}{2}$; ut inde eruatur differentia A D — A d

$= x$

$= x - x' = AB = a$, vel $Bd - BD = BA = a$, qua data, ac diviſa bifariam, determinatur centrum C, ac punctum B (poſito primo puncto A) vel punctum A (dato primum puncto B) æque diſſitum a centro D ac eſt A, vel B. Quod ſi fiant x, x in ſecundo membro quæ debent eſſe æquales, fiant inquam etiam datæ $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; erit ſtatim præter punctum A, vel B determinatum centrum C, ac proinde alterum B, vel A, & $x + x' = Cd + CD$ $= CA + Ad + CB + BD = Ad + CA + CB + BD = Ad + AD$, vel $= BD + CB + CA + Ad = BD + BA + Ad = BD + Bd$ $= y + y' = y - \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$.

§. 4. Revocemus iterum formulam $x + x' = y - x + y + x$, quam ſic elatam vidimus eſſe ita indeterminatam, ut non niſi punctum C ſive centrum determinetur, ac proinde ſingulæ x primi membri, & y, x ſecundi (tres variabiles inter ſe diverſæ, nulla data conſtanti) æquationem conſtituunt infinite indeterminatam, quæ ut incipiat determinari, neceſſe eſt aut ſummam $x + x'$ primi membri, aut y vel x ſecundi pro arbitrio alicui datæ æquare. Ponamus primo determinatam eſſe ſummam variabilium $x + x' = a$: ſed $x + x'$ $= y + y$, quæ y inter ſe æquantur: ergo erit $y + y = a$, $2y = a$, & y $= \frac{a}{2}$; ergo $x + x' = a = \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2} + x = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, in qua æquatione ut conſtans ſemper maneat ſumma variabilium inæqualium primi membri $x + x'$, oportet ut x ſecundi membri ſit ſemper minor $\frac{a}{2}$, & $- x + x$ $= 0$, ſive identicæ ſint x, x, quæ æquales ſunt. In hac igitur maximus valor x erit $\frac{a}{2}$, & minimus $= 0$; in primo caſu una x primi membri fit zero, altera maxima $= a$; in ſecundo x, x' æquantur quidem inter ſe, ſed ſunt diverſæ: & quoniam $x - x$ originem ducunt a centro (*fig. 9.*) C, & $x + x'$ nequeunt excedere valorem lineæ AB, creſcente una, altera decreſcat oportet intra hunc limitem, ideoque & diverſa originis puncta A, B habeant, & invicem in puncto variabili d ſibi occurrant. Hujuſmodi limites nequeunt, intacto ſervato Syſtemate baſis datæ, tranſiliri, niſi mutetur valor determinatus $y + y$ æqualium, ſed diverſarum; hoc eſt mutetur baſis AB $= b$ major a, in quo uno caſu x poteſt excedere valorem $\frac{a}{2}$, atque uſque ad $\frac{b}{2}$ ad ſummum pervenire: atque ita, ut vidimus, non niſi per partes procedendo, atque ſupponendo valorem

lorem y ſemper datum, poteſt obtineri legitima æquatio, quando x excedit valorem y, ſi, inquam, velimus in eodem ſemper Syſtemate permanere.

§. 5. Quod ſi datam velimus in ſecundo membro $x = \frac{a}{2}$, erit $x + x'$ $= y - \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$, in quo caſu y hinc inde a centro (*fig.* 12.) C non poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$, CA, vel CB; ſed quidem major ad libitum, & uſque ad infinitum directionibus contrariis unaquæque y progredi poteſt: indeterminatus igitur eſt in hac hypotheſi valor y a centro C originem ſumentis, & ita indeterminatus, ut primam originem puncti d, & D (*fig. ead.* 12.) non niſi ad diſtantiam infinite abſolutam fas ſit collocare, ut ſemper major ſit valore $\frac{a}{2}$, CA, vel CB, cum a quemcumque valorem a zero uſque ad infinitum ſumere poſſit, uſque dum ad infinitum abſolutum, in puncta d, D diſtantia infinite abſoluta a centro C diſſita, tandem ad ſummum perveniat, in quo caſu æquatur y. In hoc igitur Syſtemate baſis variabilis puncta extrema d, D cenſenda ſunt ſuam primam originem ſumere a punctis d, D infinitate abſoluta a centro C remotis, ac verſus C ſemper minuendo progredi: cum in altero Syſtemate baſis datæ, puncta magis diſſita a puncto C ſint (*fig.* 9.) A, B determinata a valore maximo x, $x =$ CA, vel CB. In primo igitur Syſtemate a maximo finito valore $x =$ CA, uſque ad C decreſcente x, valor $y = 0$ uſque ad $\frac{a}{2} =$ AC progreditur, atque y, x reciprocantur: in Syſtemate vero baſis variabilis ab Infinito Abſoluto, tamquam maximo valore $x =$ (*fig.* 12.) Cd $= \infty$ uſque ad A punctum datum progredi poteſt. Item in primo Syſtemate baſis datæ, baſis data poteſt eſſe æqualis zero, quando ſcilicet $x = 0$, & erit $x + x' = 0 + \frac{0}{2} + 0 - \frac{0}{2}$, punctis A, B in C (*fig.* 9.) recidentibus; in quo caſu tam maxima, quam minima $x = 0$: & cum ſit CA $=$ CB $= \pm \frac{0}{2}$, tam verſus CA, quam verſus CB ſumi poteſt origo poſitivi, aut negativi: in altero Syſtemate baſis variabilis erit $x + x' = \infty + \frac{0}{2} + \infty - \frac{0}{2}$ $= \infty + \frac{a}{2} + \infty - \frac{a}{2}$, quicumque ſit valor a uſque ad valorem ∞ maxi-

mum

mum Infinitum abſolutum. Hæc igitur eſt inter hæc Syſtemata differentia maxime attendenda; quod baſis a (*fig. 9.*) C, in quo eſt zero, ſit aliqua, & finita $= CA = CB$, procedendo a C verſus A, vel B; in Syſtemate baſis variabilis ab Infinito abſoluto (*fig. 12.*) $= dC$ decreſcendo fiat finita, ita ut in primo caſu ſit baſis $x + x' = o + \frac{a}{2} + o + \frac{a}{2} = CA + CB$ (*fig. 9.*) in Syſtemate vero baſis variabilis ſit $x + x' =$ (*fig. 12.*) $dA + AC + DB + BC = \infty + \frac{a}{2} + \infty + \frac{a}{2}$: ergo baſis in primo caſu $x + x' = o + \frac{a}{2} + o + \frac{a}{2} = o + CA + o + CB$ (*fig. 9.*) in ſecundo $x + x' = \infty + \infty = dC + DC$ (*fig. 12.*); hoc eſt directionibus contrariis CA, CB in alterutro Syſtemate procedunt: in primo enim a zero uſque ad infinitum; in ſecundo ab infinito uſque ad zero progredimur: at $x + x' = \infty + \infty =$ (*fig. 12.*) $dC + DC = dC + CB + DC - CB = \infty + \frac{a}{2} + \infty - \frac{a}{2}$: ergo in primo baſis

$$x + x' = o + \frac{a}{2} + o + \frac{a}{2} = o + CA + o + CB = CA + CD + CB - CD$$

(*fig. 9.*), in ſecundo baſis

$$x + x' = \infty + \infty = dC + DC = dC + CB + DC - CB \text{ (fig. 12.)},$$

& in primo caſu CD eſt variabilis uſque ad B, in ſecundo CD uſque ad infinitum: ergo in primo baſis $x + x' = o + \frac{a}{2} + y + o + \frac{a}{2} - y$, in ſecundo baſis $x + x' = \infty + y + \infty - y$; ſi fiat igitur in ſecundo $x = \frac{a}{2}$, erit in primo baſis $x + x' = o + \frac{a}{2} + y + o + \frac{a}{2} - y$, in ſecundo baſis $x + x' = \infty + \frac{a}{2} + \infty - \frac{a}{2}$, dC vero minui poteſt, uſque dum non fiat minor CA; ergo facta dC finita, ſed variabili, erit, facto $\infty = \infty + y = dC$, $x + x' = o + \frac{a}{2} + y + o + \frac{a}{2} - y = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$, ſublato zero: $x + x' = \infty + y + \frac{a}{2} + \infty + y - \frac{a}{2} = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$; ſublato infinito.

Hoc vero totum obtinetur, ſi quæ erat conſtans fiat variabilis, & quæ erat variabilis fiat conſtans : hoc enim modo tranſitus fit a Syſtemate baſis datæ ad Syſtema baſis variabilis ; hoc eſt quæ erant identicæ ad commune centrum C fiunt æquales, ſed diverſæ, diverſo ſingulæ gaudentes originis puncto.

§. *6.* In Æquatione igitur œcumenica (*fig.* 12.) $x + x' = y + x + y - x = Ad + AD = Cd - AC + CD + AC$ ſi ponamus x, ſive $AC = 0$, punctum C cadit in A, ac tunc differentia $x - x' = 0 + 0$, ſive nulla, ex quo cum nihil aliud niſi centrum C in A determinetur, nihil aliud erui poteſt, niſi quod x, x æquentur inter ſe, quemcumque valorem etiam infinitum obtineant : differentia enim æqualium ſemper nulla eſt. In eamdem prorſus indeterminationem incidimus, ſi ponamus x infinitam, ſive centrum C infinite diſſitum a puncto A, dummodo animadvertamus ſemper y majorem debere eſſe quacumque quantitate variabili x : ut ſit æquatio $x + x' = (\infty + y) + \infty + (\infty + y) - \infty = (CA + AD) - CA + (CB + BD) + AC$: quoniam vero $(CA + Ad) - CA + (CB + BD) + AC = CA + Ad + CB + BD = CA + Ad - CA + BD$, facta identica CB cum $-CA$, erit $(CA + Ad) - CA + (CB + BD) + AC$ tam $= (\infty + y) + \infty + (\infty + y) - \infty$, quam $= (0 + y) + 0 + (0 + y) - 0$, hoc eſt centrum tam cadere poteſt in A, quam in C infinita prorſus diſtantia ab A remotum. Quod ſi fiat y finita, ac data $= \frac{a}{2}$ (ſufficit enim ut quacumque quantitate major ſit ipſa x), tam erit $x + x'$

$$= \left(\infty + \frac{a}{2}\right) + \infty + \left(\infty + \frac{a}{2}\right) - \infty = \left(\infty + \frac{a}{2}\right) + \left(\infty + \frac{a}{2}\right)$$

$= (\infty\, CA + Ad) + (\infty\, CB + BD)$, facta $Ad = BD = \frac{a}{2}$: quam

$= \frac{a}{2} + 0 + \frac{a}{2} - 0 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = AC + BC$: ergo (*fig.* 26.)

$$(\infty\, CA + AC') + (\infty\, CB + BC'') = AC + BC;$$

ergo $\infty + \frac{a}{2} = 0 - \frac{a}{2}$; & $\infty - \frac{a}{2} = 0 + \frac{a}{2}$; ſive $AC' = AC$; $BC'' = BC$

& $\infty + y = 0 - y$; & $\infty - y = 0 + y$; ſive $-AC = AC$; $-BC = BC$

ſive $\infty = 0$ $\quad 0 = -\infty$ vel $AC' = -AC$; $BC'' = -BC$

Hinc

Hinc data $x + x' = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$, ac factis y, y infinitis, erit $x + x'$

$= \infty + \frac{a}{2} - 0 + \frac{a}{a} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \pm 2 \cdot 0$. Uno verbo centrum, quod in primo caſu indeterminatum erat, collocatur in puncto medio C, diviſa $AB = a$ bifariam. Sed de his ſuo loco plura: nunc hæc innuiſſe ſat eſt, ut appareat ſtatim differentia, quæ intercedit inter Syſtemata baſis datæ, ac variabilis: quæ omnia æquationibus ſecundi gradus maximam lucem afferent.

§. 7. Illud quoque maxime intereſt obſervare, variabiles ſcilicet, ſive fluentes originem ſuam a quantitatibus datis æqualibus, ſed identicis, quæ zero æquantur, neceſſario recognoſcere, atque limites, intra quos continentur, ab iſtis identicis quantitatibus datis definiri. Nam in generali æquatione §. 1. $x + x' = y + x + y - x$, in qua x ſecundi membri non poteſt ſuperare valorem y, quem ad ſummum poteſt attingere, ſtatim patet x intra limites zero, & y concludi oportere: ita ut ſit in primo limite $x - x = \overline{1 - 1} \cdot 0$, in extremo $x - x = \overline{1 - 1} \cdot y$. Porro cum y ſit variabilis, atque cujuſcumque valoris capax a zero uſque ad infinitum; determinato valore y determinatur etiam limes maximus x, ultra quem progredi ipſa nequit. Licet igitur x variabilis & ipſa ſit, tamen & utrique ejus limites, intra quos continetur, eorumque ſitus, atque fluxus ipſius quantitas, qui ipſam gignit, pendet a valore ipſius y, quæ ſi a zero C uſque ad infinitum progrediatur, progreditur a zero (*fig.* 12.) C uſque ad infinitum & ipſa x fluxu ſuo. Quod ſi y ſit complexus ex variabili, & data, ut ſit $y = y + \frac{a}{2}$, in quo caſu valor minimus ipſius y eſt $= \frac{a}{2} = CA$, vel CB; maximus vero $= CA + y = CA + \infty$, erit valor ipſius x maximus & ipſe infinitus, valor vero minimus ipſius & ipſe æqualis CA, vel CB, ſi ad centrum C referatur: relate vero ad punctum A, vel B, in A vel B erit nullus, hinc inde ab hoc puncto ad infinitum progrediens. Itaque æquatio generalis huic Syſtemati applicata erit $x + x' = Ad + AD = Bd + BD$ infinitis $= \left(\infty + \frac{a}{2}\right) + x + \left(\infty + \frac{a}{2}\right) - x$; atque cum in hoc ſecundo membro x nequeat eſſe minor $\frac{a}{2}$, verum quidem infinita, erit æquatio in limite minimo ipſius x relata ad centrum C, ſequens $x + x'$

$$= \left(\infty + \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} + \left(\infty + \frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2} = Ad + AD = Bd + BD,$$

quo artificio determinatur punctum A, vel B, ex quo initium ſumunt commune x, x' inæquales primi membri æquationis, dum x ſecundi a centro C profectæ

non minores eſſe poſſint ſingulæ quantitate $\frac{a}{2}$. Summa igitur in hoc caſu erit $x + x' = \infty + \frac{a}{2} + \infty + \frac{a}{2} = Cd + CD$. Verum ſi differentiam, quæ intercedit inter x, & x' quæramus, erit $x - x'$ $= \left(\infty + \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} - \left(\infty + \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, quæ differt ab iſtarum ſumma quantitate $\infty + \infty = 2\infty$: & hæc differentia æquatur etiam ſummæ $x + x' = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ Syſtematis baſis datæ: ergo ſumma inæqualium $x + x'$ in Syſtemate baſis variabilis tam differt ab ipſarum differentia in eodem Syſtemate, quam a ſumma $x + x'$ in Syſtemate baſis datæ: in utroque enim caſu prima ſuperat utraſque per duplum infinitum $\infty + \infty$. Verum id æque erui poterat ex ipſa æquatione prima $x + x' = \left(\infty + \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} + \left(\infty + \frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2}$, ſublata quantitate ∞; reſtat enim $x + x' = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ $= \left(o + \frac{a}{2}\right) + \left(o + \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$.

§. 8. Quod ſi in Syſtemate baſis datæ conſtituti revocemus formulam huic reſpondentem $x + x' = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$, cum y a zero uſque ad $\frac{a}{2}$ progredi poſſit, ejus valor intra hoſce limites concludatur oportet. Poſita igitur y maxima $= \frac{a}{2}$, erit $x + x' = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} =$ (*fig. 9.*) $AC + CA + BC - CA$ $= AC + BC + CA - CA$: at facta $CA - CA$, quæ erat $= o$ (identicis CA, CA), diverſa $= CA + BC$; erit $x + x'$ $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a + a$; atque hoc modo perſeverante eodem Syſtemate baſis datæ, immutata tantum fuit baſis in hoc caſu dupla primæ. Rurſus erit $x + x' = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) + y + \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) - y$, & y continetur intra limites o, & a; & ſic eodem modo progredi poteſt ad infinitum. Quod, ſi ve-

ſi velis $x + x' = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$, ſit $y = \frac{b}{2}$ minor $\frac{a}{2}$ maxima: tunc æquatio erit $x + x' = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$; & factis diverſis $\frac{b}{2}, \frac{b}{2}$; erit $x + x' = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$ æquales ſingulæ $\frac{a+b}{2}$: & $x + x' = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) + x + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) - x = AC + CD + BC - CD$; at in hoc caſu $AC = BC = \frac{a+b}{2}$. Hinc ſic procedendo uſque ad infinitum, habebimus tandem $x + x' = \infty + x + \infty - x$; & facto $\infty = \infty + \frac{a}{2}$, ut ad formulam §. ſuperioris tranſeamus, erit $x + x' = \left(\infty + \frac{a}{2}\right) + y + \left\{\infty + \frac{a}{2}\right\} - y = y + x + y - x$; quo artificio ſemper manente Syſtemate baſis datæ in Syſtema tandem baſis variabilis incidimus: in quo $x + x' = y + y$. Quod ſi a Syſtemate baſis datæ $x + x' = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y$, fiat x, x' ſubtractio, erit tamen $x - x' = y + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + y = y + y$. Quare ab uno ad alterum Syſtema facilis tranſitus hiſce artificiis, ubi lubet, aut præſtat, aperitur. Nam dato Syſtemate baſis datæ $x + x' = \left(\frac{o}{2} + \frac{a}{2}\right) + \left(\frac{o}{2} + \frac{a}{2}\right)$, cum quæcumque quantitas etiam infinita a ſe ipſa ſubtracta ſit zero, erit $\frac{o}{2} = \frac{\infty}{2} - \frac{\infty}{2}$, identice ſumpto hoc infinito; accepto vero diverſo, erit $\frac{\infty - \infty}{2} = \frac{2\infty}{2} = \infty$: hinc hoc valore ſubſtituto in formula, erit $x + x' = \left(\infty + \frac{a}{2}\right) + \left(\infty + \frac{a}{2}\right) =$ (*fig.* 12.) $Cd + CD$ infinitis; & acceptis identicis $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = CA + CB$, erit $x + x' = \infty + \frac{a}{2} + \infty - \frac{a}{2} = Cd - CA + CA + CD = Ad + AD$

vel

vel $= Bd + BD = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$, factis $y = Cd$; $y = CD$ diverſis.

Poſito vero Syſtemate baſis variabilis $x + x' = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$, in quo caſu y poteſt eſſe infinita; erit $x + x' = \infty + \frac{a}{2} + \infty - \frac{a}{2} = Cd + CD$ $= Cd + \frac{a}{2} + \left(-\frac{a}{2}\right) + CD = Bd + BD$ (*fig.* 12.) $= BC + Cd + CD - BC$; & factis Cd, CD identicis, quæ erant diverſæ, & $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$, quæ erant identicæ, diverſis; erit $x + x' = BC + AC$ $= 0 + \frac{a}{2} + 0 + \frac{a}{2}$: facta ſcilicet y, quæ erat maxima infinita, minima $= AC$.

§. 9. Hæc eſt tamen differentia, quæ inter utrumque intercedit. Nimirum in primo Syſtemate baſis variabilis ſupponitur y variabilis prius exiſtens, cui addenda, & a qua ſubtrahenda ſit eadem quantitas x, quæ, prius zero, augeri poteſt uſque ad valorem y. Prima enim diviſio baſis fit bifariam, ut deinde valores alios intermedios conſequamur, quæ diviſio legitima eſt, donec una facta zero, altera totam quantitatem adæquat, & fit maxima: non poteſt igitur x, quæ in primo caſu erat zero, excedere creſcendo valorem ipſius y. Hinc vidimus, quæ ſunt identicæ quantitates, non poſſe ſuperare valorem diverſarum. Neceſſe igitur eſt in hoc Syſtemate baſis variabilis ſupponere prius y majorem quacumque data, quæ deinde ſe minuendo per quoſcumque magnitudinis gradus, tandem in datum punctum C perventa fiat nulla. Verum ſi nihil aliud, quam punctum C, datum concipiatur, erit æquatio $x + x' = y + y = dC + DC$ $= y + x + y - x =$ (*fig.* 12.) $dC + x + DC - x$; quæ x a zero uſque ad infinitam y cum poſſit pervenire, dabit ultimam æquationem $x + x'$ $= dC + Cd + DC + CD = \infty - \infty + \infty - \infty$: in primo igitur caſu eſt $x + x' = \infty + 0 + \infty - 0 = dC + CD$; in ſecundo $= \infty - \infty + \infty - \infty = 0\,d + 0\,D = Cd - Cd + CD - CD$. Hinc primo $x + x'$ ſunt infinitæ, ultimo fiunt zero $= d + D$, ſed in hoc differentia identicarum $x - x$, ſive ſumma $x + x'$ diverſarum fit ipſa infinita: nam hoc ipſo, quod in $x + x' = d + D = 0y + 0y$, tam x, quam x' eſt zero, eo ipſo, cum prima ſit zero in d, altera zero in D, punctis inter ſe infinite diſſitis, evidenter patet x ad centrum commune C hinc inde fieri infinitas, ea infinitate, qua primo ſumptæ fuerant $y + y$, hoc eſt majores ſingulæ quacumque data. Hinc $x - x$ in ſecundo membro non ſunt amplius identicæ, ſed

ſed fiunt diverſæ, atque ideo ſummam repræſentant. Quando igitur datur tantum punctum C, $y + y$ ſunt infinitæ, totam diſtantiam, quæ inter d, D intercedit, abſorbentes, cum nullum datum punctum medium A, vel B ſupponatur, & $x = x = 0$: quando vero $y + y$ ſunt zero, $x - x = \infty + \infty = x + x$ diverſæ. Hoc eſt in primo caſu puncta d, D ſupponuntur infinities infinite diſſita; in ſecundo puncta hæc commiſcentur cum puncto dato medio C: ac quodammodo fit inverſio figuræ, ut quæ in prima (*fig.* 12.) dicebantur dC, DC, in ſecunda ſint (*fig.* 9.) Cd, CD. Donec igitur nullum aliud punctum datum, quam C reperitur, $x + x' = \infty + 0 + \infty - 0 = 0 + \infty + 0 - \infty$: atque hinc tam $\infty + \infty$, quam $0 + 0$ unum pro altero promiſcue uſurpari poteſt. A prima æquatione $x + x' = \infty + 0 + \infty - 0$ repræſentatur Syſtema baſis variabilis duplo infinities infinito dC + DC conſtantis generaliſſimum, nullo alio puncto, quam centro C determinatum: in ſecunda $x + x' = 0 + \infty + 0 - \infty$, quæ eſt differentia $x - x'$ Syſtematis baſis variabilis, Syſtema eſt generaliſſimum baſis datæ $= 0 + 0$: atque hic in tam abſolutiſſima formula tam unum, quam alterum promiſcue ſumi poteſt; dummodo intelligatur in primo ſupponi prius puncta infinite diſſita d, D verſus C (*fig.* 12.) minui, in ſecundo ſupponi prius ex uno puncto (*fig.* 9.) C hinc inde ab hoc, tamquam ex nihilo, quantitates manantes fluendo augeri.

§. 10. Hinc manifeſte eruuntur duo illa Syſtemata a me in Præfatione indicata *Abſoluti Zero* ſcilicet, & *Abſoluti Infiniti*: reciprocantur enim 0, & ∞: & quemadmodum 0 eſt abſolutum nihil, ita infinitum, cui reſpondet, debet eſſe & ipſum abſolutiſſimum, hoc eſt inverſum ipſius 0, ſive $\frac{1}{0}$. Eadem igitur exiſtentia, atque realitas, quæ tribuitur abſoluto zero, tribuatur etiam neceſſe eſt ipſi abſoluto Infinito: omneque negotium analyticum ab utriſque mutua conſpiratione conſociatis peragatur oportet. Cum vero inverſo ordine ab utriſque agatur, quid mirum ſi uno, aut altero ſublato, aut etiam tamquam impoſſibili, & abſurdo repudiato, in ambages incidamus inextricabiles? cum id quod proprium eſt illius, quod excluſimus, alteri perpetuo tribuamus.

§. 11. Revocemus iterum æquationem generaliſſimam utraque Syſtemata generaliſſima amplectentem, ſive

$$x + x' = \infty + 0 + \infty - 0 = 0 + \infty + 0 - \infty$$

(*fig.* 12.) $= dC + 0 + DC - 0 = 0 + Cd + 0 - Cd = 0 + CD + 0 - CD$ (*fig.* 9.), in qua non niſi punctum C datum ſumptum fuit. In prima Infinitum abſolutiſſimum primo datum ſe minuendo gignit quantitatem finitam; in ſecunda zero abſolutum creſcendo finitam quantitatem producit. In hiſce datum aliud punctum A, vel B a centro C finita diſtantia $\frac{a}{2}$ ſumamus, ut zero nunc fiat $\frac{a}{2}$; atque in æquatione pro 0 ſubſtituto, habebimus

$x + x'$

$$x+x'=\infty+\frac{a}{2}+\infty-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}+\infty+\frac{a}{2}-\infty=dC+DC=AC+BC$$

$$=dC+CB+CD-CB=AC+\infty+BC-\infty=AC+o+BC-o,$$

ex quibus oriuntur duæ æquationes generaliſſimæ

$$(\text{I.}^a)\ x+x'=\infty+\frac{a}{2}+\infty-\frac{a}{2};\ (\text{II.}^a)\ x+x'=\frac{a}{2}+o+\frac{a}{2}-o$$

$$=\infty+CB+\infty-CB \qquad\qquad =AC+o+BC-o:$$

$\infty+\infty$ in prima decreſcat, uſquedum punctum (*fig.* 12.) d perveniat in A, & punctum D perveniat in B: & quoniam ∞ cum o reciprocatur, creſcat in ſecunda primum o a C uſque ad A, ut fiat o $=$ CA, & alterum zero $=$ CB; ac ſubſtitutis in formulis, erit

$$x+x'=(\textit{fig.}\,12.)\,AC+CB+CB-CB;\ x+x'(\textit{fig.}\,9.)=AC-CA+BC+CA$$

$$=BC+CA+AC-AC \qquad =AC+CB+BC-CB$$

$$=BC-CB+AC+CB;$$

ex quo deducitur

$$\begin{cases} AC+CB=AC+BC=CA+CB \\ BC+CA=BC+AC=CB+CA. \end{cases}$$

At facto $\infty+\infty=y+y$ in prima, $=y-y$ in ſecunda, erit

$$x+x'=y+\frac{a}{2}+y-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}+y+\frac{a}{2}-y$$

$$(\textit{fig.}\,12.)=dC+CB+CD-CB=AC+Cd+BC-Cd$$

$$=AC+CD+BC-CD\ (\textit{fig.}\,9.)$$

in quibus variabiles mutantur in datas, & datæ in variabiles: quæ tamen ſi ſumantur identicæ, & æquales, erit (*fig.* 12.)

$dC+CB=AC+Cd$(*fig.* 9.) ſive $y+a=-a-y$; vel $-y-a=a+y$, &

$CD-CB=BC-CD$; ſive $y-a=a-y$; vel $-y+a=-a+y$.

§. 12. Ex hiſce fœcundiſſimis tamquam fontibus & illud maximi momenti conſequitur, quo penitus omne imaginarium abſolutum tandem e tota Analyſi profligatur: illud, inquam, imaginarium, quod nunc tantum eos ipſos patronos acerrimos repperit, qui ſemper tamquam refractarium aliquid viribus omnibus, ſed fruſtra inſectati ſunt. Nam æquatio generaliſſima, & abſolutiſſima a nobis ſuperius inventa, ſcilicet $x+x'=\infty+o+\infty-o$, ea eſt a qua quodcumque Syſtema tam infinitum relativum, quam finitum, tam baſis variabilis, quam datæ deducitur; prout ipſa, ut vidimus, modificatur: cum ejuſdem naturæ ſit ∞, cujus eſt o, ſed inverſum, hoc eſt ipſum infinitum abſolutiſſimum, ut eſt o abſolutiſſima minima quantitas. Syſtemata vero infinite relativa, vel finita, quæ ex hoc abſolutiſſimo deſcendunt, deſcendunt quia ab æquatio-

tione abſolutiſſima eliminantur d d', D D' (*fig.* 27.) infinita ; ita ut remaneat tantum baſis d C + C D infinita relativa , vel finita indeterminata , cui reſpondent indeterminatæ C A , C B, a centro C, ſive a zero C initium ſumentes , ac infra ipſas C d , C D verſus d , & D . Itaque tam C d , C D quam C A , C B illius erunt naturæ , cujus naturæ concipitur tum ∞ (ſcilicet infinitum majus quocumque dato infinito) ; tum o minus quocumque dato infiniteſimo . Quare niſi precario ſumatur imaginarium abſolutum infinitum , & abſolutum zero in Syſtemate abſoluto ; inveniri non poterit in hiſce aliis omnibus Syſtematibus relativis ulla quantitas finita imaginaria , ſit ipſa indeterminata , vel data ; cum tam variabilis *y* , quam data ejuſdem prorſus naturæ ſit oporteat : ab ipſo enim uno abſoluto ſimul originem ſuam ducunt , quemadmodum etiam §. 7. demonſtravimus . Verum ſi ſumantur ſimul imaginariæ (quod tamen non niſi volenti occurrit), facile erit , communem methodum ſequendo , imaginarii diviſione omnes ſimul ad realitatem traducere .

§. 13. Atque tandem illud mirifice , atque evidentiſſime confirmatur , quod tam in Præfatione , quam præcipue in fine Cap. III. & IV. demonſtravi , non dari ſcilicet imaginarium abſolutum , ſed cuivis imaginario ſuum reale , & e converſo cuique reali ſuum imaginarium reſpondeat oportere ; cum quantitates omnes lineares , quæ Syſtemata relativa conſtituunt , illius naturæ ſint , cujus naturæ concipitur eſſe infinitum abſolutum , aut zero lineare . Imaginarii igitur una , atque vera origo hucuſque ignota prorſus , non ab alia cauſa repetenda eſt , niſi quod data aliqua peculiari ſuppoſitione illud Syſtema ſumitur , quod huic ſuppoſitioni repugnat . Atque ideo cum , proprio hujuſce ſuppoſitionis Syſtemate omiſſo , in illo , quod contradictionem involvit veritatem quæramus , quid mirum ſi oriatur imaginarium ? Et ſane ex dictis , formulæ generales utraque Syſtemata amplectentes ſunt

$$x + x' = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}, \qquad x + x' = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y:$$ prima Syſtematis baſis variabilis, in quo ſemper $y > \frac{a}{2}$; ſecunda Syſtematis baſis datæ, in quo $y < \frac{a}{2}$: quæ cum dividi poſſint in ſuas partiales, erunt

$$x = y + \frac{a}{2} \quad ; \; x = \frac{a}{2} + y$$

$$x' = y - \frac{a}{2} \qquad x' = \frac{a}{2} - y$$

& ab omnibus extracta radice ,

$$\sqrt{x} = x = \sqrt{y+\frac{a}{2}} \quad ; \sqrt{x} = x = \sqrt{\frac{a}{2}+y}$$

$$\sqrt{x'} = x' = \sqrt{y-\frac{a}{2}} \quad ; \sqrt{x'} = x' = \sqrt{\frac{a}{2}-y}$$

atque inde

$$(\text{I.}^a)\, x+x' = \sqrt{y+\frac{a}{2}}+\sqrt{y-\frac{a}{2}} : \ (\text{II.}^a)\, x+x' = \sqrt{\frac{a}{2}+y}+\sqrt{\frac{a}{2}-y}.$$

§. 14. Sumamus nunc unam ex iſtis partialibus æquationibus, ex. gr. $x' = \sqrt{y-\frac{a}{2}}$, ac ſupponamus $y < \frac{a}{2}$: hæc æquatio in hac ſuppoſitione eſt imaginaria, qua quicquid ab ipſa proficiſcitur, infirmatur, & imaginarium fit; at non natura ſua, ſed vitio noſtro in hoc malum impingimus, dum illud incauti Syſtema eligimus, quod huic ſuppoſitioni repugnat: quærimus enim ſane perperam ac male in eo Syſtemate, in quo y neceſſario debet eſſe major $\frac{a}{2}$, y minorem $\frac{a}{2}$, quod certe quidem contradictionem involvit: Quæratur in ſuo proprio Syſtemate, ubi neceſſario hæc ſemper conditio verificatur, & ſtatim tollitur imaginarium. Ut vero etiam male quærendo auxilium opportuniſſimum inveniamus, quo in viam nos, a qua aberravimus, vel inſcii deferamur, ſimpliciſſimo, atque eleganti artificio illo utamur oportet, quo Mem.ª III. §. 19, 20, & 21 imaginarium a formula eliminavimus: quo uno id, quod in omnibus teneo, ſi cetera omnia a me edita falſa eſſent, inviĉtiſſime ſuſtentatur. Quod tamen artificium, eo quod illic ignoratione totius hujuſce a me propoſiti Syſtematis evidenter non percipiatur, quidam perperam infirmare conatus eſt; ceteri omnes, qui in me falſitatem, quam veritatem potius timent, ſilentio aſtute diſſimularunt: quaſi vero ſuis complicatiſſimis calculis omnia, atque ſingula clare ab ipſis percepta, aliis etiam eadem evidentia demonſtrent.

§. 15. Nunc vero quoniam ex dictis imaginarium e tenebris, in quibus tute deliteſcebat, erutum fuit, vera ſui origine jam detecta; artificium etiam illud in pleno lumine collocatum irritos cujuſcumque in ſe conatus infringit. Et ſane poſita y minori a, ſit imaginaria $x' = \sqrt{y-\frac{a}{2}}$ (quia ſumpta x in eo

Sy-

Syſtemate, in quo $\sqrt{y - \frac{a}{2}}$ fit imaginaria, ſupponitur tamen x' realis contra §. 13.): fiat tamen $x' = \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$; & quoniam $\sqrt{-1} = \frac{1 + \sqrt{-1}}{1 - \sqrt{-1}}$, erit $x' = \frac{1 + \sqrt{-1}}{1 - \sqrt{-1}} \,.\, \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$, & $x' - x'\sqrt{-1} = \sqrt{-y + \frac{a}{2}} + \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$, in qua ſuppoſitione $\sqrt{-y + \frac{a}{2}}$ erit realis: ac proinde ex dictis realis $x' = \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$, & imaginaria $-x'\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$; & $-x' = \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$ realis. Sed notandum æquationem $x' = \sqrt{y - \frac{a}{2}}$ a nobis ſumptam, eſſe unam ex partialibus formulæ (I.ª) §. 13, ſcilicet formulæ $x + x' = \sqrt{y + \frac{a}{2}} + \sqrt{y - \frac{a}{2}}$, in qua $x = \sqrt{y + \frac{a}{2}}$, quicumque ſit y, ſemper realis eſt: ergo pro ſecunda $= x'$, ponatur $x' = \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$, & eſt æquatio (I.ª) $x + x' = \sqrt{y + \frac{a}{2}} + \sqrt{-y + \frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{a}{2} + y} + \sqrt{\frac{a}{2} - y}$; quo facto a Syſtemate baſis variabilis tranſitum fecimus ad Syſtema baſis datæ, ut docuimus §. 8. Hoc facile obtinetur, ſi fiat permutatio variabilium in datas, ac conſtantium in variabiles: tunc enim, ut oſtendimus §. 5, facta hac permutatione, ſigna eadem in primo membro $x + x''$ perſeverant, ideoque ad alterum Syſtema deferimur. Quod ſi ſumatur altera $-x'\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$, in qua utrumque membrum

imaginarium eſt, ſi fiat diviſio (ut utraque ad realitatem reducantur) erit $- x'$

$= \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$; qua ſubſtituta loco x' in (I.^{a}), æquatio prodibit

(I.^{a}) $x + x' = x - x' = \sqrt{y + \frac{a}{2}} + \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$; qua docemur nos in eodem Syſtemate permanentes (facta tantum ſubtractione variabilium) ad realitatem deveniſſe, ut animadvertimus §§. 47. & ſeqq. Cap. V.

Hoc eſt data æquatione (I.^{a}) §. 13. compoſita $x + x' = \sqrt{y + \frac{a}{2}} + \sqrt{y - \frac{a}{2}}$,

ſi fiat partialium ſubtractio, erit II.^{a} $x - x' = \sqrt{y + \frac{a}{2}} - \sqrt{y - \frac{a}{2}}$

$= \sqrt{y + \frac{a}{2}} + \sqrt{-y + \frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{a}{2} + y} + \sqrt{\frac{a}{2} - y}$: quæ nos docet, quæ erant diverſæ in Syſtemate aſſumpto, fieri debere identicas, ac proinde a nobis alterum Syſtema huic ſuppoſitioni aptum ſumendum eſſe.

Quare y, quæ erat poſitiva, ſumenda eſt negativa; & $\frac{a}{2}$, quæ erat negativa, fieri debet poſitiva: quo facto, $- x'$ II.^{a} hujus §. æquatur $+ x'$ I.^{a} §. 13; hoc eſt quæ erat negativa in uno Syſtemate fieri debet poſitiva in altero: hinc æquatio $1 = -1$, ſi ſumatur x' identica cum $- x'$.

§. 16. Ex hiſce inviɛtiſſime evincitur neceſſitas æquationis $(-1)^{\frac{2}{2}} = \pm 1$, quam a me in Opuſculis meis tot modis extra aleam poſitam perpetua petitione principii eludere conati ſunt qui contra me ſentiunt. Nam ſi quando y minor $\frac{a}{2}$, in Syſtemate alieno ab hac hypotheſi conſtituti invenimus §. ſuper. $-x' \sqrt{-1}$ $= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$ (quam tamen ſcimus in proprio Syſtemate debere eſſe $x' = \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$); ut a non legitimo, & improprio ad legitimum, & proprium huic ſuppoſitioni Syſtema reducamur, neceſſario ſic efferenda eſt

eſt formula impropria $-x'\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-y+\frac{a}{2}}$; ſcilicet $\frac{x'}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-y+\frac{a}{2}}$, & $x' = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-y+\frac{a}{2}}$ $= (-1)^{\frac{2}{2}}\sqrt{-y+\frac{a}{2}}$, in qua neceſſario $(-1)^{\frac{2}{2}} = 1$, ut verum Syſtema ſe offerat, quod dat $x + x' = \sqrt{\frac{a}{2}+y} + \sqrt{\frac{a}{2}-y}$. Et ſane antequam y aliquis determinatus valor tribuatur, vidimus æquationem utraque Syſtemata complectentem eſſe

$$x + x' = \sqrt{y+\frac{a}{2}} + \sqrt{y-\frac{a}{2}} = \sqrt{y+\frac{a}{2}} + \sqrt{-y+\frac{a}{2}},$$

ex qua deducitur $\sqrt{y-\frac{a}{2}} = \sqrt{-y+\frac{a}{2}}$, & $y - \frac{a}{2} = -y + \frac{a}{2}$, & $y = \frac{a}{2}$; quo in caſu licet unam pro altera ſubſtituere. Ponamus modo nos ſumpſiſſe $\sqrt{y-\frac{a}{2}}$ illius Syſtematis, in quo y ſemper debet eſſe major $\frac{a}{2}$, ac velle nos natura ipſa rei repugnante y minorem $\frac{a}{2}$: certo certius eſt in hac formula $\sqrt{y-\frac{a}{2}}$, in qua y eſt major $\frac{a}{2}$, antequam y fiat minor, ut volumus, $\frac{a}{2}$; neceſſe eſſe, ut decreſcendo æquetur $\frac{a}{2}$. Huc perventis licebit ſemper loco y ſubſtituere $\frac{a}{2}$ $\left(\text{\& in hoc caſu erit } x' = \sqrt{y-\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{a}{2}-y}\right)$ unamque pro altera uſurpare. Quoniam vero volumus y minorem $\frac{a}{2}$, repudiata formula $\sqrt{y-\frac{a}{2}}$, ſumamus formulam huic hypotheſi propriam, ſcilicet

$x' =$

$x = \sqrt{\frac{a}{2} - y}$, quo facto a Syſtemate improprio ad verum Syſtema tranſlati, imaginarium omne evitamus. Ad hoc vero obtinendum ipſa æquatio $\sqrt{y - \frac{a}{2}} = \sqrt{-y + \frac{a}{2}}$, quæ male dicitur abſurda, nos veluti manuducit; a qua cum conſequatur $y = \frac{a}{2}$, erit etiam $\frac{a}{2} = y$, qua bene intellecta docemur faciendam eſſe quantitatum permutationem. En igitur ſublatum penitus imaginarium, ac penitus vindicatam ab abſurdo formulam $1 = -1$, qua monemur in æquatione $y - \frac{a}{2} = -y + \frac{a}{2}$, ſi identitatem y, y, & $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ velimus, mutandum eſſe ſignum quantitatibus iiſdem, funditus everſo illo omni, quod contra objectum hucuſque fuit, ac tandem confirmatam mirifice veritatem a me illam ſæpiſſime inculcatam, *membrum ſcilicet unius æquationis non ſemper eſſe identicum cum altero* (ac ſi ſemper perfectam æqualitatem & identitatem quæcumque æquatio ſignificet); *ſed indicare tranſmutationem unius membri in alterum, ac quantitatum permutationem.*

§. 17. Ut huic tandem Capiti finem imponam, paucis quædam de Infinito illo, atque nihilo ſive zero abſolutis adjiciam, ut viam ſternant ad ea, quæ alio loco de Infinito hoc abſoluto, atque de ejus Theoria ex compoſito tradam. Innueram Cap. IV. quamcumque æquationem limitis poſſe dividi in tot æquationes partiales, in quot partes æquales dividitur ipſa data. Ita data $x = a$, invenimus $x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; in qua $x = \frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{2}$. Eadem ratione $x = \frac{a}{2}$ dabit partiales $x + x = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{a}{2}\right]$, $x = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{2}\right]$, $x = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{2}\right]$; quæ diviſio cum produci poſſit ad infinitum, habebimus $x = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{2^{\infty}}\right] = \frac{1}{2^{\infty}}\left[\frac{a}{2}\right]$. Porro cum hac methodo diviſa data tandem poſt infinitam diviſionem x recidat in zero, ponamus x actu factam æqualem $\frac{1}{2}\left[\frac{a}{2^{\infty}}\right] = 0 . \frac{a}{2}$; erit igitur $x = 0 . \frac{a}{2} = \frac{1}{2^{\infty}}\left[\frac{a}{2}\right]$, ſi-

ve o

ve $0 = \frac{1}{2^{\infty}} \frac{\left\{\frac{a}{2}\right\}}{\left\{\frac{a}{2}\right\}} = \frac{1}{2^{\infty}}$; & $2^{\infty} = \frac{1}{0}$. Quare 2^{∞} eſt inverſum ipſius zero abſoluti, ergo 2^{∞} erit Infinitum illud abſolutum, quod e calculo tamquam abſurdum exploditur, quod tamen, quando non repugnat zero abſolutum, neceſſario admittendum eſt. Neque dicas hoc modo facta diviſione numquam perveniri poſſe ad abſolutum illud Infinitum, quod aſſeritur: non enim hic agitur de tempore, quo tandem perfecta fuerit hujuſmodi uſque ad zero abſolutum diviſio; ſed hic videndum utrum repugnet hæc propoſitio, quæ docet, cum $\left\{\frac{a}{2}\right\}$ continua diviſione ſemper minor fiat, tandem hanc evadere poſſe zero abſolutum: quam caveſis, ne dicas abſurdam: abſurdum enim erit & ipſum zero, atque Aſymptoti Hyperbolici, qui tangere actu nequeunt Curvam, niſi continua diviſione in zero tandem abſolutum ordinata recidat. Sed hiſce ad aliud tempus reſervatis, hic ſolum de hoc Infinito aliquid innuam, quod ex §§. *6*, & ſeqq. hujuſce Capitis ſponte ſua fluit.

§. 18. Vidimus §. 5, & ſæpius in hoc Capite, Syſtematis baſis variabilis æquationem $x + x =$ (*fig.* 12.) $Cd + CD = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2} = Cd - AC + CD + AC$, ita eſſe conſtitutam, ut x, vel x primi membri, hoc eſt Cd, vel CD nequeat eſſe minor CA, vel CB: itaque x minima erit æqualis $\frac{a}{2}$, x vero maxima infinita, hoc eſt infinite major ipſa $\frac{a}{2}$, quæ hic ſupponitur finita. Porro cum per §. 1. ipſa $\frac{a}{2}$ ſumi poſſit variabilis, & quidem a zero per omnes infinitæ etiam magnitudinis gradus excurrere; patet hujuſce Syſtematis proprium eſſe, ut ex parte Cd ſemper x minima CA exæquet, & x maxima ipſam CA etiam infinitam infinities ſemper excedat. Non ſufficit itaque in hoc Syſtemate ut x maxima major ſit quacumque CA, ſed in extremo limite altero magnitudinis debet neceſſario infinities ſuperare ipſam CA, licet ponatur infinita: hoc eſt maxima $Cd = x$, quocumque ordine infinitorum, ad quem exſurgere poteſt CA non tantum major, ſed infinities major ſit oportet, ut hæc conditio limitis maximi in hoc Syſtemate baſis variabilis perpetuo ſervetur. Hoc eſt illud, quod diximus *Infinitum Abſolutum*, quod nimirum repræſentatur ab x maxima Syſtematis baſis variabilis, quod non ſolum debet ſuperare CA cujuſcumque magnitudinis, ſed (ut ſit illud ultimum

Abſo-

Abſolutiſſimum Infinitum ex parte C d) neceſſe eſt ipſam cujuſcumque magnitudinis C A infinities ſuperet. Hoc vero Infinitum Abſolutum, indicatum ab una tantum ∞ maxima ſuperioris formulæ, ſupponit prius exiſtentiam puncti C in aliquo loco determinato ac fixo conſtituti, ac differt ab hoc puncto dato C, quod ponitur tamquam initium quantitatis non exiſtentis, ſed enaſcendæ, quia hoc nullum omnino eſt in quantitate, illud omnino quantitatem omnem cujuſcumque infinitæ poſſibilis magnitudinis ſiniſtrorſum creſcentis exhaurit: atque ideo limitatur ex parte C a puncto fixo C, quod vicem limitis ipſius Infiniti ab hac una tantum parte gerit. Atque infinitum hoc fit ſemper æquale diſtantiæ C d, quæ intercedit inter hoc punctum fixum C, & alterum punctum d ſemper magnitudine infinities infinita a quovis alio puncto A diſſito, quod illud inſequitur. Cum vero idem omnino in parte oppoſita puncti B evenire poſſit, ſequitur $\infty' + \infty' = Cd + CD$. At ſublato puncto C, hoc eſt unico illo puncto inter utrumque infinitum conſtituto, erit ex mea Theoria $\infty' + \infty' = Cd + CD = dD = \infty$. Et hoc eſt tandem Infinitum illud abſolutiſſimum, nec ullis limitibus circumſcriptum, cum nullum punctum determinatum ſit, ex quo initium ſumere, vel in quod deſinere concipiatur: gaudet igitur hujuſmodi Infinitum Abſolutum indeterminatione abſoluta, cum nec principium, nec finem habeat, ac proinde *abſolutum* vere cenſendum eſt. Hujuſmodi vero abſolutiſſimæ indeterminationis idea duas menti exhibet diverſas ideas: vel enim mens indeterminatam infinitatem contemplatur, tamquam quantitates omnes potentia continentem, ex qua, abſoluto infinito tamquam fonte prius exiſtente, data determinatione, quantitas aliquo limite definiatur; vel ſupponit quantitatem nullam, atque ideo a zero abſoluto, ſive a puncto, quod nullum erat in quantitate, initium ſumere. In primo tamen concipiendi geneſim quantitatis modo, duo ſaltem puncta intelligenda ſunt, quorum diſtantia quantitas determinetur: ſi enim unum punctum tantum ſumas, cum ſupponatur jam tota exiſtens poſſibilis quantitas, puncto hoc nihil aliud concipi poteſt, niſi punctum C in hac Infinitate; quod ad ſummum, uti diximus, duo abſoluta Infinita hinc inde a puncto C deſignat. At duobus punctis in hac hypotheſi vere determinatur quantitas: A B enim, quæ eſt determinata, nobis ſeſe offert tamquam aliquam portionem ab hac abſoluta Infinitate, ut ita dicam, abſciſſam, quæ æquatur diſtantiæ AB, quæ una, omiſſo prorſus Infinito reliquo, aſſumenda eſt. In hac igitur hypotheſi Abſoluti Infiniti duo ſaltem puncta ſumamus oportet, quæ quantitatem definiant. Si vero ſupponatur zero, cum zero hoc abſolutum nihil ſit, nulla alia nobis facultas ſupereſt, niſi in aliquo dato loco fixo hujuſmodi punctum conſtituendi; puta in dato puncto C, quod ſit tamquam initium quantitatis non enatæ, ſed enaſcentis, quæ ex puncto tamquam zero hinc inde fluendo augeatur. Ex hac igitur duplici notione quam mens ex ipſa notione abſolutiſſimi Indeterminati poteſt concipere, oriuntur duæ illæ Abſolutæ Methodi, ſcilicet *Abſoluti Infiniti*, & *zero Abſoluti*, quæ cum ab una eademque notione proficiſcantur, arctiſſimo vinculo inter ſe conjunguntur, atque una pro altera dato temperamento uſurpari poteſt: atque uno ſublato tamquam abſurdo, alterum corruat neceſſe eſt: corruit enim notio illa abſolutiſſima utrique communis, a qua manant neceſſario.

§. 19.

§. 19. Ut vero calculo ipſo hoc demonſtretur: ſupponamus primum illud abſolutiſſimum Infinitum nullo puncto determinatum prius exiſtens, quod §. ſup. diximus ∞. Sumpto in hoc puncto C primum (*fig.* 27.) determinato, patet ex §. ſuperiori eſſe $\infty = d'D'$, æquale in hoc caſu $\infty' + \infty' = d'C + D'C$ (d', D' nullo termino dato circumſcriptis): atque $2\infty' = \infty$, & $\infty' = \frac{\infty}{2}$. Hoc modo Infinitum hoc abſolutum primum, puncto C dato, in duo dividimus Infinita abſoluta, hinc inde a puncto C, quæ utraque remanent etiam abſolute indeterminata. Ut igitur utraque determinentur, ſumantur, præter punctum C, puncta A, B; eritque $d'D' = \infty = \frac{\infty}{2} + \frac{\infty}{2} = d'C + D'C$ $= \frac{\infty}{2} + CB + \frac{\infty}{2} - CB$ & facto $\frac{\infty}{2} = \frac{\infty}{2} + dC = \frac{\infty}{2} + y$; $\frac{\infty}{2} = \frac{\infty}{2} + DC = \frac{\infty}{2} + y$ (hoc eſt determinatis aliis duobus punctis d, D, quæ ſemper, ut vidimus, a punctis veris infinities diſtare debent), erit ∞ $= \frac{2\infty}{2} + 2y = \frac{\infty}{2} + CB + \frac{\infty}{2} - AC = \left(\frac{\infty}{2} + y\right) + CB + \left(\frac{\infty}{2} + y\right) - CB$; & ſublato utrimque ab hac æquatione ∞ communi, erit $y + y$ $= y + CB + y - CB$, quæ eſt æquatio generaliſſima a nobis ſupra inventa: in qua ſi ponatur CB data, y variabilis, oritur Syſtema baſis variabilis; contra vero ſi ponatur y data, & CB variabilis, Syſtema baſis datæ.

§. 20. Sumamus nunc abſolutum zero, quod eſt alterum abſolutum, quod a notione abſolutiſſima Indeterminati derivamus. Determinetur hoc abſolutum zero ea una determinatione, cujus capax eſt: hoc eſt, zero hoc abſolutum determinetur in puncto C, ita ut ſit $o = C$ (*fig.* 28.); atque hoc diviſo bifariam, erit $o = \frac{o}{2} + \frac{o}{2} = \frac{oC}{2} + \frac{oC}{2}$: hæc vero diviſio duplicem nobis quantitatis enaſcendæ directionem exhibet: ſcilicet docet hinc inde ab hoc puncto fluere debere quantitatem, ut a zero ad quantam perveniat; cum o non niſi unam, aut alteram directionem ſignificet. Hoc modo igitur expreſſo zero, oſtendit etiam tam quantitatem, quæ fluit dextrorſum, quam illam, quæ ſiniſtrorſum fluit, ſigno poſitivo eſſe ſumendam (ut Capp. ſuperior. demonſtravimus): oriuntur enim ſingulæ a ſuo peculiari puncto $\frac{oC}{2}$ ab altero $\frac{oC}{2}$ ſeparato, licet in eodem puncto C utræque commiſceantur, quæ in oppoſitam partem fluere cenſendæ ſunt: ac proinde fluxus a ſingulis enaſcentes ſigno poſitivo ſunt afficiendi.

Erit igitur $o = \frac{2o}{2} = \frac{o}{2} + \frac{o}{2}$. Ponamus nunc, fluxu hinc inde progrediente, ortas quantitates a ſuo quamque originis puncto (*fig. ead.* 28.) CA, CB: erit æquatio $o + 2CB = o + 2CA = \frac{o}{2} + CA + \frac{o}{2} + CB$, quæ dicantur $y + y$; ſive $CA = y$, $CB = y$; & æquatio $o + 2CB = o + 2y$

$$= o + AB = o + BA = \frac{o}{2} + y + \frac{o}{2} + y = \frac{o}{2} + CA + \frac{o}{2} + CB$$

$$= \frac{o}{2} + CA - Cd + \frac{o}{2} + CB + Cd;\ \text{ſive} = \frac{o}{2} + AC + \frac{o}{2} + BC$$

$$= \frac{o}{2} + AC - Cd + \frac{o}{2} + BC + Cd = \frac{o}{2} + y - x + \frac{o}{2} + y + x$$

(facta identica $Cd = x$): & hinc inde ab hac æquatione ſublato $o = \frac{o}{2} + \frac{o}{2}$, erit $AB = BC = y - x + y + x$, quæ eſt eadem illa generaliſſima formula alia Abſoluti Infiniti methodo inventa; ex qua iterum, ſi ponamus y variabiles, & x datas, eruitur Syſtema baſis variabilis; ſi y ponantur datæ, & x variabiles, Syſtema baſis datæ. Cum igitur ex utraque origine, ſcilicet tam ex Infinito Abſoluto, quam ex Abſoluto zero eædem veritates pleno alveo difluant, utraque Methodus aſſumenda eſt: quæ aut utraque eſt legitima, aut falſa utraque: licet tamen utraque diverſo modo tractanda ſit, ut vidimus, ac ſuo loco magis magiſque palam fiet.

§. 21. Ex hiſce indicio manifeſto ſe prodit tertia illa a me in Præfatione indicata *Methodus Abſoluta Circulationis*, quæ una primæ, & alterius Methodi *Infiniti Abſoluti*, & *Abſoluti zero* vices gerere poteſt, & munus exequi, atque pro alterutra uſurpari. Nimirum cum in abſoluto Infinito puncta d', D' (*fig.*27.) vere ultima nuſquam conſiſtant, ſed ſemper ſingula infinities remota concipiantur a quocumque alio puncto d, D quocumque intervallo infinito a puncto dato C remoto: patet hoc concipiendi modo adumbrari infinitam quamdam abſolutiſſimam revolutionem, nullo præcipuo neceſſario puncto definitam, quæ natura ſua nec principium, nec finem neceſſarium habeat, ſed arbitrio relinquat. Porro hanc non niſi in circulo inveniri poſſe proprietatem facile quiſque cognoſcet, dummodo cogitet in peripheria circuli nullum punctum præcipuum reperiri, quod aliquo eſſentiali, ac peculiari adjuncto definitum ab aliis ſecerni poſſit, atque ut neceſſarium principium, aut finem quantitatis linearis aſſumi: nec reſtat, niſi ut arbitrio unum, aut alterum determinetur. Hinc hæc, quam quærimus, abſoluta indeterminatio non niſi cum circulo vere, ac in omnibus conciliari poteſt. Quæ tamen proprietas cum omnibus cujuſcumque radii circulis ſemper conveniat, aptiſſime, atque unice a peripheria circuli radii abſolute infiniti poterit repræſen-

ſentari linea illa abſolute Infinita, quam concipimus ejus abſoluta indeterminatione totam linearem quantitatem exhaurire, a qua deinde abſcindi poterit quæcumque portio A B (*fig. ead.* 27.) a punctis A, & B vel datis, vel variabilibus terminata: in primo caſu abſcindit A B, quam dicimus conſtantem, in ſecundo A B variabilem, ſive fluentem punctis A, & B ad ſe invicem quocumque intervallo accedentibus, vel a ſe recedentibus. Peripheria vero circuli radii zero, quæ eſt quidem prorſus zero, ſed conſiderata ut peripheria, eadem, quam ſupra diximus, infinitæ revolutionis proprietate gaudet, poterit conſtitui tamquam principium, atque origo cujuſcumque enaſcendæ quantitatis, quoquoverſum prorumpentis: ideoque circulus radii Infiniti primæ, circulus radii zero alterius a me deſignatæ Methodi vices, atque munia earum obire poterit, atque commode mutato valore radii, qui ſemper arbitrio relinquitur, ab una ad alteram, atque a ſingulis abſolutis ad id, quod in finito contingit, tranſitum facere. Quare in prima Methodo Abſoluti Infiniti, radium abſolute infinitum requirente, duo ſemper puncta A, & B neceſſario ſunt primum determinanda, ut quantitas ab hoc Infinito Abſoluto excerpta binis terminis definiatur, puncto medio C variabili: in altera vero Abſoluti zero punctum ſufficit unum C determinare, a quo hinc inde enaſcenda quantitas prorumpat, ac proinde extrema puncta A, & B variabilia arbitrio relinquat determinanda. Ab utraque tamen utraque Syſtemata baſis datæ, & variabilis eo temperamento, quo ſuperius uſi ſumus, erui poſſunt: ut ſuperius fecimus.

§. 22. Illud hic etiam obiter innuo, quod Cap. II. §. 27. obſervavi, tam hoc Infinitum Abſolutum, quam hoc Abſolutum zero naturam illius quantitatis etiam in hoc abſoluto retinere, cujus in primo portio aliqua abſciſſa fuit, in ſecundo portio aliqua prorumpit. Quod ſi tam quantitas ab Infinito abſciſſa, quam illa a zero enata nullius dimenſionis ſupponatur, hoc eſt, puncta A, & B in primo, C in ſecundo nullum ſui veſtigium relinquant, atque viam a punctis confectam ſignificent, quod a nobis in eodem Capite exponente zero deſignatum fuit; tum (cum nullum criterium inveniri poſſit, utrum quantitas a primo quietis ſtatu C a zero abſoluto oriatur, aut pertineat ad Abſolutum Infinitum ſpatio infinito emenſo) tam ab uno, quam ab altero derivare poſſumus, ac debemus; ut quod promiſcue utriſque competit, utriſque referatur: atque ideo quæcumque quantitas tam ab abſoluto zero, tamquam primo originis puncto, quam ab abſoluto Infinito, tamquam portio aliqua ab hoc Infinito Abſoluto abſciſſa deducatur oportet: quid vero inter utramque eruendæ quantitatis finitæ Methodum intercedat (præter ea, quæ ſuperius diximus, & dicemus) cum præcipue de duabus hiſce Abſolutis Methodis ſuo loco ex compoſito agam, evidenter (ut ſpero) conſtabit; licet hæc abſtractiſſima imaginationis potius commenta, quam prima ac genuina Calculi totius analytici fundamenta videantur.

§. 23. Ex his omnibus jam ſponte fluunt veræ, ac numeris omnibus abſolutæ Definitiones iſtius Infiniti Abſoluti, ac Abſoluti Zero ad Analyſim pertinentes; ex quibus facile eruuntur definitiones illæ, quæ Infinitis, ac Infiniteſimis relativis conveniunt. Adhuc uſque, ejurato tamquam abſurdo Infinito hoc Abſoluto, ab Analyſtis ſequenti modo definiuntur quantitates infiniteſimæ, & Infinita rela-

tiva: nempe Riccati omnium conſenſu ait (§. 15. Cap. I. Lib. I. Tom. II. Inſtit. Analyt.): „ Per hæc nomina (ſcilicet *differentiæ*, *fluxionis*, *elementi*) „ nihil aliud intelligas volo, niſi differentias quibuſcumque datis minores. „ Et §. 19. . . . . . . „ nomine (Infinitorum relativorum) intellige quantitates „ majores quibuſcumque datis: „ has tamen definitiones & non penitus exactas, & fallaces, atque cauſſas erroris ſæpe eſſe, ſic traditis prius veris ac propriis Abſoluti Infiniti, & Zero Abſoluti definitionibus demonſtro. Nam ex dictis jure mihi videor affirmare poſſe, *Infinitum Abſolutum illud eſſe, quod ſemper infinities majus eſt quocumque relativo cujuſcumque ordinis* (ſcilicet 2.[di] 3.[ii] uſque ad infinitum ordinis) *aſſignabili; Zero vero Abſolutum illud eſſe, quod ſemper infinities minus eſt infiniteſima quantitate aſſignabili cujuſcumque ordinis*. Nimirum Infinitum Abſolutum dicitur infinities majus quocumque infinito aſſignabili, quia vidimus §. 18. C d (*fig.* 12.) ultimam, ſive maximam infinities ſuperare C A, quæcumque illa ſit etiam infinita; ergo maximum Infinitum ſive abſolutum, ut tale revera ſit, non ſufficit ut ſuperet, niſi etiam infinities ſuperet cujuſcumque ordinis infinitum aſſignabile C A, quod cum aſſignabile ſupponatur, ſemper intra relativa infinita cujuſcumque ordinis collocandum eſt. Simili modo Abſolutum Zero debet infinities eſſe minus cujuſcumque ordinis aſſignabili, ſive relativa infiniteſima: niſi enim hoc fiat, nec primum Abſolutum Infinitum, nec ſecundum Abſolutum Zero recte appellari poteſt. Ex iſtis vero abſolutis definitionibus ultro profluunt Infiniti relativi, & Infiniteſimi, ſive Zero relativi legitimæ definitiones: nam illud jure dicetur Infinitum relativum, quod non ſolum ſuperat Infinitum ordinis unitate inferioris, ſed infinite ſuperat. Poſita enim C A (*fig. ead.* 12.) infinita, ex. gr. ordinis primi, maxima C d debet infinities ſuperare hanc C A infinitam ordinis primi; atque ideo in hoc caſu vere C d dicetur Infinitum relativum ordinis ſecundi: ſic e converſo facta C d infiniteſima ordinis primi, infiniteſima C A debet infinities ſuperari a C d, ſive C A debet eſſe infinities minor C d infiniteſima ordinis primi, atque ideo erit C A infiniteſima ordinis ſecundi: & ſic ad infinitum procedendo. Hinc quemadmodum repugnantia eſſent infiniteſima relativa cujuſcumque ordinis, ſi repugnans eſſet abſolutum zero, in quod ultimo incidunt, vel ex quo primum extracta fuerunt; ita repugnantia eſſent Infinita relativa, ſi abſurdum eſſet Infinitum illud Abſolutum, a quo deſcendunt, vel ad quod tendunt. Quod maxime cohæret cum iis, quæ in Præfatione §. 42. ad tollendam repugnantiam Infiniti Abſoluti diximus.

§. 24. Nunc cum iſtis definitiones communes conferendo, ſtatim patet has & incompletas, & fallaces eſſe: nam in utraque primum deeſt verbum *infinities;* quo monemur *Infinitum*, vel *Infiniteſimum* non ſufficere ut ſit majus, vel minus quacumque data, ſed infinities majus, vel minus: atque hinc primum infinite majus ſecundo, vel ſecundum infinite minus: hoc eſt, ut ſit C d (*fig.* 12.) maxima reſpectu C A, neceſſe eſt ut ſit C A minima reſpectu C d: hi enim termini reciprocantur ita, ut dato uno alterum exiſtat; altero vero ſublato, alterum repugnet neceſſe eſt: atque hinc ſi C A zero abſolutum ſit, ſive punctum C; C d maximum ſit illud Abſolutum Infinitum, ſive inverſum zero, & vice-

ver-

verſa. Definitiones igitur communes ſunt incompletæ, atque fallaces, ita ut ex iſtis repugnantia, quæ oritur ab excluſione Infiniti Abſoluti, ſuppoſito altero abſoluto zero, numquam detecta fuerit. Denique verba *quibuſcumque datis* ita ambigua ſunt, ut non ſolum non explicent cujus naturæ hæc data eſſe debeant, quæ vel pendent ab aſſignato prius Infinito, vel Infiniteſimo, vel hæc a datis primum aſſignatis earum naturam deſumunt; ſed etiam *datæ* confundi poſſunt cum iis, quæ in Calculo dicuntur *conſtantes*, ſive determinatæ: hæc ſingula enim verba promiſcue in hoc ſenſu in Calculo uſurpantur: quod tamen verbum *datæ* hîc, quam longe diſtet ab hac uſitata ſignificatione perſpicuum fit. Hæc, quæ plenius ſuo loco erunt explicanda, non erant hîc prætermittenda: ut ſtatim conſtet quam multæ, & quam neceſſariæ, & fœcundæ a primis meæ inchoatæ Theoriæ rudimentis ſponte ſua fluant veritates aliis hucuſque inventis Methodis, quæ dicuntur *ſublimes*, *tranſcendentes*, &c. prorſus imperviæ; a quibus ſtatim eruuntur duo Syſtemata baſis datæ, ac variabilis, ſine quibus nec ipſa æquationum primi gradus ſolutio haberi poteſt; ac nullo negotio imaginarium, quod tamquam peſtis continuo graſſans totum Calculum inficere putabatur, & eliminatur, ſi velis, & ad utilem uſum traducitur, ejus natura probe explorata; ut de ejus veritate, atque amplitudine judicium ſtatim fieri poſſit. Qua theoria cum natura ſua nitatur Calculus, qui dicitur finitus; tantum abeſt ut hic anguſtioribus longe limitibus, quam Calculi dicti ſublimes, circumſcribatur, ut non ſolum ceteris longe præſtet, ſed abſolutiſſimus ſit, Methodis Infiniti Abſoluti, & Abſoluti Zero nixus, ex quo ceteræ quotquot inventæ ſunt (quocumque tandem nomine *tranſcendentium*, *ſublimium* &c. donentur) omnes tamen relativæ, vim ſuam, atque virtutem mutuantur, non niſi intra finitos quoſdam terminos valituræ.

CAPUT VII.

De ſolutione æquationum linearium.

§. I. Hiſce jactis veluti fundamentis, ſine quibus ne primam quidem linearium æquationum ſolutionem inchoare, nedum completam earum, quæ ſunt ulterioris gradus, Theoriam exædificare licet; tandem horum præſidiorum ope ad ſolutionem æquationum linearium feliciori exitu concinnandam accedamus: ut quæ ſenſim in Capitibus ſuperioribus (ut in re nova, & vulgatis opinionibus prorſus contraria fieri neceſſe eſt) eruimus, in hoc, uno veluti facto compendio, complectamur. Ac primum hic reddenda videtur ratio, cur, mutata veteri denominatione, *æquationes lineares* potius appellem eas, quæ *æquationes primi gradus* paſſim audiunt. Ea nimirum eſt ut oſtendam, non recte ac tuto earum naturam, atque ordinem ab exponente variabili ſuffixo, qui primum ſe offert in formula, (ut hucuſque a Recentioribus factum eſt) deſumi: qui ordo potius deſumendus eſt a dimenſionibus geometricis, quibus æquationem datam applicare volumus. Fieri enim poteſt, ut æquatio, quæ ſymbolis analyticis expreſſa primi, vel ſecundi gradus formam præſeferat, ſit ſecundi, vel primi, prout a ſecunda, vel prima dimenſione geometrica ejus originem ducimus. Nam ex. gr. $x - a = 0$ (quæ ſub hac forma *æquatio primi gradus* univerſim dicitur, quia exponens x ponitur unitas) erit ſecundi gradus ſi ab æquatione $\sqrt{x}\,\sqrt{x} - \sqrt{a}\,\sqrt{a} = 0$ proficiſcatur, quæ diviſa in duos factores $\overline{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \cdot \overline{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 0$, ſtatim oſtendit ipſam æquari rectangulo horum factorum linearium, ac proinde eſſe ſecundæ dimenſionis. Item $x^2 - a^2 = 0$, quæ ſemper vulgo ut æquatio ſecundi gradus uſurpatur, in linearium numerum erit referenda, ſi x^2 ab analogia $1 : x :: x : \frac{x^2}{1}$, & a^2 ab altera $1 : a :: a : \frac{a^2}{1}$ originem deſumamus: in quo caſu tam $\frac{x^2}{1}$, quam $\frac{a^2}{1}$ lineas repræſentant, non rectangula, vel quadrata. Idque eo facilius accidere poteſt, quod unitatem a calculo communi ſemper explodimus, ea falſa ducti ratione, qua creditur valorem quantitatis, in quam unitas ducitur, vel per quam quantitas dividitur, nihil omnino immutari: & tamen vidimus Cap. II. hoc modo a genere

ad

ad genus, ni caute procedamus, tranſitum fieri, per quem duæ quantitates heterogeneæ male inter ſe comparantur, quæ nullo ejuſdem naturæ vinculo conjunctæ comparari inter ſe minime poſſunt. Atque hoc fit ſemper, ſi ſigno $=$ non niſi notionem affigamus unam identitatis, aut æqualitatis, ut hucuſque factum fuit: & cum recte poſſint hoc ſigno $=$ æquationes ſequentes ita conjungi, ut ſit $x - a = \sqrt{x}\sqrt{x} - \sqrt{a}\sqrt{a}$; vel $x^2 - a^2 = \frac{x^2}{1} - \frac{a^2}{1}$; decipimur tamen ſi hic perfectam (uti contendunt) æqualitatem inter quantitates hoc ſigno $=$ conjunctas intercedere intelligamus: lineæ enim ſuperficiebus, aut viceverſa, repugnante earum natura, invicem æquantur. Hinc hoc loco ſignum hoc $=$ non niſi eam a me ſæpius inculcatam *transformationem* ſignificare poteſt: nimirum hîc eo ſigno indicatur formulam hanc $x - a$, quæ poteſt eſſe linearis, vel ſuperficialis, unius vel alterius quantitatis naturam referre poſſe, prout lubet formulam modificari, atque uni vel alteri dimenſioni geometricæ applicare. Porro cum in hac Analyſeos Scientia primum formula algebraica data ponatur, geometricis affectionibus poſtea applicanda; hac falſa opinione decepti in errorem incidimus ſane graviſſimum, ſi quæ ſeorſim vera ſunt, illegitimo identitatis vinculo inter ſe conjungamus.

§. 2. Hiſce ad tollendam ambiguitatem omnem præmiſſis, ſumo æquationem $x - a = 0$, quæ licet cujuſcumque dimenſionis poſſit eſſe, tamen hic non niſi lineis geometricis applicatam volo, quam proinde ex noſtra definitione *linearem* appello, atque ſuppono. Deſcripta igitur intelligatur (*Tab. IV. fig.* 23.) linea $AB = a$, duobus tantum punctis A, & B terminata: ex dictis Capp. ſupp. patet hanc lineam conſiderari poſſe vel genitam a fluxu unius puncti A progreſſi in B; vel a fluxu unius puncti B uſque in A; vel ab utriſque fluxibus punctorum A, & B in punctum D concurrentibus: quod punctum D, donec nullum aliud inter puncta A, & B punctum datum concipiatur, variabile ſemper erit. Igitur ex hoc triplici gignendæ AB modo, qui nullus altero potior eſt, triplex æquatio oriatur neceſſe eſt. Nam ex uno originis puncto A oritur æquatio $x = AB = + a$, cui a præfigendum eſt ſignum poſitivum: gignitur enim a fluxu poſitivo A verſus B procedente: ex altero vero originis puncto B oritur æquatio altera $x' = BA = + a$, quæ a ob eamdem rationem eſt ſigno poſitivo afficienda: gignitur enim hîc a fluxu poſitivo puncti B progredientis verſus A. Tamen hæc ſecunda BA eſt in directione prorſus contraria primæ AB; quæ proinde BA ſi referatur ad primam $x = AB$, erit $BA = - a = - AB$; & viceverſa AB, ſi referatur ad BA: hoc vero ſemper eveniat oportet in calculo communi, uno tantum originis puncto A, vel B ſumpto.

§. 3. Quamobrem ex dictis initio ſtatim patet: (I.°) æquationem hanc $BA = a = - AB = - a$ neceſſario oriri a calculo communi, non a meis male ſubductis calculis, vel male applicatis: (II.°) non eſſe abſurdam, ſed indicare quamcumque quantitatem ſumi poſſe vel poſitivam, vel negativam, prout ad ſuum, vel ad alterum originis punctum refertur: (III.°) facta inverſione

ſione lineæ, quæ erat negativa, fieri poſitivam, vel viceverſa; atque hac inverſione a puncto proprio ad improprium, vel viceverſa originem lineæ transferri: (IV.°) negativum non eſſe ita neceſſarium, ut in caſibus, in quibus imaginarium offendimus, non liceat ad poſitivum, & conſequenter ad reale tranſitum facere: (V.°) denique imaginarium numquam eſſe abſolutum, ſed tantum relativum, cui ſemper ſuum reale reſpondeat oportet, & viceverſa: ut recte mihi videar affirmare poſſe, ex hoc uno §.° tantum & veritates omnes, quas typis edidi, quaſque ſuperius dixi, invictiſſime demonſtrari, & quæ contra objecta fuerint nullo negotio dilui.

§. 4. Tertius vero generationis lineæ A B modus a duobus punctis A, & B ſibi invicem occurrentibus, exhibet æquationem $x + x' = AD + BD$ (*fig. ead.* 23.) $= a = AB = BA$: idem enim eſt $x + x'$, ac $x' + x$: in primo caſu $x + x' = AD + BD = AB$; in ſecundo $x' + x = BD + AD = BA$. Itaque $x + x' = x' + x = AB = BA = a$, cui a hoc modo genitæ ſemper ſignum poſitivum affigendum eſt; oritur enim a duobus fluxibus poſitivis A D, B D, qui nihil immutantur, ſi accipiantur inverſi B D, A D: non repugnat tamen ſumi poſſe negativos, atque ipſam a negativam; dummodo ſemper a negativo ad poſitivum tranſitum fieri poſſe intelligas. Hic tamen ſi methodum communem ſequamur, erit

$$\begin{matrix} x + x' = AB = a = BA = -a \\ x + x' = -BA = -a = AB = a \end{matrix}$$

: ex quibus neceſſario oritur vel $1 = -1$, vel $-1 = 1$, ſcilicet æquatio illa, quam defendere non mea intereſt, ſed iis, qui maximo ſuo malo incauti in ſe ipſos arma ferentes tam pervicaciter impugnant.

§. 5. In æquatione $x + x' = AD + BD$ (*fig. ead.* 23.) $= a$, ex duobus originis punctis A, & B deducta, ſi fiat $x' = 0$, oritur æquatio $x + 0x' = x = AB + 0BD = a$: hoc eſt ſi fluxus $x' = BD$ ponatur nullus, æquatio primum generationis modum exhibet, tota linea A B a puncto tantum A genita: ſi vero fiat $x = 0$, ſive fluxus A D nullus, æquatio convertitur in hanc $0x + x' = 0AD + BA = a$, quæ pertinet ad ſecundum generationis modum, ſumptum a fluxu ſolitario puncti B verſus A. Igitur æquatio, quæ huic tertiæ ſuppoſitioni punctorum A, & B ſibi invicem occurrentium reſpondet, ſcilicet $x + x' = AD + BD = a$ cenſenda eſt æquatio generalis, quæ alios duos ſub ſe generationis modos complectitur, quibus gigni poſſe lineam A B ſuppoſuimus; ac proinde eſt æquatio generalis Syſtematis illius, quod *baſis datæ* appello. Quoniam vero hujuſce æquationis generalis ope, facta x, vel $x' = 0$, inveniuntur aliæ duæ $x' = BA = a$; $x = AB = a$; ita ex iſtis ſingulis ad generalem facilis eſt tranſitus. Nam data $x = a$, erit $x + 0x' = a = AB$; ſive in caſibus mediis $x + x' = AD + BD = BD + AD = AB = BA = a$: ſemper enim a duobus punctis A, & B, quæ ab uno, aut altero ponitur genita A B, ejus geneſis deduci poterit, vel viceverſa. Hinc mani-

manifeſte patet, quam cum veritate conſentiat definitio a me tradita æquationum, in quibus una tantum variabilis reperitur, quas non *determinatas* (ut vulgo male fit), ſed *limitis* appellavi, repudiata veteri denominatione.

§. 6. Conſequitur itaque quamcumque æquationem linearem unius variabilis $x = a$ duas exhibere ſemper æquationes limitis $x = AB = a$, $x' = BA = a$, unam alteri directione oppoſitam, hoc eſt vel $x + 0x' = AB = a$, vel $0x + x' = BA = a$, quarum ope ſemper negativum evitari poteſt. In hoc caſu una x eſt maxima, & æqualis $AB = a$, vel $BA = a$; altera minima $= 0$; hoc eſt vel $x' = 0BA$, vel $x = 0AB$. Præter tamen hunc, vel alterum ſolitarium valorem x maximum, ſive præter unam, aut alteram radicem maximam x, quæ directione tantum, non quantitate differunt, infinitæ aliæ radices binæ & binæ ſumptæ æquationi propoſitæ ſatisfaciunt. Nimirum AB in duas dividi partes poteſt, & quidem numero infinitas, hac ſemper conditione ſervata, ut earum ſumma propoſitam datam a adæquet. Quemadmodum enim una, vel altera x ſolitaria vera dicitur radix æquationis $x = a$, quia tam $x - a = 0 = 0A$, quam $x' - a = 0 = 0B$; ita $x + x'$ binæ ſumptæ erunt veræ radices æquationis, quia $x + x' - a = 0$: quæ ſemper binæ & binæ ſumendæ ſunt, nec niſi in limite una, vel altera ſolitaria maxima obtineri poteſt.

§. 7. Hinc in ipſa ſtatim prima ſimpliciſſima æquatione lineari $x = a$, tantum abeſt, ut una tantum radix finita (quemadmodum huc uſque creditum fuit) eidem æquationi ſatisfaciat, ut primum duæ radices ſolitariæ finitæ ſe ſe offerant, quarum ſingulæ ſeorſim æquantur a poſitivæ, quæ tamen ſi inter ſe comparentur, una reſpectu alterius eſt negativa; ſed abſolute, & in ſe tantum conſideratæ, poſitivæ ſumendæ ſunt: altera enim reſpondet alteri x, æquali zero, nec inter ſe in hoc caſu ullam habent communicationem hujuſmodi radices finitæ ſingulæ $= a$: qua veritate docemur, ſemper vitari poſſe negativum. Nam ex dictis conſtat eſſe (*fig. ead.* 23.)

$$x = AB = a = -BA = -a = -x', \ \&$$

$$-x = -AB = -a = BA = a = x' : \text{ergo ſi ſumatur}$$

$x = -a = -AB$; cum $-AB$ ſit æqualis BA, & BA ſit æqualis $x' = a$, erit $x = -a = -AB = BA = a = x'$. Ergo data $x = -a = -AB$, ſi fiat lineæ inverſio, erit $x = BA = a$, & x permutatur in x': vel ſi eſſet $x' = -a = -BA$, facta inverſione lineæ, erit $x' = AB$; quo facto x' permutatur in x. Quare ſemper $x = \pm a$; $x' = \pm a$; ſed

$$x = +a = AB \text{ reſpondet } x' = -a = -BA, \ \&$$

$$x = -a = -AB \text{ reſpondet } x' = a = BA.$$

Itaque poſitivo ſemper reſpondet ſuum negativum, & negativo ſuum poſitivum; ut ſemper liceat a propria radice ad impropriam, ſive a proprio Syſtemate ad improprium, & viceverſa, tranſitus fieri. Attamen verum ſemper erit, unam

eamdemque quantitatem & poſitivam, & negativam ſumi poſſe, prout propriæ, vel impropriæ variabili comparatur: negativum enim, & poſitivum reciprocantur, neque poſſe exiſtere poſitivum, niſi ſuum negativum huic reſpondeat, æquationes ſuperiores aperte declarant. Hoc vero obtinetur ſola inverſione lineæ A B, vel B A: ergo vera erit æquatio

$$x = AB = -(-AB) = -(BA) = -x'$$
$$\& -x = -AB = (-AB) = BA = x' \quad : \text{ ſive}$$
$$x = a = -(-a) = -(a) = -x'$$
$$\& -x = -(a) = +(-a) = a = x'$$

ut *Capp.* ſuperioribus demonſtravimus.

§. 8. Duæ igitur radices ſolitariæ maximæ limitis directione oppoſitæ, quibus reſpondent duæ minimæ æquales zero, e ſolo Syſtemate baſis datæ a nobis inventæ, utræque ſeorſim ſumptæ, æquationi lineari propoſitæ ſatisfaciunt: atque hac una animadverſione ambages omnes ab una tantum hactenus inventa radice limitis inexuperabiles, quibus in inveſtiganda natura poſitivi, & negativi irretimur, nullo negotio ſolvuntur. Hinc enim primum eruuntur duo novi *Canones* univerſales (qui deſcendunt a generalioribus poſitis Cap. V. §. 44.) apprime in tota Analyſi neceſſarii, quibus tamquam fundamentis, atque principiis totus Calculus analyticus nititur, atque gubernatur.

Canon I.

Quantitates æquales, ſed diverſæ, eodem ſigno poſitivo, vel negativo affectæ, dant earum ſummam poſitivam, vel negativam: ſi vero ponantur identicæ, æquantur zero.

$$\text{Ita} \quad x + x' = x - x = -x' + x'$$
$$-x - x' = x' - x' = -x + x$$
$$x' - x' = -x + x = 0$$

Canon II.

Quantitates æquales contrario ſigno affectæ, quæ ſi ponantur identicæ fiunt zero; ſi ponantur diverſæ, duplo valori poſitivo, vel negativo ſingularum æquantur.

$$\text{Sic} \quad x - x = x' - x' = 0$$
$$\text{ſed} \quad x - x' = x + x = -x' - x'$$
$$-x + x' = -x - x = x' + x'.$$

§. 9. Nam cum ex demonſtratis diviſa A B (*fig.* 1.) integra bifariam in C, ſit

$$x + 0x' = AB = x + x' = AC + BC; \text{ vel}$$
$$x' + 0x = BA = x' + x = BC + AC; \quad \text{ac proinde}$$

$x =$

$x = -x'$, $x' = -x$, ſi ponantur diverſæ, ut figura aſſumpta oſtendit (hoc eſt, quæ ſuperimpoſitæ identitatem conſtituebant, explicatæ diverſum, ac duplum ſitum in eadem directione occupent); erit $x = AC$, $x' = BC$; ergo $x + x' = AC + BC$: qua æquatione indicantur duo originis puncta A, & B ſingularum diverſarum linearum AC, BC ſibi invicem in puncto C dato occurrentium. Quod ſi ponantur identicæ, hoc eſt BC ſuperimponatur CA, vel AC alteri CB, erit $x + x' = x - x = AC + BC = AC + CA = AC - AC = oA = -CA + CA = oC = CB + BC = CB - CB = oC = -BC + BC = oB$: qui eſt primus Canon. Secundus vero Canon in hoc differt a primo, quod in primo duo diverſa originis puncta A, & B linearum AC, BC indicantur: in hoc unum atque commune punctum originis C medium utriſque AC, BC conſtituitur, ita ut ſi dicatur $CA = x$, ſit $CB = -x'$; vel facta $CA = -x$, ſit $CB = x'$, in quo utroque caſu $x = -x'$, & $-x = x'$: ergo $x - x' = -x + x' = x + x = x' + x' = -x' - x' = -x - x$: ſive $x' - x = x' + x' = BC + BC = 2BC = BA = x'$

$$x - x' = x + x = AC + AC = 2AC = AB = x:$$

quo facto a puncto communi C ad punctum unum B, vel alterum A originis transferimur. Hoc igitur ſecundo Canone non niſi punctum unum originis C, vel B, vel A conſtituitur: quando in primo ponebantur eodem tempore vel duo A, & B; vel item duo C, C, quæ quidem licet in unum C commiſceantur, ſunt tamen diverſa cenſenda, cum ab utraque parte tam linea CA, quam CB ponatur poſitiva, hoc eſt una CA orta a fluxu poſitivo C verſus A, altera CB orta a fluxu poſitivo C verſus B, qui proinde fluxus nullam inter ſe habent communionem.

§. 10. In hoc igitur Syſtemate baſis datæ, in quo $x = -x'$, & $-x = x'$, duabus æquationibus limitis minimi (*fig.* 23.) $x' = oBA$, $x = oAB$ reſpondent duæ limitis maximi æquationes $x = AB = a$; $x' = BA = a$, a quibus tamen ſingulis ſequentes combinationes proficiſcuntur. Nimirum facta $x' = oBA$, erit.

(1ª) $x = AB = a$; ſive (2ª) $-x = -AB = -a$; quæ dat

(3am) $x' = BA = a$; (4am) $-x' = -BA = -a$;

& facta variabilium tantum permutatione

(5ª) $-x' = AB = a$; ſive (6ª) $x' = -AB = -a$;

(7ª) $-x = BA = a$; (8ª) $x = -BA = -a$

Hinc (5ª.) æqualis (1)ª, & (4)ª: (cum $-x'$, $-x'$ ſint eædem tam in (5.ª), quam in (4.ª)): ac etiam

 (6.ª)

(6.ª) æqualis (2.ª) & (3.ª),

(7.ª) æqualis (3.ª) & (2.ᵈᵃ),

(8.ª) æqualis (4.ᵗᵃ) & (1.ª),

Eodem modo facta $x = 0$ A B; erit

(1.ª) $x' =$ B A $= a$; (2.ª) $- x' = -$ B A $= - a$;

(3.ª) $x =$ A B $= a$; (4.ª) $- x = -$ A B $= - a$:

& facta variabilium permutatione

(5.ª) $- x =$ B A $= a$; (6.ª) $x = -$ B A $= - a$;

(7.ª) $- x' =$ A B $= a$; (8.ª) $x' = -$ A B $= - a$

Ergo (5.ª) æqualis (1).ª & (4).ᵗᵃ

(6.ᵗᵃ) æqualis (2.ª) & (3.ª)

(7.ª) æqualis (3.ª) & (2.ª)

(8.ª) æqualis (4.ª) & (1.ª)

quæ ultimæ ſi inter ſe, & cum ceteris in prima ſuppoſitione inventis comparentur, patebit ſingulas pro ſingulis promiſcue uſurpari poſſe, atque in calculo ſubſtitui, cum a ſingulis hujuſcemodi octo combinationes eruantur.

§. 11. Inſuper in utraque ſuppoſitione

in (1).ª & (3).ª membra ambo ſunt poſitiva;

in (2).ª & (4).ª membra ambo ſunt negativa.

in (5).ª, (6).ª, (7).ª (8).ª alternantur ſigna, ſed

in (5).ª & (7).ª variabiles ſunt negativæ, poſitivæ conſtantes; contra vero

in (6).ª & (8).ª variabiles ſunt poſitivæ, conſtantes negativæ.

§. 12. Hinc illud conſequitur permutatione variabilium $- x$ in x', vel x in $- x'$, & conſtantium $- a$ in a, vel a in $- a$ tranſitum fieri a negativis relatis ad punctum originis A, vel B ad poſitiva relata ad punctum B, vel A; & viceverſa: atque ideo quod erat negativum relate ad primum originis punctum fieri poſitivum reſpectu alterius, & viceverſa; ut liberum ſemper ſit unam pro altera æquationem in calculo collocare, dummodo quid ipſæ velint intelligatur, & pro re nata aliæ aliarum loco opportune ſubſtituantur. Hoc vero facile obtineri poſſe inverſione lineæ Cap. II. jam demonſtravimus: cum revera $-$ A B æquetur B A, & A B æquetur $-$ B A, hoc eſt $- x = x'$, & $x' = - x$.

§. 13. Quare ſi hujuſmodi æquationes æquentur zero, dabunt ſequentes (*fig. ead.* 23.)

(po-

(poſitis pro a tam $AB = a$, quam $BA = a$)

$$x - AB = o = x - a = x - (-a)$$
$$-x + AB = o = -x + a = -x + (-a)$$
$$x' - BA = o = x' - (-a) = x' - a$$
$$-x' + BA = o = -x' + (-a) = -x' + a.$$

Oriuntur primæ duæ ſuſtitutione poſitivæ a pro AB relate ad punctum A, in quo caſu $BA = -AB = -a$: oriuntur ſecundæ ſubſtitutione poſitivæ a pro BA relate ad punctum B, in quo caſu $AB = -BA = -a$, atque ideo

$$\left\{\begin{array}{l} -x + AB = -x-(-AB) = x' - BA \\ -x + a = -x - (-a) = x' - (a) \end{array}\right\} \text{ inverſione facta;}$$

$$\& \left\{\begin{array}{l} x - AB = -(-x) + (-AB) = -x' + BA \\ x - a = -(-x) + (-a) = -x' + a \end{array}\right\} \text{ facta inverſione.}$$

Igitur a variabilibus negativis fit tranſitus ad poſitivas-relatas ad alterum punctum, & a variabilibus poſitivis ad negativas, facta inverſione (eo modo, quo docui) utriuſque termini tam variabilis, quam dati. In praxi vero data $x - a = o$, quoniam $x = a$, & $a = x$, ſubſtituatur in æquatione variabilis pro data, & data pro variabili (ſubſtitutione enim æqualium non turbatur æqualitas); & erit $x - a = -x + a$, ſed $-x = x'$, & $AB = +a = +(-BA)$ ergo $x - a = -x + a = x' - a = o$: quo facto a puncto A ad punctum B originis tranſitum fecimus. Et tamen æquatio $x - a = -x + a$ more communi tractata dabit $1 = -1$, vel $-1 = 1$: quæ tantum abeſt ut ſit abſurda, ut facilem atque rectam ſuppeditet viam, qua ab una ad alteram variabilem, ab uno ad alterum punctum originis tranſitus legitimus fieri poſſit.

§. 14. Quare in Syſtemate baſis datæ ſemper alternantur terminorum ſigna in æquationibus limitis maximi, dum æquantur zero. Cum enim oriantur ab æquatione generali.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = a = +(-a), \\ \text{ſive } x + y = AB = -(-AB) = BA, \\ \text{vel } x + y = BA = +(-BA) = AB: \end{array}\right\}$$

erit $\quad x - a = -y = -x', \ \& -x + a = y = x'$

vel $\quad x - (-a) = -y = -x', -x + (-a) = y = x'$

& facta $\quad y = x' = o$, erit

$$x - a = -o; \quad -x + a = o$$
$$x - (-a) = -o; \quad -x + (-a) = o;$$

in quo Syſtemate, cum x nequeat excedere valorem a, $x - a$ in omnibus caſibus,

ſibus, in quibus ipſa non æquatur zero, ſemper cenſenda erit negativa, quemadmodum ſemper poſitiva $-x+a$. Male igitur nos communem methodum in ſubducendis calculis ſecuti, quæ docet ſemper $-\times-=+$ & $-\times+=-$; æquationes $x-(-a)=-ox'$, & $-x+(-a)=ox'$ tamquam aggregatum duorum terminorum vel ſimul poſitivorum, vel ſimul negativorum ſupponimus, atque male ſtatuimus eſſe primam $x+a=o$, & ſecundam $-x-a=o$; cum fieri nequeat ut duo vere poſitiva, vel duo vere negativa ſimul ſumpta æquentur zero (paulo vero infra cui æqualia ſint docebo). Oritur enim $x-(-a)=o$

vel ab $x-(-AB)=x-BA=o$; in quo caſu x fit x';

vel ab $x-(-BA)=x-AB=o$; in quo caſu x ſervatur eadem:

& $-x+(-a)=o$

vel ab $-x+(-AB)=x'-AB$; in quo caſu $x=BA=a$; $x'=AB$

vel ab $-x+(-BA)=x'-BA$; in quo caſu $x=AB=a$; $x'=BA$.

§. 15. Statuendum igitur impoſterum tamquam firmum, atque ratum, numquam duo poſitiva, vel duo negativa ſimul ſumpta æquari poſſe zero; atque univerſim in quacumque æquatione terminos omnes ad eamdem partem translatos ſimul omnes vel poſitive, vel negative ſumptos non poſſe æquari zero: atque, ut id obtineatur, nullam aliam eſſe viam (ſi modo in eodem Syſtemate baſis datæ immorari velimus), præter eam quam indicavi; ut ſcilicet fiat $x+a=x-(-a)=x-a=-(-x)+a=-x+a=o$, facta inverſione variabilis, vel datæ: in quo caſu tantum recte formula poterit zero æquari: His adde quæ in primis Capitibus ſuperioribus iſtis conſona explicavi. Quare in baſis datæ Syſtemate duæ æquationes limitis dant duas radices, quæ reciprocantur ita, ut una ſit minima $=o$, altera maxima $=a$: ſcilicet vel

$$x=AB=a \text{ maxima}, \quad \& \; x'=oBA=o, \text{ minima};$$

$$\text{vel } x=oAB=o \text{ minima}, \quad \& \; x'=BA=a, \text{ maxima}:$$

quæ ſimul ſumptæ ſemper dant vel $x+ox'=a=AB$; vel $ox+x'=a=BA$: ex quibus eruitur $ox'=a-x=AB-x$; $ox=a-x'=BA-x'$: utraque formula ſemper poſitiva, atque ſemper ejus termini contrario ſigno affecti.

§. 16. In Cap. III. tamen animadvertimus hanc eamdem æquationem $x=a=AB$, vel $x'=BA=a$ eſſe etiam æquationem limitis Syſtematis baſis variabilis, profectam ab æquationibus $x=a+x'=$ (*fig.* 24.) $AB+BD$, vel $x'=a+x=BA+Ad$: ex quibus deſcendunt

$$\begin{cases} x-a=x' \\ x-AB=BD \end{cases}; \quad \begin{cases} x'-a=x \\ x'-BA=Ad \end{cases}; \text{ \& facta}$$

in prima x' minima $=o$; & in ſecunda x minima $=o$; oritur in prima

ma x minima $= a$; & in ſecunda x minima $= a$; quæ ſunt in hoc Syſtemate baſis variabilis æquationes ambæ limitis minimi, una æqualis zero, altera æqualis a; quæ tamen valore, & forma æquantur illis, quas invenimus in Syſtemate baſis datæ, in quo tamen minima $= 0$, maxima $= a$. Hujuſmodi igitur æquationes limitis tam pertinent ad Syſtema baſis datæ, quam ad Syſtema baſis variabilis, e quibus ad æquationes generales unius, vel alterius Syſtematis tranſitus fieri poteſt, ſervatis iis, quæ propria alterutrius Syſtematis in ſingulis ſervanda ſupra oſtendimus.

§. 17. Verum in Syſtemate baſis variabilis præter æquationes ambas limitis minimi, quæ eædem ſunt ac illæ limitis maximi, & minimi Syſtematis baſis datæ; aliæ duæ æquationes ambæ in quocumque Syſtemate baſis variabilis limitis maximi inveniuntur, quæ ita huic Syſtemati ſunt propriæ, ut alteri Syſtemati baſis datæ applicari minime poſſint: eæ ſunt $x + a = \infty$; $x' + a = \infty$, in quibus ambæ variabiles ſunt infinitæ, ſive $\infty + a = \infty$; $\infty + a = \infty$, & $\infty - \infty = a$; $\infty - \infty = a$: hoc eſt earum differentia æquatur datæ a. Nam vidimus eſſe (*fig.* 24.)

$$\left\{\begin{array}{l} x = a + x' \\ x = AB + BD = AD \end{array}\right\} \quad \& \quad \left\{\begin{array}{l} x' = a + x \\ x' = BA + Ad = Bd \end{array}\right\} \text{: ergo}$$

facta in prima $x = \infty$, & in ſecunda $x' = \infty$, æquationes erunt

$$\infty x = a + x' \;; \qquad \infty x' = a + x.$$ At in prima

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ continetur intra limites } a = AB, \; \& \; \infty\, BD \\ x' \text{ continetur intra limites } 0 = 0BD, \; \& \; \infty\, BD \end{array}\right\} \text{: in ſecunda}$$

$$\text{contra} \left\{\begin{array}{l} x' \text{ continetur intra limites } a = BA, \;\; \& \; \infty = Ad \\ x \text{ continetur intra limites } 0 = 0Ad, \; \& \; \infty = Ad \end{array}\right\}.$$ In

$$\text{prima igitur} \left\{\begin{array}{l} x \text{ minima} = a; \;\; x' \text{ minima} = 0 \\ x \text{ maxima} = \infty; \; x' \text{ maxima} = \infty \end{array}\right\} \text{: in ſecunda}$$

$$\text{contra} \left\{\begin{array}{l} x \text{ minima} = 0; \;\; x' \text{ minima} = a \\ x \text{ maxima} = \infty; \;\; x' \text{ maxima} = \infty \end{array}\right\} \text{: at in prima}$$

$\infty x - \infty x' = AB = a$; in ſecunda $\infty x' - \infty x = BA = a$: ex quibus methodus communis crueret $\infty x - \infty x' = \infty x' - \infty x$, ſive $1 = -1$, vel $-1 = 1$. Verum hic, ceteris omiſſis, illud tantum ajo, quotieſcumque in hujuſmodi æquationibus limitis ambo duo termini, vel ſimul omnes poſitivi, vel ſimul omnes negativi ſumuntur, hujuſmodi æquationes non poſſe pertinere niſi ad Syſtema baſis variabilis, atque tantum eſſe æquationes limitis maximi, ſive infiniti hujuſce Syſtematis, quæ proinde nequeunt zero æquari: cum nullo modo ad Syſtema baſis datæ in hoc limite poſſint pertinere.

§. 18. In æquationibus igitur (5)ª, (6)ª, (7)ª, & (8)ª. §. 10. hujus Cap. in quibus alternantur ſigna in terminis, ſi hujuſmodi termini ab una tantum parte ſigni æqualitatis ponantur, atque methodo communi permutetur ſignum termini

tranſ-

tranſlati, ita ut ambo vel negativi, vel poſitivi fiant; tunc æquationes limitis non amplius pertinent ad Syſtemata baſis datæ, in quibus una maxima, & altera minima; neque pertinent ad Syſtemata baſis variabilis in eo caſu, in quo ambæ minimæ ſunt, ſed pertinent tantum ad Syſtemata baſis variabilis in eo ſolum caſu, in quo ambæ variabiles maximæ fiunt infinitæ: ac proinde comparationis terminus nequit eſſe zero, ſed Infinitum abſolutum. In æquatione enim (*fig. ead.* 24.) $x + a = x'$; vel $-x - a = -x' = a + x' = x$; ſive $AB + BD = AD$; ſive $-AB - BD = -AD = BA + Ad = Bd$, x' ſolitaria, qui eſt comparationis terminus, non poteſt eſſe zero, cum minimus valor, ad quem deprimi poſſit, ſit $= a$, in quo caſu altera x addita datæ a fit zero: verum quidem fieri poteſt infinita, & quidem altera x infinita, ſed ſemper minor ſolitaria quantitate a. Communis igitur methodus, quæ, quando $x = -a$, vel $-x = a$, docet ſemper fieri debere $x + a = 0$, vel $-x - a = 0$, docet fieri quod implicat contradictionem: quæ nequit ullo modo ſanari, niſi fiat vel $x + a = x - (-a) = 0$; vel $-x - a = -x + (-a) = 0$, quæ eodem modo tractatæ, quo ſuperius docuimus ut alternentur ſigna, pertinent ad Syſtemata baſis datæ, in quibus una maxima $= a$, & altera minima $= 0$, vel ad limitem minimum utriuſque variabilis in Syſtemate baſis variabilis. Altera vero hanc tollendi repugnantiam reliqua via eſt, ut ſcilicet fiat $x + a = \infty$, vel $-x - a = \infty = x' + a = \infty$: in quo caſu in limitem maximum utriuſque variabilis Syſtematis baſis variabilis deferimur, in quo utræque variabiles infinitæ prorſus ſunt, ſed ſolitaria major ſemper altera quantitate a.

§. 19. Itaque in baſis datæ Syſtemate maximæ (*fig.* 23.) $x = AB = a$ reſpondet minima $x' = 0BA$, & maximæ $x' = BA = a$ minima $x = 0AB$, ut æquationes limitis ſint

$$(1.^a)\ \begin{Bmatrix} x + 0x' = a \\ x + 0\,BA = AB \end{Bmatrix} : (2.^a)\ \begin{Bmatrix} x' + 0x = a \\ x' + 0AB = BA \end{Bmatrix}$$

In Syſtemate vero baſis variabilis (*fig.* 29.) minimæ $x = AB = a$, reſpondet minima item $BA' = 0BA'$; & minimæ $x' = BA = a$ minima $AB' = 0AB'$; & æquationes limitis

$$\begin{Bmatrix} x = a + 0x' \\ x = AB + 0BA' \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} x' = a + 0x \\ x' = BA + 0AB' \end{Bmatrix} :$$

ex quibus deducuntur

$$(3.^a)\ \begin{Bmatrix} x - 0x' = a \\ x - 0BA' = AB \end{Bmatrix} : (4.^a)\ \begin{Bmatrix} x' - 0x = a \\ x' - 0AB' = BA \end{Bmatrix}$$

Sed quoniam BA' eſt in directione oppoſita BA, & AB' in oppoſita AB, erit $BA' = -BA$; & $AB' = -AB$. Igitur ſi in (3).ª, & (4).ª pro $-BA'$, $-AB'$ ſubſtituantur valores BA, AB; (3).ª fit (1).ª, & (4).ª fit (2).ª: contra vero ſi in

ſi in (1).ª & (2).ª pro BA, AB ſubſtituantur $-BA'$, $-AB'$; (1).ª tranſmutatur in (3).ªᵐ, & (2).ª in (4).ªᵐ. Quare æquationes hujuſmodi limitis tam pertinent ad Syſtema baſis datæ, in quo uni maximæ a reſpondet altera minima $= 0$, quam ad Syſtema baſis variabilis, in quo uni minimæ $= a$ reſpondet altera item minima $= 0$. In caſibus igitur intermediis, qui exhibentur a tertio univerſaliori generationis modo, a nobis §. 4. indicato, in quo duo ſimul puncta (*fig.* 23.) A, & B fluere ſupponuntur, a ſingulis iſtis æquationibus tam Syſtema baſis datæ, quam Syſtema baſis variabilis erui poterit. Nam (1).ª $x + 0BA = AB$ tam dat $x + x' = AB = a$, quam $x - x' = a$, quæ eſt (3).ª, ſi fiat $x + 0BA = x - 0BA'$ (*fig.* 29.) $= x - x'$, & idem dicatur de reliquis. Quare ab unaquaque æquatione limitis deducitur generalis æquatio tam $x + x' = a$, quam $x - x' = a$; ſive tam ſumma variabilium, quam earum differentia eidem quantitati a æqualis: ſumma, quando x minor a, quæ dat Syſtema baſis datæ, in quo creſcente una x, altera minuitur: differentia, quando x major a: tum enim non niſi differentia æquari poteſt a, ideoque pertinet ad Syſtema baſis variabilis, in quo x, x' eadem quantitate ſingulæ creſcunt, vel minuuntur, poſita tamen ſemper conſtanti earum differentia $= a$. Primo igitur modo utamur oportet in caſu, in quo x minor a: ſecundo quando una, aut altera x ponitur major a.

§. 20. Præter vero hujuſmodi limites, dantur alii limites maximi, qui ſunt tantum proprii unius Syſtematis baſis variabilis æquationis $x' + a = x$, in qua poſita x infinita abſoluta, eſt item infinita & altera x', & viceverſa: ac proinde $x' + a = \infty x$, & $x - a = \infty x'$, facta (*fig.* 24.) $AD = x$, $BD = x'$; ac proinde

$$(1)\quad \infty BD + AB = AB + \infty BD = a + x' = \infty x = AD = \infty;$$

$$(2)\quad \infty BD = AD - a = x - a = \infty x' = BD = \infty.$$

Si hanc ultimam æquationem limitis maximi æqualem infinito conferamus cum (1).ª vel (2).ª §. antecedentis, facta prius in illa

$$(1).^a \begin{cases} x - AB = -0BA \\ x - a = -0BA \end{cases}, \text{ \& in } (2).^a \begin{cases} x' - BA = -0AB \\ x' - a = -0AB \end{cases},$$

patet formulam $x - a$ tam pertinere poſſe ad Syſtema baſis variabilis in limite maximo, eſſeque $x - a = \infty$; quam poſſe pertinere ad Syſtema baſis datæ $x - a = -0x'$, æqualem ſcilicet zero negativo, quando x eſt maxima $= a$. Cuinam vero ex iſtis maximis hæc formula reſpondeat non prius ſtatui poteſt, quam ſtatuatur valor minimus ejuſdem x. Si enim ponatur valor minimus x formulæ $x - a$ æqualis a, tunc pertinet formula ad Syſtema baſis variabilis, & maxima $x - a = \infty x'$ eſt infinita, cui reſpondet altera maxima infinita $x' + a = \infty x = \infty$. Si vero ponatur x minima $= 0$, tum ſemper x intra limites 0 minimum, & a maximum conſtituit quantitatem $x - a$ æqualem quantitati negativæ, ſive alteri x' negativæ, & $x - a = -x'$, ex qua eruitur $x + x' = a$ Syſtema baſis datæ, & $-x + a = x'$ poſitivæ: ideoque in

hoc caſu $x - a$ eſt ſemper negativa $= -x'$, & in limite $x - a = -0x'$, ſive zero negativo. Ergo legitima eſt æquatio (*fig. ead.* 24.)

$$\left\{\begin{matrix} x - AB = -0BA = 0BD = \infty BD = x' - BA = -0AB = 0Ad = \infty Ad \\ x - a = -0 = 0 = \infty = x' - a = -0 = 0 = \infty \end{matrix}\right\}$$

& æquatio

$$\left\{\begin{matrix} -x + AB = 0BA = -0BD = -\infty BD = -x' + BA \\ = 0AB = -0Ad = -\infty Ad \\ -x + a = 0 = -0 = -\infty = -x' + a = 0 = -0 = -\infty \end{matrix}\right\}$$

hoc eſt $x - a$ poteſt eſſe æquatio limitis maximi Syſtematis baſis datæ, in quo x maxima $= a = AB$, vel (*fig.* 23.) $= BA$; ac proinde vel $x' = 0BA$, vel $x = 0AB$, & $x - a$ in caſibus intermediis negativa, ſive $x - a = -x'$, vel $x' - a = -x$, & $x + x' = AB = x' + x = BA = a$. Hæc tamen poteſt eſſe æquatio limitis minimi Syſtematis baſis variabilis, in quo (*fig.* 24.) $\begin{matrix} x - a = 0 \\ x - AB = 0BD \end{matrix}$, vel $\begin{matrix} x' - a = 0 \\ x' - BA = 0Ad \end{matrix}$; vel æquatio limitis maximi ejuſdem Syſtematis, in quo $\begin{matrix} x - a = \infty \\ x - AB = \infty BD \end{matrix}$; vel $\begin{matrix} x' - a = \infty \\ x' - BA = \infty Ad \end{matrix}$: ideo quia tam AB, quam BA eidem quantitati poſitivæ a æquatur.

§. 21. Ratio vero, cur in Syſtemate baſis variabilis fluxus BD, (*fig.* 24.) vel Ad a zero uſque ad infinitum procedat, ea eſt, quia progrediens fluxus poſitivus a B verſus D nullum punctum datum in linea indeterminata BD aſſequitur, quod illum determinet (ſupponitur enim BD nullo dato termino verſus D circumſcripta): ideoque fluxus poſitivus, qui in puncto B dato determinatus eſt (hoc eſt zero), ex parte D procedit ad infinitum, atque intra limites zero minimum, infinitum abſolutum maximum continetur. Quod ſi ponamus $0BD = -0BA$, erit $-0BD = 0BA$, ſive $-x + AB = 0BA$: procedens itaque fluxus BA a puncto B poſitive verſus A offendit jam in linea utrimque indefinita BD punctum datum A, a quo determinatur, fitque æqualis BA, atque in hoc caſu $-x + AB = BA = a$, & $-x = 0AB$, ſive $x - 0AB = 0Ad$ poſitivo; & cum ſit $BA = a$ poſitiva, erit etiam x', cui æquatur, poſitiva. Creſcente vero ulterius BA ſupra BA, ut fiat ex. gr. Bd, tunc $Ad = x$ poſitiva (gignitur enim a fluxu poſitivo 0Ad progrediente per poſitivum Ad); & ſeſe offert iterum Syſtema baſis variabilis, cujus æquatio eſt

$$\left\{\begin{matrix} x - a = 0x = x = \infty x \\ x - BA = 0Ad = Ad = \infty Ad \end{matrix}\right\}$$, x ſemper poſitive excurrendo

uſque

uſque ad infinitum ; quoniam & hic in linea A d nullum aliud punctum determinatum occurrit præter punctum A . Quo ratiocinio manifeſte colligitur , in nihilum abeunte fluxu ex. gr. B D in puncto dato B , fluxum , qui ſubſequitur verſus A , poſitive ſumendum eſſe (gignit enim lineam B A , vel ab ipſa gignitur poſitiva), nec ullam cum fluxu B D jam zero facto relationem habere poſſe . Quotieſcumque igitur in quavis linea poſitione data reperitur punctum datum aliquod , vel plura data puncta , puta A , B , abrumpitur in his fluxus antecedentis continuatio ; novuſque fluxus , quacumque ex parte puncti A , vel B excurrere velis , poſitive ſumendus erit , cum nequeat cum priori fluxu jam ſublato , ſive zero facto novus hic fluxus amplius comparari .

§. 22. Inſuper vidimus Cap. IV. quodcumque Syſtema baſis datæ , vel variabilis conſiderari poſſe vel ut Syſtema partiale alterius Syſtematis integri baſis datæ , vel variabilis , quod cum altero ſuo partiali (quod impoſterum etiam *homologum* appellabo , quemadmodum tam utraque Syſtemata , quam radices partiales , quæ ſimul conſtituunt Syſtema integrum , vel radicem maximam hoc nomine deſignabo) totum Syſtema integrum conſtituit : vel quodcumque Syſtema baſis datæ , aut variabilis conſiderari poſſe tamquam ſolitarium & integrum , quod in duo Syſtemata partialia , ſive homologa totum Syſtema integrum complectentia dividi poteſt , & ſic ad infinitum . Itaque radices ſingulæ vel conſiderari poſſunt tamquam portiones alterius integræ radicis ſolitariæ , in quo caſu cum altera homologa radicem integram adæquat , vel ſumi poſſunt ipſæ tamquam integræ & ſolitariæ , quæ in alias duas iterum dividi poſſunt . In Capite vero V. oſtendimus duo hæc Syſtemata partialia , quæ Syſtema integrum baſis datæ , vel baſis variabilis conſtituunt , ut omnia univerſim rite procedant , ita inter ſe eſſe conſocianda , ut ex unione unius partialis Syſtematis baſis variabilis cum altero baſis datæ exſurgat integrum Syſtema baſis datæ : ex unione vero duorum partialium Syſtematum baſis utriuſque variabilis integrum Syſtema baſis variabilis enaſcatur . Atque e converſo eadem ſemper lege dividi debere oſtendimus Syſtema integrum baſis variabilis in duo Syſtemata homologa baſis utriuſque variabilis ; & Syſtema integrum baſis datæ in duo homologa Syſtemata , baſis datæ unum , alterum baſis variabilis .

§. 23. Ad hoc vero totum tanti in Analyſi momenti firmius ac plenius confirmandum , animadvertamus in data ſuperiori æquatione limitis $x = a$ Syſtematis baſis datæ $x + x' = a$, nos ſuperius inveniſſe tam $x =$ A B (*fig.* 23.) $= a$, & $x' = 0$, quam $x' =$ B A $= a$, & $x = 0$. Addantur itaque hujuſmodi radices , ut ſit $x + x' =$ A B + B A : quæ in hoc caſu æquales & identicæ ſunt , & directionibus contrariæ , ac proinde æquantur zero , hoc eſt $x + x' = x - x = a - a = 0$: ut docet *Canon* I. §. 8. hujus Cap. At ſi ponamus A B , B A æquales quidem , ſed non identicas , ſcilicet (*fig.* 30.) A B $=$ A′B $= a$, B A $=$ A′B $= a$, erunt $x + x' =$ A B + A′B $= a + a$, & facta x' minima $= 0$, erit x maxima $=$ A A′ $= 2a$; vel facta x minima $= 0x'$, maxima $=$ A′ A $= 2a$: æquationes limitis Syſtematis integri baſis $2a$, quod conflatur a duobus Syſtematibus homologis A B , A′B , quod eſt $x + x' =$ A B + A′B

 $= a$

$= a + a$, in quo caſu x diverſa æquatur x' diverſæ, ſed una in directione contraria alteri, quæ tamen, donec diverſæ ſunt, ſigno poſitivo afficiuntur (ut idem *Canon* I. docuit). Fiat nunc (ut, propius ad principia methodi Cardanicæ excutienda accedentes, ſymbolos ipſos, quibus univerſim utuntur, adhibeamus) $x + x' = m + n$, ut ſit $m + n = a + a$, in qua æquatione ſi fiat $a + a = 2a$, ſive ponatur $2a$ integra, erit $m + 0n =$ (*fig. ead.* 30.) $AA' = 2a$, ſive m maxima $= 2a$, $n = 0$ minima; vel $0m + n = A'A = 2a$, m minima $= 0$, n maxima $= 2a = A'A$. At diviſa bifariam $2a$, ut ſit $2a$ $a + a$, erit $m + n = a + a$, qua indicatur $m = n = AB = A'B = a$, æquales quidem inter ſe, ſed diverſæ, & directione oppoſitæ. Quod ſi fiat $m + n = a + 0x + a$, ſive accipiatur $BD = x$, vel $Bd = x$, ut ſit vel $BD - BD = x - x = 0$, vel $Bd - Bd = x - x = 0$ (cum ſint identicæ); erit $m + n = a + x + a - x = AB + BD + A'B - BD = AB - Bd + A'B + Bd = AD + A'D = Ad + A'd$: & $m = a + x = AB + BD = AB - Bd$, cum ſit $BD = - Bd$, & $n = a - x = A'B - BD = A'B + Bd$: ſive vel $m = AD$; $n = A'D$, vel $m = Ad$, $n = A'd$; nec $m = n$, niſi $x = BD = - Bd = Bd = - BD = 0$. Cum vero x infinities intra limites 0 & a variare poſſit, hoc eſt vel intra limites $0\,BA'$ & BA', in quo caſu fit x in caſibus mediis $= BD$; vel intra $0BA$ & BA, in quo x media $= Bd$; radices partiales m, n, quarum ſumma radicem maximam AA', vel $A'A = 2a$ æquat, erunt binæ & binæ homologæ ſumendæ numero infinitæ; ſive $m + n = a + x + a - x = a + a = 2m = 2n = m + 0n = 0m + n = AA' = A'A = 2a$: hoc eſt (quando x eſt aliquid $= BD$, vel Bd, minor tamen a) m, n inæquales ea lege ſunt, ut per eam quantitatem, per quam una augetur, vel minuitur, minuatur, vel augeatur altera, earumque proinde ſumma æquetur $2a = AA'$, vel $A'A$. Quod ſi x ſit zero, m æquatur n, quando AA' diviſa bifariam concipiatur in B: atque denique vel m maxima $= AA'$, & n minima $= 0$; vel m minima $= 0$, & n maxima $= A'A$, quando ſcilicet ponatur AA' integra, nullo puncto medio diſtincta. Itaque ex unione Syſtematum *homologorum* baſis datæ $-x + a = n$, & baſis vaſis variabilis $x + a = m$ conflatur Syſtema integrum baſis datæ $2a$ æquationis $m + n = 2a$, quæ in limite eſt $m = 2a = AA'$, $n = 0$, vel $m = 0$, $n = A'A = 2a$; ſive facta $m = x$, & $n = x'$, $x = 2a$, $x' = 2a$.

§. 24. Si vero in æquatione $m + n = a + x + a - x$ fiat x major a; tunc $a - x$ erit negativa, ideoque vere negativa eſt n, ergo vere poſitiva $n = x - a$; ac tunc $m + n = x + a + x - a$, in quo caſu utræque x, quæ debent eſſe inter ſe æquales, non poſſunt eſſe minores a: ideoque Syſtemata homologa utraque baſis variabilis $x + a$, $x - a$ conſtituunt Syſtema integrum baſis variabilis $x + x$. Et ſane poſita (*fig.* 31.) BD majori BA', ſi ſu-

ſi ſumantur x, quæ erant æquales & identicæ, æquales ſed diverſæ; erit (ut docent Canones citati) $x - x = BD + DB = o = BD + Bd = x + x$; & ſumptis a, a, quæ erant diverſæ, identicis, ut ſit $a + a = AB + A'B = AB + BA = A'B + BA' = a - a = o$, erit $m + n = x + x$: in qua æquatione cum x, x ſemper inter ſe æquentur, erit $m = n$, & $a = o$. Verum ſi fiat $m + n = x + a + x - a$; m, n fiunt inæquales, & $m = x + a$, $n = x - a$; vel

$$m = AB + BD = AD,\ n = Bd - AB = Ad:$$

$$m = A'B + Bd = A'd,\ n = BD - BA' = A'D:$$

$$m = x - (-a) = x - BA = Bd - BA = Ad,$$

$$n = x + (-a) = x + AB = AB + BD = AD, \text{ \&c.}$$

ut vidimus Capp. ſuperioribus, quæ infinitæ prorſus intra limites a minimum, & ∞ maximum continentur, ex quibus conflatur Syſtema integrum baſis variabilis $m + n = dB + DB = dD = Dd = m + on = n + om = x = x'$.

§. 25. Nunc a Syſtematibus ſingulis $x + a$, $x - a$ conſideratis ut integris ad ſua homologa partialia invenienda accedamus. Data linea (*fig.* 9.) $AB = a$, vidimus æquationes limitis baſis datæ a eſſe $x = AB = a$, facta $x' = o$; vel $x' = BA = a$, poſita $x = o$: addantur ſimul hujuſmodi limitis maximi æquationes, & dabunt $x + x' = AB + BA$, quæ AB, BA, cum ſint identicæ, dant æquationem, per ea quæ diximus, æqualem zero, ſive $x + x' = x - x = AB - AB = a - a = o$. At ſi propoſita æquatio dividatur per 2, erit $\frac{x + x'}{2} = \frac{AB}{2} + \frac{BA}{2}$, ſcilicet $= AC + BC = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; qua diviſione dimidiæ non ſunt amplius identicæ: non æquatur igitur zero earum ſumma. Æquatio igitur, quæ ante diviſionem æquabatur zero, diviſa per 2 æquatur a. Ergo $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = m + n$: & hoc artificio a Syſtemate integro baſis datæ a ad duo partialia homologa $\frac{a}{2} + x = m$ baſis variabilis, $\frac{a}{2} - x = n$ baſis datæ $\frac{a}{2}$. Quoniam vero $x = a$, ſi pro a ponamus x, erit x limitis $= x + x' = m + n = \frac{m + n}{2} + \frac{m + n}{2} = x + x$; æquales, ſed diverſæ, $= x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2}$: ac proinde Syſtema integrum

tegrum baſis variabilis x, vel x' hoc modo dividitur in duo Syſtemata ſingula baſis variabilis, ſive $x = m = \frac{a}{2} + x$; $x' = n = x - \frac{a}{2}$; quæ inter ſe diſpoſitæ quemadmodum docuimus, erunt ſequentes inter ſe homologæ (*fig.* 12.)

$m = AC + CD = AD$, $n = Cd - CA = Ad$;
vel $m = Ad$, $n = AD$;
vel $m = BD$, $n = Bd$;
vel $m = Bd$, $n = BD$:

quæ hoc ordine ſumendæ ſunt, ut propoſitæ quæſtioni ſatisfaciant.

§. 26. Aliter: Jam ex dictis patet $x + a = x'$, $x - a = x'$ duo Syſtemata integra baſis variabilis conſtituere, in quibus ſingulis x, x' ad infinitum procedere poſſunt, & in prima

x minima $= 0$; x' minima $= a$ in ſecunda
x minima $= a$; x' minima $= 0$; proindeque tam $(x + a)$,

quam $(x - a)$ ſingulæ æquales variabili, ſi excipias caſum, in quo fiunt minimæ. Verum harum variabilium differentia eſt data $= a$; in prima ſcilicet (*fig. ead.* 12.) $x' - x = BA = a$, in ſecunda $x - x' = AB = a$; vel viceverſa. In Syſtemate vero baſis datæ, ex dictis item patet ſummam variabilium æquari AB, vel $BA = a$; differentiam vero variabilium eſſe variabilem, & quidem ea lege, ut per eam quantitatem, per quam creſcit una ex variabilibus, altera decreſcat, ut concilientur ſimul in utroque caſu conditiones eæ, quas neceſſarias docuimus Cap. V. ad legitimam Syſtematum conjunctionem, vel diviſionem obtinendam. Datis igitur formulis $x \pm a = x'$; erit, per ea quæ diximus, $x \pm a = x' = \frac{x' + x'}{2} = x + x = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m + n$; in qua ultima æquatione $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m + n$, erit $m = x + \frac{a}{2}$, $n = x - \frac{a}{2}$: quo facto $x \pm a = x'$ integra dividitur in duas haſce æquationes partiales, ſive homologas, in quibus x, x æquales ſunt inter ſe, ſed diverſæ, & ſingulæ æquales dimidiæ x', proindeque ſumma $m + n$ æqualis $x + x = x'$, ut requirit prima conditio. Differentia vero erit $x + a = x'$, $x' - x = m - n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = BA = a$; in ſecunda $x - x' = n - m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a = AB$, quæ eſt ſecunda conditio. Ergo Syſtema integrum baſis variabilis $x \pm a = x'$ diviſum fuit in duo Syſtemata partialia homologa, quæ conditiones neceſſarias ſervant, in quibus x non poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$, quemadmodum in inte-

gro

gro $x \pm a = x'$, x' vel x non poteſt eſſe minor a. Differentia vero variabilium hujuſce Syſtematis integri baſis variabilis erit $x' - x = x - x' = m - n = n - m = a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = x + x' = m + n$, in qua æquatione ultima x non poteſt eſſe major $\frac{a}{2}$, quemadmodum in Syſtemate $x + x' = a$ neutra x poteſt ſuperare valorem a; ſumma vero $m + n = a$ data, & differentia $m - n = x + x'$ variabilis: quæ æquatio proinde pertinet ad Syſtema baſis datæ. Quare differentia data variabilium Syſtematis baſis variabilis æquatur ſummæ variabilium Syſtematis baſis datæ; & viceverſa ſumma variabilium Syſtematis baſis variabilis, quæ eſt variabilis, æquatur differentiæ variabilium Syſtematis baſis datæ. Quo artificio a Syſtemate baſis variabilis ad alterum baſis datæ Syſtema legitimus fit tranſitus, quando conditione Problematis, vel arbitrio jubemur ab x majori $\frac{a}{2}$ ad minorem $\frac{a}{2}$, vel viceverſa transferri. Nam dato Syſtemate baſis variabilis, in quo x major $\frac{a}{2}$, ſcilicet $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m + n$, ſi velimus x minorem $\frac{a}{2}$, accipiatur differentia $m - n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, quæ eſt ſumma in Syſtemate baſis datæ, & erit $m - n = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = m + n$; ſive $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = m + n$ æquatio Syſtematis baſis datæ, quæ inſervit caſibus, in quibus x intra limites o, & $\frac{a}{2}$ continetur. At dato hoc Syſtemate baſis datæ $m + n = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, ſi velimus $x > \frac{a}{2}$, ſumatur differentia variabilium, ut ſit $m - n = x + x = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m + n$, qua iterum ad Syſtema baſis variabilis transferimur. Hæc omnia mire cum iis, quæ Cap. III. oſtendimus, conveniunt: quæ tamen non erant omittenda, ut variis rationibus, atque artificiis extra omnem dubitationis aleam hæc nova, quæ vulgatas opiniones tantopere percellunt, collocentur.

§. 27. Vidimus etiam §. 8. & ſeqq. hujus Capitis, ſumpto Syſtemate baſis datæ

datæ $x + x' = \frac{a}{2}$, in quo $x = \frac{a}{2} - x'$; $x' = \frac{a}{2} - x$, non poſſe ex horum Syſtematum unione $x + x' = \frac{a}{2} - x' + \frac{a}{2} - x$ legitimum generale Syſtema integrum conflari, niſi ponatur vel $- x' = x$, vel $- x = x'$; ut ſit $x + x' = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = \frac{a}{2} - x' + \frac{a}{2} + x'$ (*fig.* 9.)

$$= AC + CD + BC - CD = AC - Cd + BC + Cd$$
$$= BC + Cd + AC - Cd = BC - CD + AC + CD.$$

Rurſus in Syſtemate baſis variabilis $x = \frac{a}{2} + x'$, & $x' = - \frac{a}{2} + x$, facta conjunctione $x + x' = x' + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2}$, vidimus x', x in ſecundo membro æquales eſſe, ſed diverſas; ſive $x + x' = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = x' + \frac{a}{2} + x' - \frac{a}{2}$, ſcilicet (*fig.* 12.) $= AD + Ad = Bd + BD$. Quare ſi loco $x + x' = \frac{a}{2}$ utamur ſymbolis more Cardanico $m + n = \frac{a}{2}$, erit $m = \frac{a}{2} - n$; $n = \frac{a}{2} - m$: at ſtatim patet unione $m + n = \frac{a}{2} - n + \frac{a}{2} - m$ non poſſe legitimum Syſtema integrum baſis datæ obtineri, niſi ſit vel $n = - m$, aut $m = - n$, ita ut variabiles m, n fiant identicæ ſigno contrario affectæ. Similiter dato Syſtemate baſis variabilis $m = \frac{a}{2} + n$, ex quo $n = - \frac{a}{2} + m$, ſi fiat additio $m + n = n + \frac{a}{2} + m - \frac{a}{2}$; n, m in ſecundo membro debent eſſe æquales, ſed diverſæ. Hoc vero ſequenti modo elegantius obtinetur: ſcilicet in primo caſu $m + n = \frac{a}{2} - n + \frac{a}{2} - m = \frac{a}{2} - \frac{(n + m)}{2} + \frac{a}{2} - \frac{(n + m)}{2}$; ſed $n = - m$, & $m = - n$, ergo $m + n = \frac{a}{2} - \frac{(- m - n)}{2} + \frac{a}{2} - \frac{(n + m)}{2}$, vel $= \frac{a}{2} - \frac{(n + m)}{2} + \frac{a}{2} - \frac{(- m - n)}{2} = \frac{a}{2} + \frac{(m + n)}{2} + \frac{a}{2} - \frac{(n + m)}{2}$

=

$= \frac{a}{2} - \frac{(n+m)}{2} + \frac{a}{2} + \frac{(m+n)}{2} = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, &c: quo artificio oſtenditur $n + m$ non poſſe ſuperare a. Quod ſi in eadem æquatione loco a ponatur $m + n$, & viceverſa; hæc eadem æquatio in ſequentem convertitur $m + n = \frac{(m+n)}{2} + \frac{a}{2} + \frac{(m+n)}{2} - \frac{a}{2}$, quæ dat Syſtema integrum baſis variabilis, in quo $\frac{(m+n)}{2}$ non poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$, quin mutetur æquatio: creſcere tamen poteſt ad infinitum.

§. 28. Variabiles igitur m, n in ſecundum membrum translatæ non eædem eſſe perſeverant, ac erant in primo ſolitariæ. Quare data æquatione $m + n = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, ſi fiat terminorum translatio, ut ſit $- x + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m - n$; $- x + x$ non ſunt amplius æquales & identicæ, ſed $- x + x = x' + x$ diverſæ, & etiam inæquales; & in ſecundo $- m - n = - m + m = n - n$ identicæ, & æquales. Similiter facta terminorum translatione, $- \frac{a}{2} - \frac{a}{2} - x + x = - m - n$, ſive (*fig.* 9.) $- AC - x - BC + x$ erit $= BC - x + AC + x = BC - CD + AC + CD = BD + AD = n + m$: quando in prima erat $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = AC + CD + BC - CD = AD + BD = m + n$. Hac igitur translatione terminorum nihil in tota æquatione immutatum reperies, ſi excipias terminorum permutationem. Similiter in Syſtemate baſis variabilis, (*fig.* 12.) $m + n = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = AC + CD + Cd - AC = AD + Ad$, ſi fiat terminorum ab una ad alteram æquationis partem tranſlatio, erit

$$- x - x = - \frac{m-n}{2} + \frac{a}{2} - \frac{m-n}{2} - \frac{a}{2} = \frac{n+m}{2} + \frac{a}{2} + \frac{n+m}{2} - \frac{a}{2}$$

ſive $- CD - Cd = Cd + CD = BC + Cd + CD - CB = Bd + BD = m + n$: & quæ facta translatione videbantur negativæ, nihil aliud indicant, niſi factam fuiſſe quantitatum permutationem. Quare diligentiſſime attendendum, ne quæ artificiis analyticis tractata, diverſa poſitione & valore fiunt, ac in alia tranſ-

tranſmutantur, eadem omnino vel negativa tantum judicemus: ex dictis enim evidentiſſime eruitur illa a me ſæpius in meis ſcriptis editis inculcata transformatio ope ſigni $=$, quod dicitur *æqualitatis*, quod proinde non ſemper identitatem ſignificat.

§. 29. Sumantur denuo duæ illæ formulæ generales duo generalia Syſtemata integra baſis datæ, ac variabilis a partialibus Syſtematibus conflata complectentes, ſcilicet

I.ª $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = x' + x = m + n = AC + CD + BC - CD$, &c.(*fig.9.*).

II.ª $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = x' + x = m + n = AC + CD + Cd - AC$, &c. (*fig.12.*).

Æquationes partiales I.ª ſunt $m = \frac{a}{2} + x$, $n = \frac{a}{2} - x$: in harum prima ſolitaria x a zero uſque ad infinitum excurrit, & m ab $\frac{a}{2}$ uſque ad infinitum, fitque æquatio $m = \frac{a}{2} + n$; in ſecunda x a zero uſque ad $\frac{a}{2}$, contra vero n ab $\frac{a}{2}$ uſque ad zero progreditur, eſtque $n = \frac{a}{2} - m$, ſive $n + m = \frac{a}{2}$: diſſociantur itaque valores x utriuſque æquationis ſeorſim ſumptæ, ac ſingulæ intra limites ſui generalis Syſtematis coercentur. Æquationes vero partiales II.ª formulæ ſunt $m = x + \frac{a}{2}$, ſive $m = \frac{a}{2} + n$, $n = x - \frac{a}{2}$; ſive $n = m - \frac{a}{2}$: in utraque ſeparatim ſumptæ m, n in ſecundo membro poſſunt eſſe inæquales, m intra limites $\frac{a}{2}$ & infinitum, n vero intra limites zero & infinitum: at ſimul conſociatæ æquantur ſingulæ ſummæ $\frac{m+n}{2}$, nec minores eſſe poſſunt $\frac{a}{2}$. Nunc ſubtrahantur invicem ſingula hæc conſociata partialia Syſtemata, & ex I.ª orietur (*fig. 9.*)

III.ª $\frac{a}{2} + x - \left\{\frac{a}{2} - x\right\} = AC + CD - (BC - CD) = m - n$; vel

IV.ª $-\left\{\frac{a}{2} + x\right\} + \left\{\frac{a}{2} - x\right\} = -(AC + CD) + BC - CD = n - m$:

ex II.ª vero (*fig. 12.*)

V.ª

V.ª $x+\frac{a}{2}-\left\{x-\frac{a}{2}\right\}=AC+CD-(Cd-AC)=m-n$; vel

VI.ª $-\left\{x+\frac{a}{2}\right\}+\left\{x-\frac{a}{2}\right\}=-(AC+CD)+Cd-AC=n-m$.

§. 30. Hiſce peractis operationibus III.ª $\frac{a}{2}+x-\frac{a}{2}+x=x+x=Cd+CD$ $=dD=Dd=m-n$, eſt eadem ac II.ª, dummodo $\frac{a}{2}$ ſit minor CD, vel Cd, ac proinde æquetur II.ª $m+n$. IV.ª vero eſt negativa reſpectu III.ª: at quoniam in (*fig. 9.*) $-CD=Cd$, erit

(IV.ª) $-\left\{\frac{a}{2}+x\right\}+\left\{\frac{a}{2}-x\right\}=-(AC+CD)+BC-CD$ $=-CD-CD=Cd+Cd=dD=Dd=n-m=n+m$ (II.ª).

(V.ª) $x+\frac{a}{2}-\left\{x-\frac{a}{2}\right\}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=2AC=AB=BA$ $=m+n$ (I.ª). (VI.ª) vero eſt negativa reſpectu (V.ª), cum ſit $-\left\{x+\frac{a}{2}\right\}+\left\{x-\frac{a}{2}\right\}=-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}=-AC-AC$ $=-m-n$: ſed abſolute conſiderata & in ſe æquatur $BC+BC=BA$ $=AB=n+m$ (I.ª): in quo caſu negativum prorſus evaneſcit.

§. 31. Hinc legitimæ erunt æquationes ſequentes

(I.ª) $\frac{a}{2}+x+\frac{a}{2}-x=m+n=-m-n=n+m=m-n=n-m$

(II.ª) $x+\frac{a}{2}+x-\frac{a}{2}=m+n=-m-n=n+m=m-n=n-m$:

Hoc eſt ſumma variabilium m, & n (I.ª) æquatur differentiæ variabilium (II.ª), & ſumma variabilium II.ª æquatur differentiæ variabilium (I.ª): $-m-n$ vero æquatur $n+m$, & $m-n$ æquatur $-n+m$, facta variabilium tranſmutatione, ut quæ erat m ſit n, & viceverſa. Et ſane poſita (I.ª), quæ ſupponit x minorem $\frac{a}{2}$, ſi fiat $\frac{a}{2}<x$, valor $\frac{a}{2}-x$ fit revera negativus, ac proinde non æqualis amplius $+n$, ſed $-n$, & $\frac{a}{2}+x+\frac{a}{2}-x$ in hoc ca-

 ſu eſt

ſu eſt ſubtractio, æquaturque $m - n$: hinc ſi ſubtrahatur $-n$ ab m, ſive ſi addatur n cum m, exſurgit (II.ª); quæ erat igitur in (I.ª) additio, creſcente x ſupra $\frac{a}{2}$ eſt ſubtractio: ut itaque ſit additio, ut in primo caſu, n ſumenda eſt poſitiva, ſive $n = x - \frac{a}{2}$, quæ revera eſt poſitiva in caſu x majoris $\frac{a}{2}$; quo facto ad (II.am) formulam deferimur. Idem dicatur de (II.ª) in caſu x minoris $\frac{a}{2}$. Nam data ex. gr. $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = m + n$, erit differentia $\frac{a}{2} + x - \left\{ \frac{a}{2} - x \right\} = m - (n)$: ſed poſita $x > \frac{a}{2}$, eſt $\frac{a}{2} - x$ negativa, ergo n vere negativa $= -n$; ergo $\frac{a}{2} + x - \left\{ \frac{a}{2} - x \right\}$ $= \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} + x = m - (n) = m - (-n) = m + n$; quæ eſt formula (II.ª). Porro cum calculus communis, data ex. gr. $m - \frac{a}{2} = n$ æquatione baſis variabilis, in qua m non poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$, quando ſcilicet $n = 0$, quin æquatio in æquationem baſis datæ convertatur (tunc enim $m - \frac{a}{2} = -n$, & $m + n = \frac{a}{2}$), facta m minori $\frac{a}{2}$, ſemper variabilem n eodem ſigno poſitivo primo ſumpto perpetuo afficiat; calculus communis, non ego, poſitivum æquat negativo, ex quo deſcendit reale æquale imaginario: quod tolli non poteſt, niſi ad ea artificia confugiamus, quæ in Opuſculis meis editis leviter indicavi, & quæ hic & in hoc Opere progrediens, cum de hoc imaginario ex compoſito egero, ordine proferam. Hic enim nova, qua utor, methodo ſine imaginario calculos omnes inſtituere, ac ſubducere in animo eſt.

§. 32. Sumptis iterum formulis (I.ª) $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = x' + x = m + n$

(II.ª) $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = x' + x = m + n$,

$$\left.\begin{aligned} &\text{erit in (I.ª) ſumma } x' + x = m + n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = AC + BC \\ &\text{\& differentia } \quad x' - x = x - x' = m - n = n - m \\ &\qquad = CD + CD = Cd + Cd \end{aligned}\right\} (\textit{fig. 9.})$$

in

in (II.[a]) ſumma $x'+x=m+n=Cd+CD=CD+Cd$
& differentia $x'-x=m-n=n-m=BC+BC$ (*fig.* 12.)
$=AC+AC=BA=AB$

In (I.[a]) ſumma conſtans eſt $=AB=BA$; differentia vero variabilis $=CD+Cd$; ideoque $x'-x$ non poteſt eſſe zero, niſi in caſu, in quo ſit $CD=x=0$, ſive quando $x'=x$, ſive $m=n$: ſed caſus hic unus eſt; in ceteris tantum abeſt ut $x'-x$ (ſive $m-n$) ſit zero, ut æquetur ſummæ variabilium (II.[a]), hoc eſt ſit $m-n$ (I.[a]) $=m+n$ (II.[a]). Poſita vero $CD=0$ in (I.[a]), eſt (II.[a]) $x'+x=m+n$, $=0$, ſive baſis variabilis $dD=0$. Similiter in (II.[a]) $x'-x=m-n$, quæ æquatur $m+n$ (I.[a]), $m-n$ non poteſt eſſe zero, quin AC, vel $BC=\frac{a}{2}$ fiat zero, & baſis data $m+n=\frac{0}{2}+\frac{0}{2}=0$. Quare nec ſumma, nec differentia hujuſmodi Syſtematum partialium $x+\frac{a}{2}=x$, $x-\frac{a}{2}=\mp x$, ex quibus oritur Syſtema integrum vel baſis datæ, vel baſis variabilis, ſi rite conjungantur, atque valores x, qui conveniunt alterutri Syſtemati integro, ſubſtituantur, univerſim zero poteſt æquari; ſi excipias caſum in Syſtemate baſis datæ, in quo $x=0$; in Syſtemate vero baſis variabilis, quando $\frac{a}{2}=0$: in ceteris vero ſumma variabilium unius Syſtematis integri æquatur differentiæ alterius, & viceverſa.

§. 33. In Syſtemate igitur baſis datæ, quando $x=0$, baſis data a integri Syſtematis dividitur bifariam a radicibus m, n Syſtematis integri, quæ proinde æquantur inter ſe valore, non poſitione: eſt enim (*fig.* 9.) $m=AC=\frac{a}{2}=n=BC=\frac{a}{2}$: in Syſtemate vero baſis variabilis, quando $\frac{a}{2}=0$, radices m, n Syſtematis integri æquantur & ipſæ valore, non poſitione dimidiæ baſi variabili; hoc eſt (*fig.* 12.) $m=Cd=n=CD$, vel viceverſa. Facta vero in Syſtemate baſis datæ x maxima, hoc eſt $x=\frac{a}{2}$, erit $\frac{a}{2}+x+\frac{a}{2}-x$ $=$ (*fig.* 9.) $AC+CB+BC-BC=BC+CA+AC-AC$ $=AB+0BC=BA+0AC=m+0n=0m+n$; hoc eſt in hoc caſu uni maximæ $=a=m$ reſpondet altera minima $n=0$. Idem accidit in Syſtemate baſis variabilis, quando ponitur $x=\frac{a}{2}$: eadem enim æqua-

tio

tio limitis exſurgit : ſed hic una variabilis $= \frac{a}{2}$ eſt minima, cui reſpondet altera minima $= 0$; eſt enim hic $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$ $= m + n$, & $x + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a = m$ minima; $\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = n = 0$ item minima. At in hoc Syſtemate baſis variabilis præter m minimam $= \frac{a}{2}$, & n item minimam $= 0$, vel viceverſa, radices poſſunt eſſe maximæ, hoc eſt infinitæ. Quo facto fit $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = \infty + \frac{a}{2} + \infty - \frac{a}{2} =$ $\infty m + \infty n$, hoc eſt radices maximæ ambæ infinitæ, quæ tunc ſolum inter ſe æquantur, quando $\frac{a}{2}$, ſive (*fig.* 12.) $AC = 0$: in ceteris vero caſibus differunt quantitate a, ita ut ſit $\infty m - \infty n = \infty n - \infty m = AC + BC$ $= BC + AC = m + n$, evaneſcente quantitate infinita.

§. 34. Quare erit

(I.ᵃ) $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = m + n$ in Syſtemate baſis datæ $= m - n = n - m$ in Syſtemate baſis variabilis.

(II.ᵃ) $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m + n$ in Syſtemate baſis variabilis $= m - n$ $= n - m$ in Syſtemate baſis datæ.

Itaque in Syſtemate integro (I.ᵃ) baſis datæ conſtituti, in quo x non poteſt excedere valorem $\frac{a}{2}$, ſi arbitrio, & extra legem velimus $x > \frac{a}{2}$, tunc $\frac{a}{2} - x$ fit negativa, proindeque & ipſa n, cui æquatur: atque formula (I.ᵃ) facta $x > \frac{a}{2}$ in ſequentem tranſmutatur,

(III.ᵃ) $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = m + (-n)$ in Syſtemate baſis datæ $= m - (-n) = n - (-m) = m + n$ in Syſtemate baſis variabilis: hoc eſt tranſitus fit hac ſuppoſitione a Syſtemate baſis datæ ad Syſtema baſis variabilis, & quod erat in primo caſu additio, fit ſubtractio, & viceverſa. Igitur licet primum membrum formulæ (I.ᵃ) $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$ ſpecie tenus nullam

muta-

mutationem ſubire videatur, cum omnia in ſymbolis ac ſignis intacta maneant, ac proinde ad idem Syſtema baſis datæ pertinere videatur; pertinet tamen ad Syſtema baſis variabilis; cum in hoc Syſtemate membrum hoc ea facta hypotheſi æquetur ſummæ radicum, differentiæ vero in Syſtemate baſis datæ. Ut vero & ipſum primum membrum in ſymbolis huic hypotheſi accomodetur, animadvertendum eſt variabilem x formulæ (I.ª) neceſſario inter limites $x = 0$ minimum, & $x = \frac{a}{2}$ maximum contineri. Quod ſi velimus contra naturam Syſtematis in hac formula (I.ª) x excedere valorem ſuum maximum $\frac{a}{2}$, tranſeat primum oportet per valorem $x = \frac{a}{2}$ limitis, in quo caſu pro x ſubſtitui poteſt $\frac{a}{2}$, & pro $\frac{a}{2}$ variabilis x. Formula igitur (I.ª) fit in hoc limite maximo $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$: & poſita loco primi, & tertii termini $\frac{a}{2}$ variabili x, æquatio erit $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m - 0n$ in Syſtemate baſis datæ $= m + 0n$ in Syſtemate baſis variabilis in hoc extremo limite communi maximo in Syſtemate baſis datæ, minimo in Syſtemate baſis variabilis. Huc perducti, ſi velimus x majorem $\frac{a}{2}$, accipiatur formula $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m - n$ in Syſtemate baſis datæ $= m + n$ in Syſtemate baſis variabilis. Eadem transformatio variabilium in datas, & conſtantium in variabiles peragenda eſt, ſi in (II.ª) improprie x minor $\frac{a}{2}$ requiratur: fit in hac hypotheſi (II.ª) hæc ſequens,

(IV.ª) $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m - n$ in Syſtemate baſis variabilis $= m + n$ in Syſtemate baſis datæ.

§. 35. Quoniam vero Syſtema integrum baſis datæ in extremo limite maximo coincidit atque commiſcetur cum Syſtemate integro baſis variabilis in extremo limite minimo, erit in hoc extremo communi limite in utroque Syſtemate formula communis ſequens

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = m + 0n = m - 0n = n + 0m = n - 0m$$

$$= \infty m - \infty n = \infty n - \infty m = m + n = n + m = m - n = n$$

$= n - m = m + m = m - m = n + n = n - n$. Hoc eſt poſita primum a in terminis $\frac{a}{2} - \frac{a}{2}$ qui eliduntur æquali zero, & poſitis datis reliquis $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, erit

(1) $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = m + n = n + n$, radices ambæ æquales in Syſtemate integro baſis datæ, A C, B C (*fig. 9.*)

(2) $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a = m + 0n = 0m + n$: hoc eſt in Syſtemate baſis datæ $x =$ A B maxima $= a$ integræ, & $x = 0$B A $= 0a$ minimæ, vel $x =$ B A $= a$ maximæ, & $x = 0$A B $= 0a$ minimæ.

(3) $\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = m - m = n - n$, ſive differentia nulla : hoc eſt nullum Syſtema baſis variabilis, quod æquatur differentiæ radicum Syſtematis baſis datæ.

Quod ſi ponatur a in terminis $\frac{a}{2} - \frac{a}{2}$ eſſe aliquid, ſed fluens x, erit

(4) $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = m + n = n + m =$ A D + B D = A d + B d inæquales in Syſtemate baſis datæ (*fig. 9.*) $= m - n = n - m = \infty m - \infty n = \infty n - \infty m =$ B d — A d = A D — B D $= \infty$ B d — ∞ A d &c. in Syſtemate baſis variabilis (*fig. 12.*)

Quod ſi in ſuperioribus æquationibus pro $\frac{a}{2}$ ponatur x, fit

(1) $x + x = m + m = n + n =$ C d + C D ; ſcilicet in Syſtemate integro baſis variabilis æquales radices a centro C hinc inde ad infinitum progredientes (*fig. 12.*):

(2) $x + x = 2x$ integræ $= m + 0n = 0m + n$; hoc eſt una, aut altera a dato puncto C a parte C d, vel C D per duplum infinitum progrediens, & altera $= 0n$, vel $0m$; ſcilicet una maxima æqualis duplo infinito, altera minima $= 0$:

(3) $x - x = m - m = n - n$; ſive nullum Syſtema integrum baſis datæ, quæ æquatur differentiæ radicum Syſtematis baſis variabilis, quæ hic nulla eſt, ſive punctum C.

(4) $x + x + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = m + n = n + m =$ A d + A D = B d + B D inæquales in Syſtemate baſis variabilis (*fig. 12.*) $= m - n = n - m$ differentiæ radicum in Syſtemate baſis datæ. (*fig. 9.*)

§. 36.

§. 36. Quare diligenter animadvertendum eamdem æquationem $x - \frac{a}{2} = 0$ limitis, eſſe æquationem limitis tam Syſtematis baſis datæ, quam Syſtematis baſis variabilis, ut ſæpius ſupra inculcavimus, & pertinere tam ad generalem æquationem $x + x' = \frac{a}{2}$ baſis datæ, quam ad generalem $x - x' = \frac{a}{2}$, $x' - x = \frac{a}{2}$ baſis variabilis. Uterque igitur caſus hic in limite ipſo eſt diſtinguendus, & prout res fert, alteruter sumendus. Porro ſi communem methodum ſequamur; data $x - \frac{a}{2} = 0$, nullum nobis tutum indicium relinquitur, quo dijudicare poſſimus quandonam $x - \frac{a}{2} = 0$ pertineat ad Syſtema baſis datæ, quando ad Syſtema baſis variabilis. In Analyſi enim communi hæc a me animadverſa, maximi ſane momenti, huc uſque prorſus ignorata fuerunt, atque variabiles eodem ſignatæ ſymbolo, quamcumque mutationem ſubeant tamquam eædem, vel æquales, eamdem, quam in uno caſu ſervabant, relationem ſervare ſemper ſupponuntur, quocumque modo æquatio ipſa artificiis analyticis fuerit in aliam formam mutata. Hinc data $x - \frac{a}{2} = y$, & facta arbitraria ſuppoſitione x minoris $\frac{a}{2}$, offenditur in formulam, quæ dat negativum æquale poſitivo, ex quo oritur imaginarium illud, quo in devia ducti, quo magis progredimur, eo magis difficultatibus inexuperabilibus implicamur. Quæ tamen ex dictis tam in Capitibus ſuperioribus, quam in toto hoc Capite omnia nullo negotio impedimenta tolluntur. Quæ artificia a me tradita qui repudiant, repudient oportet calculum communem, atque falſum omnino fateantur.

§. 37. Ex calculo enim communi ope æquationis $1 = -1$, vel $-1 = 1$ ab ipſo neceſſario ortæ manifeſte eruitur illa a me, & in Opuſculis editis, & in hujus Operis Præfatione §. 15, & ſeqq., & ſæpe in ſuperioribus Capitibus, ac præcipue in §§. 34, & 35. hujus Capitis demonſtrata transformatio. Nam poſita æquatione limitis $x - \frac{a}{2} = 0$, ſi loco x ponatur $\frac{a}{2}$ ipſi æqualis, & loco $\frac{a}{2}$, x; erit $x - \frac{a}{2} = -x + \frac{a}{2} = 0$: ex qua deducitur immediate vel $1 = -1$, vel $-1 = 1$, quæ ſi abſurda eſſet, abſurda eſſet quæcumque quantitatum æqualium pro æqualibus ſubſtitutio. Vera igitur procul dubio eſt, ſed indiget explicatione; quæ ſponte ſua ex dictis profluit. Nam, cum $x - \frac{a}{2} = 0$ tam pertineat ad Syſtema baſis datæ, quam ad Syſtema baſis variabilis, in data æquatione $-x + \frac{a}{2} = x - \frac{a}{2} = 0$ poſita x minori $\frac{a}{2}$, membrum $x - \frac{a}{2}$

 eſt

eſt negativum, at poſitivum $-x+\frac{a}{2}=0$: poſita igitur x intra limites 0, & $\frac{a}{2}$, ſumatur $-x+\frac{a}{2}=x'$, quæ erit poſitiva pertinens ad Syſtema baſis datæ. Poſita vero $x > \frac{a}{2}$, erit primum membrum $-x+\frac{a}{2}=x'$ negativum: at tunc ſumatur æquatio $x-\frac{a}{2}=x'$ pertinens ad Syſtema baſis variabilis; & x intra limites $\frac{a}{2}$ & ∞ erit ſemper poſitiva. Et ſane ex prima eſt $x'+x=\frac{a}{2}$, ex ſecunda $x-x'=\frac{a}{2}$; ergo $x'+x=x-x'$: quæ profecto congruunt cum iis, quæ demonſtravimus §§. 34, & 35. hujus Cap.

§. 38. Ex hiſce omnibus illud tandem maximi momenti univerſim conſequitur, quamcumque ſcilicet æquationem linearem limitis $x=a$, quæ in duo partialia Syſtemata dividi debet, ut inſerviat ſuo utrique Syſtemati integro baſis datæ, ac baſis variabilis, ad quæ ipſa in limite pertinere poteſt (cum poſſit eſſe æquatio limitis Syſtematis integri baſis datæ $x+0x'=a$, vel Syſtematis integri baſis variabilis $x=a+0x'$) dividendam eſſe in duo Syſtemata generalia, quorum unum conflatum ex uno Syſtemate partiali baſis datæ, & ex altero Syſtemate baſis variabilis, ſatisfaciat Syſtemati integro baſis datæ $x+0x=a=x+x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}+x+\frac{a}{2}-x=m+n$, ad quod pertinet æquatio generalis $x+x'=a$ baſis datæ; ſecundum vero conflatum ex utriſque partialibus Syſtematibus baſis variabilis, ut inſerviat æquationi generali Syſtematis integri baſis variabilis $x=a+x'$, ex quo proficiſcitur eadem æquatio limitis $x=a+0x'$, ſcilicet $x=a+x=\frac{a+x}{2}+\frac{a+x}{2}=\frac{a+x}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a+x}{2}-\frac{a}{2}=x+\frac{a}{2}+x-\frac{a}{2}=m+n$: in quo Syſtemate x non poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$, quemadmodum in integro x non poteſt ſuperare valorem a: poteſt tamen ad infinitum progredi. Data igitur $x=a$ limitis dividatur in duo ſequentia Syſtemata generalia

(I.^{um}) $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = m + n$ in Syſtemate baſis datæ $= m - n$ in Syſtemate baſis variabilis;

(II.^{um}) $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m + n$ in Syſtemate baſis variabilis $= m - n$ in Syſtemate baſis datæ;

quæ formulæ inter ſe ita ſunt comparatæ, ut (I.^{a}) inſerviat valori x intra limites zero minimum, & $\frac{a}{2}$ maximum, quæ ſemper inter hoſce limites præbet Syſtema baſis datæ. At x in (I.^{a}), ſuperato valore maximo $\frac{a}{2}$, excipitur a formula (II.^{a}), in qua ipſa x a valore, qui erat maximus in (I.^{a}), nunc in (II.^{a}) minimus $= \frac{a}{2}$, exſpatiari poteſt uſque ad infinitum, mutata aut non mutata conſtanti $\frac{a}{2}$, dummodo $\frac{a}{2}$ numquam valorem ipſius x excedat. A formula igitur (II.^{a}) eruitur Syſtema baſis variabilis, in quo licet $\frac{a}{2}$ valorem quemcumque majorem $\frac{a}{2}$ habere poſſit, cum ſit $\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{0x}{2}$, tamen ut ſuo conſociato Syſtemati (I.^{o}) adhæreat, quod excipiat x, in caſu in quo valor x ſit minor $\frac{a}{2}$, ubi Syſtema (II.^{um}) baſis variabilis deficit; conſtans ſit $= \frac{a}{2}$, ſive æqualis datæ in (I.^{o}) Syſtemate ſit oportet.

§. *39.* Quamobrem facta $x = \frac{b}{2}$, formulæ erunt

(I.^{a}) $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = m + n = m - n$ (II.^{a})

(II.^{a}) $\frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = m + n = m - n$ (I.^{a}).

Si velimus b minorem a, accipiamus formulam (I.^{am}) (*fig. 9.*) in qua $AC = BC = \frac{a}{2}$, & ſumpta CD, vel $Cd = \frac{b}{2}$, erit

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \begin{cases} AC + CD + BC - CD = AD + BD \\ AC - Cd + BC + Cd = Ad + Bd \end{cases} = m + n \text{ (I.}^a\text{)}; \text{ ſive}$$

$$m+n=\left\{\begin{array}{c}AD+BD=AC+BC=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\\ =m+m=m+0n=AB=a\\ Ad+Bd=AC+BC=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\\ =n+n=0m+n=BA=a\end{array}\right\}=m-n\ (\text{II.}^a),$$

ſive æquatio limitis $x=a$, in qua x tam eſt AB, quam BA, quemadmodum eſt a tam AB; quam BA; licet omnia ſigno poſitivo notentur. At poſita b majori a, accipiatur formula (II.ª) (*fig.* 12.); & ſumpta dC data $=\frac{b}{2}$, DC $=\frac{b}{2}$, erit

$$\frac{b}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\left\{\begin{array}{c}dC+CB+DC-CB=dB+DB\\ dC-CA+DC+CA=dA+DA\end{array}\right\}=m+n\ (\text{II.}^a),\text{ſive}$$

$$m+n=\left\{\begin{array}{c}dB+DB=dC+DC=m+m=\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\\ =m+0n=dD=b\\ dA+DA=dC+DC=n+n=\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\\ =0m+n=Dd=b\end{array}\right\}=m-n\ (\text{I.}^a),$$

& æquatio limitis $x=b$.

§. 40. Quod ſi nos in (I.ª) formula conſtituti, quæ neceſſario requirit a majorem b, inconſulto ponamus b majorem a, cum $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$ ſit in hoc caſu negativum, ac conſequenter $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=-n$; erit

$$(\text{I.}^a)\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=m-n\ (\text{I.}^a)=(m+n)\ (\text{II.}^a);$$ qua ſignorum permutatione, + in —, & — in + docemur, nos facta hac hypotheſi male quærere in hoc Syſtemate ſummam radicum $=a$, quæ eſt $=\frac{b}{2}+\frac{b}{2}=b$, & radicum differentiam $=b$, quæ eſt $=a$; proindeque non (I.ª), ſed (II.ª) formulæ hypotheſim hanc jure debere accomodari. Idem dicatur de (II.ª), ſi contra naturam ſuam accipiatur b minor a. In hunc vero errorem loci, ſive formulæ incaute delapſi, ut noſmet recipiamus, atque omnia ad normam redigamus, tranſmutemus in primo membro formulæ (I.ª) oportet

tet $\frac{a}{2}$ in $\frac{b}{2}$, & $\frac{b}{2}$ in $\frac{a}{2}$, ut primum membrum ſit, quod revera eſſe debet,

$\frac{b}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{a}{2}=(m-n)$ (I.ª) $=(m+n)$ (II.ª), & tunc non amplius $m+n=a$, ſed $m-n=a$; & non $m-n=b$, ſed $m+n=b$; ſive in hac hypotheſi $m=a+n$, ſive $x=a+x$; $m+n=b$; ſive $x+x=b$; & in limite $x=a+0x$, $x+0x=b$; quando erat $x+x=a$, & in limite $x+0x=a$; $x=b+x$, & in limite $x=b+0x$. Permutatione igitur tam variabilium §§. 34. & 35, quam conſtantium hoc §. demonſtrata tunc neceſſario utendum eſt, quando in uno, aut altero Syſtemate conſtituti (in quo valores quantitatum intra certos limites, quos prætergredi ſine errore non licet, continentur) eam tamen inter ipſas relationem tribuimus Syſtemati aſſumpto repugnantem, quæ tueri nequit, niſi facta quantitatum permutatione ad legitimum, & hypotheſi factæ congruens Syſtema noſmet vel inſcios transferamus.

§. 41. Hic multum refert, ob ea quæ in Capitibus ſequentibus dicenda ſunt, ulterius animadvertere, quam tandem formam ſubeant formulæ (I.ª) & (II.ª) §§. 31, & 34, in quibus ſi loco m vel n ſubſtituatur æqualis, data per n, vel per m, una tantum variabilis n, vel m continetur. Formula igitur (I.ª) in ſequentes quatuor æquationes diſpertitur

$$\left.\begin{array}{l}(1).^{am}\ x=a=x+0x'=0x+x'=\frac{a}{2}+x+\frac{a}{2}-x\\ =m+n=m+(a-m)=(a-n)+n=AB\\ (2).^{am}\ x=a=-x-0x'=-0x-x'=\frac{a}{2}+x+\frac{a}{2}-x\\ =-n-m=-n+(a-(-n))=a-(-m)+(-m)=BA\end{array}\right\}(fig.9.)$$

$$\left.\begin{array}{l}(3).^{am}\ x=a=x-0x'=0x-x'=\frac{a}{2}+x+\frac{a}{2}-x\\ =m-n=m+(a-m)=(a+n)-n=AB\\ (4).^{am}\ x=a=-0x+x'=-x+0x'=\frac{a}{2}+x+\frac{a}{2}-x\\ =n-m=n+(a-n)=(a+m)-m=BA\end{array}\right\}(fig.12.)$$

In (2).ª ſi loco $-n$ ponatur m, & loco $-m$ ponatur n, ſe ſe offert denuo (1).ª: & viceverſa in (1).ª ſi loco m ponatur $-n$, & loco n ponatur $-m$ hæc (1).ª transformatur in (2).am Confirmatur igitur quicquid & in Cap. III. & principio hujus dixi; in Syſtemate ſcilicet baſis datæ variabiles negativas repræſentare ſuas homologas, ideoque fieri variabilium permutationem. In (3).ª & (4).ª, quæ oriuntur a differentia variabilium Syſtematis baſis variabilis, facta

eadem

eadem ſubſtitutione fit tranſitus (in *fig. ead.* 12.) a variabili A D ad variabilem B D, vel viceverſa in eadem directione: at ſi fiat tranſmutatio m poſitivæ in n poſitivam, vel viceverſa, tunc tranſitus fit a $(3)^{a}$ ad $(4)^{am}$, vel viceverſa; hoc eſt a differentia $m - n = a$ ad differentiam $n - m = a$; & in (*fig. ead.*) ab $AD = m = a + n = AB + BD$ ad $Bd = n = a + m = BA + Ad$; hoc eſt facta hac variabilium tranſmutatione in Syſtemate baſis variabilis a puncto A ad B, & ab A D ad B d in directionem oppoſitam, vel viceverſa tranſlati fuimus, ut §§. 12, 28 hujus, & Cap. III. notavimus.

§. 42. Quoniam vero in ſuperioribus æquationibus, in quibus eadem variabilis reperitur, tam m poteſt eſſe n, quam n poteſt eſſe m; recte eodem ſymbolo x utraque variabilis m vel n repræſentari, & exprimi debet: quo facto quatuor ſuperiores æquationes in duas tantum ſequentes convertuntur;

$$(5)^{am}\ x = a = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = x + x' = x + (a - x)$$

$$(6)^{am}\ x = a = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = x' - x = x + (a - x):$$

ſed $(5)^{a}$ continet ſub ſe $(1)^{am}$ & $(2)^{am}$; $(6)^{a}$ $(3)^{am}$, & $(4)^{am}$ complectitur: nam $x + a - x = a - x + x = -x + (a - (-x)) = (a - (-x)) - x = -x' - x$. Hoc eſt in Syſtemate baſis datæ, poſita pro x' $(-x)$, & pro x $(-x')$, fit hoc modo variabilium permutatio, ita ut ſit tam $x + x' = -x' - x$, quam $-x' - x = x + x'$: quo artificio ſemper licet a negativo ad poſitivum, vel viceverſa tranſitum facere. In $(6)^{a}$ vero, quæ pertinet ad Syſtema baſis variabilis, tam $x = a + x$, ſive $m = a + n$, quam $a - x = -x$, ſive $a - n = -m$, ſeu $a + m = n$, ſive $a + x = x$: & æquationes $(5^{a}.)$; & $(6.^{a})$ complectentes quatuor ſuperiores, erunt

$$(7)^{a}\ x = a = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = x + x' = x + (a - x) = (a - x') + x'$$
$$= -x' + (a - (-x')) = (a - (-x)) - x = -x' - x = -x - x'$$

$$(8)^{a}\ x = a = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = x' - x = x + (a - x)$$
$$= (a + x') - x' = x' + (a - x') = (a + x) - x = x - x'.$$

§. 43. Sumamus nunc formulam $(II)^{am}$ §§. 31, & 34, & facta ut in ſuperiori $(I.^{a})$ alterutrius variabilis ſubſtitutione, in ſequentes æquationes hæc $(II.^{a})$ convertitur (*fig.* 12.)

$$(9)^{a}\ x = 2x = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m + n = (a + n) + n = m + (m - a)$$

$= AD + Ad$: poſita æqu. Syſt. baſ. var. $m = a + n$, ut ſit $m - n = a$.

(10)

(10) $x = 2x = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = n + m = n + (n - a) = (a + m) + m$

$= Bd + BD$: poſita æqu. Syſt. baſ. var. $n = a + m$, ut ſit $n - m = a$.

(11) $x = 2x = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = -n - m = -n + (-a - n) = (a + (-m) - m$

$= -AD - Ad$: poſita $-m = a + (-n)$, & $-m - (-n) = a$.

(12) $x = 2x = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = -n - m = -n + (-n + a) = (-a - m) - m$

$= -Bd - BD$: poſita $-n = a + (-m)$, & $-m - (-n) = a$.

(13) $x = a = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m - n = m + (m - a) = (a - n) - n$

$= dD$ (*fig.* 9.): poſita $m + n = a = AD + BD$; & $m - n = x' + x$.

(14) $x = a = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = n - m = -m - (m - a) = -(a - n) + n$

$= -dD$: poſita $-m + n = -x' - x$.

(15) $x = a = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = n - m = n + (n - a) = (a - m) - m$

$= Dd$: poſita $n + m = BD + AD$; & $n - m = x + x' = Dd$.

Sed oculis ipſis patet ad confirmandam & hic neceſſitatem permutationis variabilium ($-m$) in (n), & ($-n$) in (m), quam ſupra demonſtravimus, & qua §. 41. in formula (I).ª uſi ſumus, æquationem (12).am $-Bd - BD$ $=$ (*fig.* 12.) $-Cd - CD = CD + Cd = AC + CD + Cd - AC$ $= AD + Ad$ converti in (9).am: & eodem modo (1).am in (10).am; eſt enim $-AD = Bd$, & $-Ad = BD$: ac tandem (14).am in (15).am; (quoniam (*fig.* 9.) $-dD = Dd$), vel viceverſa. Ergo quatuor primæ ab una tantum formula una variabili x identica conflata, & tres ultimæ ab una itidem formula, quæ unam, & identicam variabilem x continet, vere complectuntur.

§. 44. Quare formulæ compendio continentes æquationes omnes ſuperioris §. erunt ſequentes

(16) $x = a + x = 2x = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m + n = x + x'$

$= (a + x) + x = x + (a - x)$

(17) $x - 0x = x - x' = x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = m - n = n - m$

$= (-a + x) + x$.

Com-

Complectitur (16).[a] quatuor primas ortas ex additione variabilium Syſtematis baſis variabilis: (17).[a] vero tres ultimas, quæ ex differentia variabilium Syſtematis baſis datæ proficiſcuntur; ſi modo ſigna quantitatibus præfixa, ut §. 43. docet, varientur. Hæ tamen omnes, tam quas §§. 41, & 42, tam quas §§. hoc, & ſuper. eruimus, una hac generali formula poterunt deſignari:

$$\pm x \pm \frac{a}{2} + \left\{ \pm x \mp \frac{a}{2} \right\} = \pm m \pm n = \pm a \pm x \pm x,$$

ſervata ſemper ea ſignorum inter ſe combinatione, quam docuimus.

§. 45. Ex hiſce omnibus quædam maximi momenti Corollaria ſequentibus apprime neceſſaria deducenda ſunt. Ac primum in formulis (1).[a] & (2).[a] §. 41. x ſolitaria in æquatione $x = a$, non poteſt excedere valorem a, in quo caſu altera zero eſt; ſumma enim utriuſque ſemper conſtans eſt, & æqualis a: a vero poſitiva tam deſignat (*fig.* 23.) AB, quam BA integram; ac proinde & ipſa x vel eſt AB, vel BA. At in altera formula $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, x non poteſt excedere valorem $\frac{a}{2}$: æquatio enim ſic diviſa duas variabiles continet, quarum aggregatum a æquatur alterutri x ſolitariæ. Verum ſi in indicata $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, x æquætur zero; tunc vel m, vel n æquatur zero, quando ſcilicet $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ ſumitur integra $= a$; vel m & n fiunt ſingulæ æquales $\frac{a}{2}$. Nam poſita $m = a$, fit $m + n = m + (a - m) = m + (a - a) = m + 0a$ integræ $= a$; vel poſita $m = \frac{a}{2}$, fit $m + n = m + (a - m) = m + \left\{ a - \frac{a}{2} \right\}$ $= m + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$: ergo $m = \frac{a}{2} = n$. Aggregatum quidem variabilium ſemper conſtans eſt $= a$; at differentia variabilis $= x + x'$: quibus docemur ſummam quidem commutari non poſſe, at differentiam ad libitum ſumi poſſe; hac tamen lege, ut ſi ponatur differentia variabilium major ſumma data a, tunc tranſitus fiat a Syſtemate baſis datæ ad Syſtema baſis variabilis: ſive ab æquatione (1).[a] ad (3).[am], vel (4).[am], in qua æquatur a differentia $m - n$ minor ſumma variabilium $m + n = x + x'$, poſita $x + x' > a$: hoc eſt $m + n$ in hoc caſu fit $m - n$ differentia, & differentia $m - n$ fit ſumma $m + n$.

§. 46. Conſequitur deinde ex æquatione (2.[a]) (ex qua videtur deſcendere $- n - m = a$, ſive negativum æquale poſitivo) erui tamen a in (2).[a] hac

æqua-

æquatione eſſe inverſam a æquationis (1.^{a}); ita ut ſi in (1.^{a}) a referebat A B (*fig. ead.* 23.), in (2)^a repræſentet B A, vel viceverſa. Quare ad vitandum negativum in hac (2)^a, vel ponatur $a = BA = -AB$, ut æquatio ſit $-n-m = -n + (-a-(-n)) = -a-(-m) + (-m)$;

ſive $-n-m = -a$, negativum æquale negativo: quo diviſo per -1, invenitur $n+m = a$, poſitivum æquale poſitivo: vel permutetur (ut ſuperius oſtendi) in utroque membro $(-m)$ in (n); & $(-n)$ in (m), & æquatio (2.da) convertitur in $m+n = m+(a-m) = a-n+n$. Eodem modo in (4.^{a}), quæ pertinet ut (3).^{a} ad Syſtema baſis variabilis, ſi loco $a = AB$ (3).^{a} ponatur $a = -AB$; erit

(4).^{a} $n-m = n+(\overline{-a-n}) = (\overline{-a+m})-m$, ſive

$-(-n+m) = -\times(\overline{-n)+(a+n}) = -(\overline{a-m)+m}$; negativum æquale negativo, poſita $m > n$; & facta diviſione per $-$

$-n+m = -n+a+n = a-m+m$, æquatio convertitur in (3.^{am}), in qua poſitivum æquale poſitivo. Vel facta permutatione variabilium m in n, & n in m, ut docui in Syſtemate baſis variabilis, erit $m-n = m+(a-m) = a+n-n$. Itaque quando n major erit m, & $m-n$ quantitas negativa, in quo caſu $m-n = a$, ſive negativum æquale poſitivo, liberum ſemper erit uno, aut altero artificio a me indicato ad negativum æquale negativo, vel ad poſitivum æquale poſitivo noſmet transferri; atque ideo ex ambagibus omnibus, atque difficultatibus, quibus a neceſſaria formula $-1 = 1$ implicamur, facile noſmet expedire, potius quam veritatem illationis neceſſariæ inconſulto, & perperam negare.

§. 47. Eruitur etiam, in formulis (1).^{a} & (2).^{a}) §. 41. $m+n$, & in (3).^{a} & (4).^{a} $m-n$ æquari a datæ: ac proinde mutata ſumma variabilium $m+n$ in Syſtemate baſis datæ, & differentia in Syſtemate baſis variabilis, mutari æquationem: cum revera æquationes ſint $\frac{m+n}{2} + x + \frac{m+n}{2} - x = m+n$;

vel $\frac{m-n}{2} + x + \frac{m-n}{2} - x = m-n$; in quibus licet infinitis modis

immutari poſſint valores m & n; tamen ſumma in Syſtemate baſis datæ, & differentia in Syſtemate baſis variabilis intacta ſemper ſervanda eſt, ut in eodem Syſtemate baſis datæ, vel variabilis perſiſtamus: ſufficit tantum ut differentia $m-n$ in Syſtemate baſis datæ a zero incipiens non excedat datam ſummam: in Syſtemate autem baſis variabilis ſumma, quæ progredi poteſt ad infinitum, non minor ſit data variabilium differentia. Nam in Syſtemate baſis datæ æquatio primitiva Syſtematis eſt $x = a = m+n$; in Syſtemate baſis variabilis $x = a = m-n$: donec igitur in prima ſumma, in ſecunda differentia invariata perma-

manet, intacta manet æquatio, ac conſequenter Syſtema. Hinc deducitur ratio, cur poſita ſumma conſtanti, & differentia variabili, idem baſis datæ Syſtema, contra vero poſita ſumma variabili, & differentia data in Syſtemate baſis variabilis, idem Syſtema perpetuo ſervetur.

§. 48. Juvat etiam animadvertere, in utroque Syſtemate tam ſummam radicum, quam differentiam hinc inde bifariam dividi a puncto medio C (*fig.* 9. & 12.); quo nomine vere centrum appellatur. Nam in Syſtemate baſis datæ eſt ſumma $m+n$ $= \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = AC + BC = AC + CD + BC - CD$; & differentia $m - n$, vel $n - m = CD + CD = dD = -CD - CD = Cd + Cd = Dd$, hinc inde media a puncto C. Item in Syſtemate baſis variabilis $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = AD + Ad = AC + CD + Cd - AC = Bd + BD = BC + Cd + CD - BC$; & differentia $m - n$ $= AC + AC = BC + BC = AB = BA$.

§. 49. Inſuper quoniam æquatio limitis $x = a$ reſolvitur in æquationes §§. 41, & 43, ad determinandas radices ſingulas, præter ſummam datam $m+n$ $= a$, vel differentiam $m - n$, innoteſcat oportet valor x tam in formula $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, quam in $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2}$: quo facto vere determinata dici poterit æquatio, ac quælibet ejus radix: niſi tamen diviſa iterum $\frac{a}{2}$ in plures partes, & ipſam æquationem datam $x = a$ in plura quam duo Syſtemata dividamus, ut docui Cap. IV. Facta itaque $x = \frac{b}{2}$, antequam valor $x = \frac{b}{2}$ datus formulis indicatis applicetur, videndum utrum ſit minor, vel major $\frac{a}{2}$. Nam $\frac{b}{2}$ donec intra limites zero, & $\frac{a}{2}$ continetur, ſi applicetur formulis (1)[a], & (2)[dæ] erit

$$\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = m + n = -m - n = n + m,$$ quæ dant radices

$$\left.\begin{array}{l} m = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}, \& \ n = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \\ \text{vel } n = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}, \& \ m = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \end{array}\right\}; \text{ \& ſumma } m + n = a = AB = BA \ (\textit{fig.} 9.)$$

dif-

differentia vero $m - n = b = dD = Dd$. Quod ſi applicetur $\frac{b}{2}$ intra hoſce limites formulæ (3^a) & ($4.^a$); erit $m - n = a = AB = BA$, & $m + n = b$; & æquatio $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = m - n$: & $m = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, $- n = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$; ſed b minor a, ergo $- n$, quæ in proprio Syſtemate, in quo $b > a$ eſt revera negativa, hîc, licet ſigno negativo affecta, æquatur quantitati poſitivæ, atque $m - n = m + (- n)$ revera eſt ſumma: ſignificat enim n, quæ in proprio Syſtemate baſis variabilis (*fig.* 12.) erat BD, ſumendam eſſe in *figura* 9. negativam $=$ BD; atque adeo $m + n$ in *figura* 9. $= AD + (- n) = AD + (- BD)$, ſumpta BD in *figura* 12. $= AD + BD = m + n$ in eadem (*fig.* 9.). Similiter ſi b major a applicetur formulis ($9.^a$) & ($10.^a$) §. 43; erit $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = m + n$; & $m = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$, $n = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$, & m, n poſitivæ quantitatibus poſitivis æquales: at ſi applicetur æquationi ($13.^a$), erit $x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = m - n$; & $m = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$, $- n = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$, quæ ultima dat negativum æquale poſitivo, niſi intelligatur eo modo, quo de altera explicavi; hoc eſt ſumenda erit in hac hypotheſi plaga poſitivorum n in ſenſu ei contrario, in quo in ſuo proprio Syſtemate ſumpta fuit: b enim major a non pertinet ad Syſtema baſis datæ, in quo male ſumpta fuit, ſed ad Syſtema baſis variabilis. Poſita vero $\frac{b}{2} > \frac{a}{2}$, revera $- n = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ eſt negativa: & $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = m - n$, ſive $m - n = a$, & $m = a + n$, & æquatio limitis primitiva m ſive $x = a$ pertinet ad Syſtema baſis variabilis, & $m + n = b$ ad Syſtema baſis datæ. Itaque in prima ſuppoſitione æquationes $m + n = a$, & $m - n = b$; in ſecunda $m - n = a$, & $m + n = b$. Nam cum differentia debeat eſſe major ſumma, quando b eſt minor a, a eſt ſumma $= m + n$, b differentia $= m - n$: contra vero ſi b major a, b debet eſſe ſumma $= m + n$, a differentia $= m - n = n - m$.

§. 50. Inſuper quoniam æquatio limitis $x = a$ ideo, ut diximus, pertinere poteſt ad Syſtema baſis datæ, vel baſis variabilis, quia x univerſim tam poteſt eſſe differentia duarum partium ipſius a quocumque modo puncto medio diviſæ, orta a formula generali $x = m = a - n$, ſive $m + n = a$; quam eſſe aggregatum duarum quantitatum, quarum prima ſit ipſa integra data a, altera variabilis quæcumque facta in limite zero vel infinita, utpote profecta a formula generali $x = a + 0n = a + n = a + \infty n$; ideo in utroque hoc caſu univerſim æquatio ipſa duabus variabilibus conſtat. Quare ut valorem ſingularum obtineamus, data earum ſumma, ipſarum differentiam quærere oportet; & viceverſa data earum differentia invenienda eſt ipſarum ſumma. Porro cum in Syſtemate baſis datæ innoteſcat ſumma variabilium ex ipſa limitis æquatione $x = m + n = a$; in hoc Syſtemate quærenda eſt calculo differentia: at in Syſtemate baſis variabilis cum æquatio limitis oriatur ab $x = m - n = a$; data eſt differentia, ideoque invenienda eſt ſumma, ut ſingulas variabiles in utroque Syſtemate obtineamus. Hinc formulæ (1).ª, & (2).ª §. 41, quæ pertinent ad Syſtema baſis datæ, ſupponunt datam ſummam $m + n = a$: quærenda ergo eſt differentia, quæ debet eſſe minor ipſa a: at formulæ (3).ª & (4).ª ſupponunt datam differentiam $m - n = n - m = a$; invenienda igitur eſt ſumma: & hujuſmodi differentia minor ſit oportet ipſa ſumma. Ergo in formulis (1.ª) & (2).ª b debet eſſe minor a; b enim æquatur differentiæ variabilium; in formulis vero (3).ª, & (4).ª b repræſentat ſummam; ergo debet eſſe major differentia $= a$. Similiter in formulis primis quatuor §. 43. $m + n$ repræſentat ſummam $\frac{b}{2} + \frac{b}{2}$, poſita $x + x = b$, ergo b major debet eſſe a differentia; at in formulis ultimis $\frac{b}{2} + \frac{b}{2} = m - n$, ſive b differentiam ſignificat; ergo b debet eſſe minor a. Verum in Syſtemate baſis datæ differentia, in Syſtemate baſis variabilis ſumma infinitis modis variari poteſt: ſufficit enim ut utraque intra ſtatutos limites contineatur: ergo in utroque Syſtemate infinita radicum paria æquationi propoſitæ ſatisfacere poſſunt.

§. 51. Quod ſi contra naturam Syſtematis extra limites conſtitutos in formulis ex. gr. (1)ª, & (2)ª ponamus x majorem $\frac{a}{2}$, ſive $\frac{b}{2} > \frac{a}{2}$; erit æquatio $\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = m + n$, & inveniemus $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ negativum æquale $+ n$ poſitivo, quia ponimus conditionem Syſtemati aſſumpto repugnantem; quod enim ſupponimus differentiam, non poteſt eſſe majus ſumma. Quare vere & proprie hac falſa ſuppoſitione ad æquationem (3.ªᵐ) & (4.ªᵐ), ab ipſa æquatione $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} = n$, ſive $1 = -1$ veluti manuducimur; qua docemur

hac

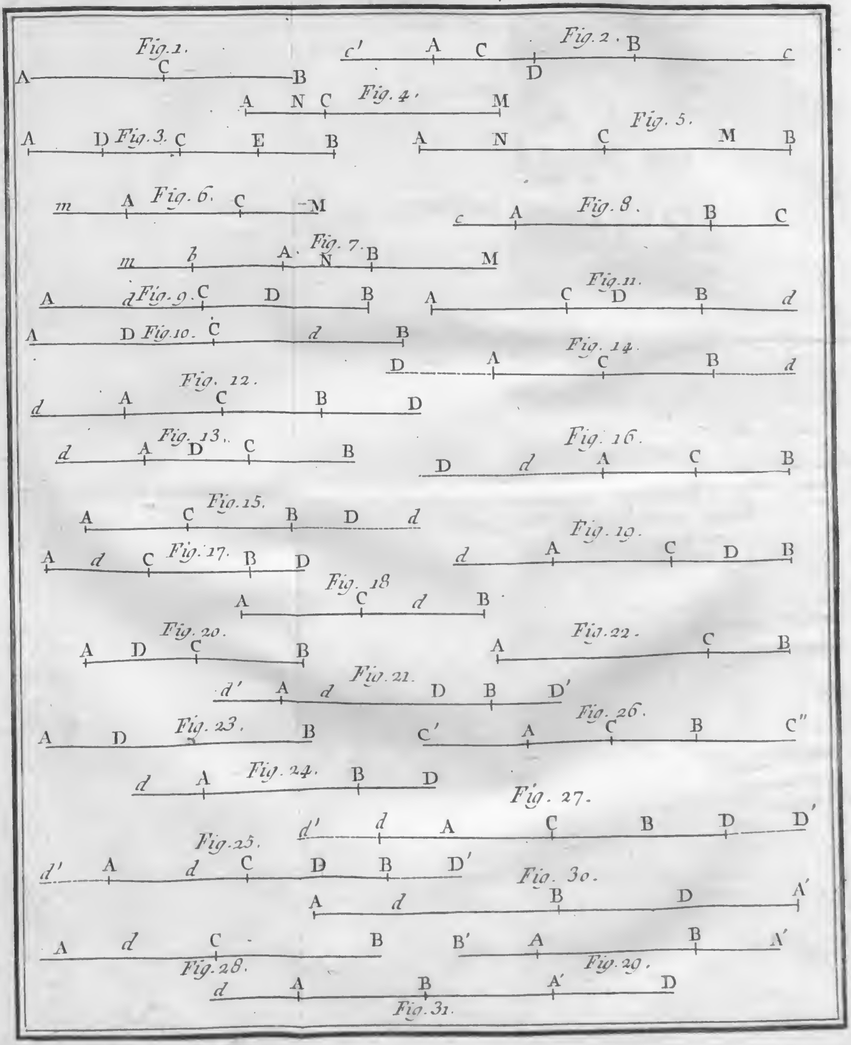
hac ſuppoſitione a non æquari ſummæ $m + n$, ſed differentiæ $m - n$, eſſeque revera $n = - n$, hoc eſt variabilem n in Syſtemate baſis datæ poſitivam, accipiendam eſſe negativam in hoc Syſtemate, quæ tamen ſi ad alterum Syſtema huic reſpondens referatur, fit, & ſumenda eſt poſitiva. Hac igitur permutatione $- n$ in n, a negativo ad poſitivum, & viceverſa, ab improprio Syſtemate ad proprium huic hypotheſi delati fuimus; & ab æquatione impropria $m + n = a$ Syſtematis baſis datæ ad propriam $m = a + n = x = b$ baſis variabilis, & a ſumma ad differentiam $m - n = a$.

§. 52. Quamobrem (ut præcipuum hujuſce Capitis ſolutionem æquationum linearium docentis finem, & fructum paucis colligamus) ſtatuendum eſt impoſterum, æquationem quamcumque linearem, in qua una tantum variabilis reperitur, non eſſe ita determinatam, ut una tantum radice neceſſario conſtet, neque poſſe nomine æquationis *determinatæ* (ut vulgo male fit) recte appellari. Hoc tamen hactenus a calculo communi ignoratum fuit, qui omnium Analyſtarum conſenſu non niſi unam, atque ſemper eamdem radicem æquationibus hujuſce generis perpetuo tribuerit. Patet enim ex Capitibus ſuperioribus, & ex formulis §§. 41. & 43. hujus, quamcumque æquationem linearem, ſive primi gradus $x = a$ primum conſtare duabus radicibus, una maxima $x = a$, & altera minima $x' = 0$; vel $x' = a$ maxima, altera minima $x = 0$: ac proinde tam eſſe (*fig.* 23.) AB, quam BA $= a$, utramque ſigno poſitivo affectam. Æquatio vero hæc ita conſiderata eſt æquatio limitis Syſtematis baſis datæ $m + n = a$: poteſt tamen hæc ipſa æquatio limitis $x = a$ eſſe æquatio limitis Syſtematis baſis variabilis $x = a + x'$, ſive $m = a + n$, $n = a + m$, in quibus (*fig.* 24.) $m = a + n = AB + BD$, vel $n = BA + Ad = a + m$. Verum in hoc Syſtemate præter radices limitis $x = a$, $x' = 0$; vel $x = 0$, $x' = a$, communes cum illis limitis Syſtematis baſis datæ, quæ tamen hîc ſunt utræquæ limitis minimi; ipſa æquatio $x = a$ alias duas limitis maximi, ſive infinitas radices, tantum proprias Syſtematis baſis variabilis, obtinet, ſcilicet $x = \infty$, ex qua $x' = a + \infty$, ſive $x' = \infty$, & $x = a + \infty$: quæ tamen ſemper differunt inter ſe data quantitate a, nec fiunt æquales niſi ſit $a = 0$.

§. 53. Vidimus inſuper §. 35. præter haſce ſupra memoratas radices limitis, eamdem $x = a$ poſſe conſtare duabus radicibus æqualibus, diviſa bifariam a, in quo caſu differentia eſt nulla. Ac tandem §§. præcipue 35, 41, & 43. hujus Capitis demonſtratur, hanc conſtare etiam poſſe infinitis radicibus inæqualibus, binis & binis ſumptis, ea lege, ut vel earum ſumma in Syſtemate baſis datæ, vel earum differentia in Syſtemate baſis variabilis conſtans ſit & data $= a$: atque ideo in primo baſis datæ Syſtemate differentia variabilium & ipſa variabilis intra tamen limites a nobis ſtatutos, in Syſtemate baſis variabilis ſumma intra limites datum, & infinitum continetur. Variabiles porro originem, poſitionem, & naturam mutare poſſe quæ dicta ſunt, & præcipue iidem §§. 41, & 43. ſatis declarant, licet eodem ſymbolo notentur: cum eadem $x = a$ tot tranſmutationes ſubire poſſit, quot diverſas æquationes exhibet ſola æqualium ſubſtitutio. Illud tantum caute præcavendum, ne ſimul uniantur inter ſe radices illæ,

quæ

quæ minime inter ſe conveniunt: ex hac enim illegitima aſſociatione error ſequitur, licet utraque abſtracte ſumpta legitima ſumatur: hinc quæ recte ſociantur, *homologas* appellavi. Quo vero modo hujuſmodi partiales radices in æquationibus linearibus binæ & binæ legitime uniantur Caput V. *De legitima Syſtematum conjunctione* nos docuit. Novum eſt igitur, ſed non abſurdum (ut quidam gannit) æquationes cujuſcumque gradus præter tot numero radices, quot unitates continentur in exponente termini maximi variabilis, poſſe conſtare infinitis aliis, dummodo ſervato numero eæ ſimul copulentur, quæ legitimo, & neceſſario vinculo inter ſe conſociantur. Quod quam cum veritate conſentiat, & quantum inde utilitatis in totam Analyſim redundet, præter jam dicta, ex ſequentibus palam fiet. Ac denique præter ea, quæ ſuperius diximus, luce clarius patuit §§. 31, & 40. æquationem $1 = -1$, vel $-1 = 1$ neceſſario oriri a Calculo communi, (a quo ſolum imaginarii notionem, obſcuram licet, deduximus) cujus propterea multum intererit eam æquationem tueri mordicus atque defendere: ejus tamen origo, neceſſitas, veritas, atque artificia, ut ipſa æquatio vitetur, non niſi a meis jam traditis principiis, ac præcipue §§. 41, & 46. explicari poſſunt.


Fig. 1.
A C B
Fig. 2.
c′ A C D B c
Fig. 4.
A N C M
Fig. 3.
A D C E B
Fig. 5.
A N C M B
Fig. 6.
m A C M
Fig. 8.
c A B C
Fig. 7.
m b A N B M
Fig. 9.
A d C D B
Fig. 11.
A C D B d
Fig. 10.
A D C d B
Fig. 14.
D A C B d
Fig. 12.
d A C B D
Fig. 13.
d A D C B
Fig. 16.
D d A C B
Fig. 15.
A C B D d
Fig. 19.
d A C D B
Fig. 17.
A d C B D
Fig. 18
A C d B
Fig. 20.
A D C B
Fig. 22.
A C B
Fig. 21.
d′ A d D B D′
Fig. 23.
A D B
Fig. 26.
C′ A C B C″
Fig. 24.
d A B D
Fig. 27.
d′ d A C B D D′
Fig. 25.
d′ A d C D B D′
Fig. 30.
A d B D A′
A d C B
Fig. 28.
B′ A B A′
Fig. 29.
d A B A′ D
Fig. 31.

LIBER SECUNDUS.

CAPUT I.

De æquationibus ſecundæ dimenſionis ortis a producto duarum variabilium Syſtematis linearis baſis datæ; deque earumdem limitibus rectilineis.

§. I. POſtquam in ſolutione æquationum linearium anteacto Capite concinnanda, primum ejus Methodi, quam mente concipio, novarum quidem rerum ex ſuccreſcentibus jam in primo Libro jactis ſeminibus fructum collegimus; res ipſa, qua de agimus, flagitat, ut in æquationes ſecundi gradus horum ſubſidiorum ope diligentius inquiramus. Spero enim futurum, ut quæ ex hac æquationum ſecundi gradus accurata inquiſitione mirabiles quidem, & ignoratæ hactenus conſecutiones deſcendunt, æquationes tertii, ac ulterioris gradus vix ac ne vix quidem cognitas pleniore luce perfundant; & manifeſte oſtendant, quæ in hac ſolutione ignorantur adhuc, & quæ obſcure nimis, aut non recte deducta omnium ſuffragiis ſancita fuerunt, in cauſſa fuiſſe, cur maximum ac præcipuum, vel potius unum in tota Analyſi de ſolutione æquationum negotium tam male huc uſque procederet. Ut vero ordine, & clare id fiat, definiendum primum quid ſit æquatio ſecundi gradus, & quid exhibeat ejus ſolutio. Æquatio igitur ſecundi gradus, meo quidem judicio, nihil aliud eſt, niſi productum duarum quantitatum linearium ex datis, & fluentibus conſtantium, quæ in ſe ductæ ſuperficiem aliquam geometricam repræſentant: ideoque in hac æquatione terminus unus, qui ſit ipſarum fluentium productum reperiatur oportet, a quo producto ipſa & denominationem ſumit, & docemur non niſi a producto duarum quantitatum linearium eam conflatam fuiſſe, geometricamque referre ſuperficiem. Quando igitur æquationis vere ſecundi gradus ſolutio quæritur, quæruntur duæ inter ſe diſtinctæ variabiles lineares, ex datis & fluentibus linearibus compoſitæ, quæ in ſe ductæ æquationem propoſitam reſtituant; ideoque ſunt elemen-

menta (quæ *radices* vulgo dicuntur), ex quorum compoſitione oritur æquatio : quibus inventis valores noti reperiuntur, ex quorum ſubſtitutione loco fluentium æquatio ipſa evaneſcit.

§. 2. Porro ſi fieri poſſet, ut plures, aut pauciores radices idem productum ſpecie tenus analyticis ſymbolis expreſſum diverſas dimenſiones geometricas exhibeant, vel ut productum ipſum artificiis opportunis, & legitima ſubſtitutione in aliam formam mutatum, duas diverſas ac in prima forma radices requirat; quis non videt æquationem ipſam & gradum, ſive naturam mutare, & plura radicum paria ſolutioni unius æquationis, quam vocant *ſecundi gradus*, facere ſatis poſſe? Quod vero & iiſdem expreſſa ſymbolis formula analytica pluribus, aut paucioribus radicibus in ſe ductis conſtare poſſit, Cap. II. Lib. I., & §. 1. Cap. antecedentis innuimus, atque ſuo loco oſtendemus : æquationem autem ipſam ſecundi gradus in alias mutatam formas, modo duas radices æquales & identicas, modo æquales tantum, ſed non identicas, ambas inæquales modo, & quidem infinitis modis neceſſario requirere, ſeqq. Capp. demonſtrabo. Ergo & affectionem geometricam, atque naturam, eadem ſpecie manente forma, mutari, & æquationes ſecundi gradus (de quibus tantum hîc ſermo inſtituendus eſt) in plura radicum paria reſolvi poſſe non abſurdum erit aſſerere. Itaque quemadmodum æquationes, quæ vulgo *primi gradus* dicuntur, Capite ſuperiori *lineares* vocavimus; ita hîc æquationes, quæ paſſim *ſecundi gradus* vocantur, *æquationes ad ſuperficiem*, *vel ſecundæ dimenſionis* appellabimus; ne veteri denominatione ſervata, quæcumque æquatio, in qua maximus variabilium terminus duarum variabilium linearium productum præſeferre videtur, ſemper (ut ſemper vulgo fit) ſecundi gradus æquatio ſtatuatur.

§. 3. Hiſce in anteceſſum animadverſis, ſumamus nunc formulas lineares §. 41, & 43. Capitis VII. Libri ſuperioris, atque invicem multiplicemus radices uniuſcujuſque formulæ reſpective homologas, in quas diviſimus datam a æquationis Syſtematis baſis datæ $m + n = a$; vel $m - n = a$ Syſtematis baſis variabilis. Ex (1).ª lineari eruitur ſuperficialis

$$(\text{I.}^a)\ x.o = x.ox' = ox.x' = a.-ox' = a.-ox = \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - xx$$

$= mn = ma - mm = na - nn$: ex (2).ª oritur

$$(\text{II.}^a)\ x.o = -x.-ox' = -ox.-x' = a.ox' = a.ox = \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - xx$$

$= (-m)(-n) = -na - nn = -ma - mm$; quæ eadem fit ac (I.ª), poſito, ut diximus, (n) pro $(-m)$, & (m) pro $(-n)$: a (3.ª) vero exſurgit

$$(\text{III.}^a)\ x.o = x.-ox' = -ox.x' = a.ox' = a.ox = \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - xx$$

$= (+m)(-n) = ma - mm = -na - nn$: & a (4.ª) gignitur

(IV.ª)

$$(\text{IV.}^a)\ x.ox = -ox'.x = -ox.x' = a.ox = a.ox' = \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - xx$$

$= -m.n = na - nn = -ma - mm$; quæ eſt eadem ac (III.ª), mutata m in n, ut illic obſervavimus. Hæ ſunt æquationes omnes *ſecundæ dimenſionis*, ſive *ad ſuperficiem*, quæ gignuntur a producto duarum variabilium æquationis $m + n = a$ Syſtematis baſis datæ.

§. 4. Quæ vero oriuntur a producto duarum radicum, in quas dividitur Syſtema baſis variabilis $m - n = a$, ſunt ſequentes: (9.ª) ſcilicet §. ejuſdem 43. Cap. VII. Lib. I. dabit

$$(\text{V.})^{am}\ x.o = x'.ox = x.ox' = xx = x^2 - \frac{a^2}{4} = mn = an + nn$$

$= -am + mm$, in quam convertitur & (10).ª, poſitis n pro m, & m pro n; & (11.ª), ac (12.ª), poſitis $+m$, $+n$ pro $-m$, $-n$. Tres vero ultimæ dabunt

$$(\text{VI})^{am}\ x.o = x.-ox' = ox.-x' = a.ox' = a.ox = x^2 = x^2 - \frac{a^2}{4}$$

$= -m.n = -am + mm = -an + nn$: in quibus omnibus diligenter excutiendis eſt immorandum.

§. 5. Ac primum notum eſt Analyſtas ad unum omnes æquationes ſecundi gradus omnes in duas ſequentes claſſes diſtribuere: prima eſt earum, quas vocant puras, ſive incompletas, in quibus non niſi quadratum variabilis reperitur, ut puta $x^2 \pm bc = o$, vel $bc = \pm xx$; ſecunda continet illas, in quibus præter quadraticam poteſtatem incognitæ, invenitur etiam terminus cum dimenſione prima ejuſdem incognitæ, atque ideo dicuntur completæ vel affectæ: quas omnes æquatio generalis complectitur $x^2 \pm ax \pm bc = o$; ſive $bc = \pm ax \pm x^2$. Verum ſi formulæ hujuſmodi generales cum antecedentibus a me deductis multiplicatione radicum homologarum linearium conferamus, patebit communes cohærere penitus cum illis meis

$(\text{I.}^a)\ \frac{a^2}{4} - x^2 = mn = am - mm = an - nn$: $(\text{II.}^a)\ \frac{a^2}{4} - x^2 = -mn$ $= -an - nn = -am - mm$; (III.ª), & $(\text{IV.}^a)\ \frac{a^2}{4} - x^2 = -mn$ $= an - nn = -am - mm$; ac denique $(\text{V.}^a)\ x^2 - \frac{a^2}{4} = mn = an + nn$ $= -am + mm$; $(\text{VI.}^a)\ x^2 - \frac{a^2}{4} = -mn = -am + mm = -an + nn$;

poſitis bc pro mn, & x pro m, n. Quare æquationes ſecundi gradus, quæ uſitata methodo inveniuntur, omnes in noſtris formulis continentur.

§. 6. Sed radices ſingulæ lineares homologæ, ex quarum multiplicatione æquationes §§. 3, & 4. eruimus, non ſunt niſi variabiles ad Syſtemata baſis datæ, vel baſis variabilis pertinentes, in quorum primo eſt ſumma variabilium $m + n = a$; differentia in ſecundo $m - n = a$: ergo radices omnes æquationum ſecundi gradus ſunt variabiles illæ, quarum ſumma, vel differentia Syſtema baſis datæ, vel variabilis conſtituit. Quare illud non levioris momenti novum, quod ſciam, eruitur; æquationes ſcilicet omnes ſecundi gradus a ſolutione duorum ſequentium Problematum in origine pendere: quorum primum *data ſumma*, ſecundum *data differentia duarum variabilium* quærit ſingularum valores notos. Nemo tamen ignorat utrumque hoc Problema ſolitarium eſſe natura ſua indeterminatum, nec prius determinari poſſe, niſi ſimul inter ſe conjungantur. Quam vero determinationem æquationes ſecundi gradus accipiant ab homogeneo, ut dicitur, comparationis dato, inferius docebo. Hîc ajo æquationes omnes ſecundi gradus, quas ſupra §. 5. hujus Capitis deſcripſimus, quæque a formulis generalibus communis Methodi comprehenduntur, non eſſe niſi producta duarum variabilium Syſtematis linearis baſis datæ, vel baſis variabilis: ideoque variabiles in iſtis æquationibus contentæ intra eos limites, quos ſupra requirere oſtendimus unumquodque Syſtema, contineantur oportet.

§. 7. Itaque (I.ª), & (II.ª) formula §. 5. hujus Capitis oritur a producto variabilium Syſtematis linearis baſis datæ, quarum variabilium ſumma $m + n = a$, & earumdem differentia $m - n = x + x$, ſive & ipſa variabilis; & productum $mn = m.\overline{a - m} =$ &c. At (III.ª), & (IV.ª) oritur a producto variabilium Syſtematis baſis variabilis, in quo differentia $m - n = a$; vel $n - m = a$ data, in quibus n, vel m ſunt negativæ reſpectu illarum baſis datæ, quippe quæ a Syſtemate baſis variabilis deductæ fuerunt, in quo e converſo differentia eſt data, & ſumma variabilis $m + n = x + x$: ſunt vero negativæ, quia e Syſtemate improprio baſis datæ erutæ fuerunt. (V.ª) eadem ac (III.ª) vel (IV.ª) Syſtematis baſis variabilis, ſed poſitive, ſive in proprio Syſtemate ſumpta. (VI.ª) tandem eſt eadem ac (I).ª Syſtematis baſis datæ, ſed negativa, quia e Syſtemate baſis variabilis non ſuo deſumpta fuit. Omnes tamen hujuſmodi æquationes, quæ communes complectuntur, ut rite & ordine ad examen revocentur, in quatuor ſequentes claſſes diſtribuo:

$$(1.^{am})\ \frac{a^2}{4} - x^2 = mn = am - mm = an - nn:$$

$$(2.^{am})\ \frac{a^2}{4} - x^2 = -am - mm = -an - nn:$$

$$(3.^{am})\ x^2 - \frac{a^2}{4} = mn = -am + mm = an + nn:$$

$$(4.^{am})\ x^2 - \frac{a^2}{4} = am + mm = -gn + nn.$$

Pri-

Primæ duæ pertinent ad Syſtema lineare baſis datæ, ad Syſtema lineare baſis variabilis poſteriores.

§. 8. Verum (1).ª $mn = am - mm = an - nn$ oritur ab æquatione lineari $m + n = a$, in qua ambæ m, n homologæ radices poſitivæ ſunt, atque a duobus punctis (*Tab. V. fig.* 1.) A, & B profectæ ſibi obviam occurrunt. Facta igitur $AD = m$, $BD = n$, erit earum productum mn, in quo ſi loco n ponatur $a - m$, ſive $BA - AD = BD$, oritur æquatio $AD.BD = mn = am - mm$: at ſi loco m ponatur $a - n = AB - BD = AD$, erit idem $AD.BD = mn = an - nn$: hinc harum æquationum ſingula ſecunda membra continent unam tantum, vel alteram variabilem Syſtematis baſis datæ: ideoque ad eruendos ſingularum homologarum radicum valores hæ duæ æquationes, & non aliæ accipiendæ ſunt, in quibus termini am, an ſunt ambo ſigno poſitivo affecti. Nam erraret qui ex eo quod & in (2.ª) eſt $mn = -an - nn$, pro valore unius radicis eruendo aſſumeret $mn = am - mm$, pro altero $mn = -an - nn$ (niſi artificioſe, ut inferius faciam, ad homologas conformentur): tunc enim radices non invenirentur homologæ, ſive illæ quæ ſimul ſumptę ęquari debent a, atque ſibi obviam occurrere. (2.ª) $(-m).(-n) = -am - mm = -an - nn$ pertinet ad Syſtema baſis datę $-m - n = a$, & radices homologę ambę negativę, quippe ortę ab hac ęquatione $-m - n = a$: ut igitur earum valores eruantur, illæ ſumendę ſunt ęquationes ad ſuperficiem, in quibus termini unius dimenſionis variabilis ambo ſigno negativo afficiuntur.

§. 9. A producto radicum Syſtematis linearis baſis variabilis oritur tam (3.ª) $mn = -am + mm = an + nn$, quam (4.ª) $mn = am + mm = -an + nn$: ſed in (3.ª) æquatio linearis Syſtematis eſt $n + a = m$, & ęquationes ſecundi gradus homologę in ſecundo variabilis termino alternant ſigna, quemadmodum in (4.ª), cujus tamen ęquatio linearis Syſtematis eſt $n = a + m$: permutanturque ſigna in ſecundis terminis, ut qui in (3.ª) poſitivus erat, fiat negativus in (4.ª), & viceverſa. Itaque ſi in (3.ª) fiat (*fig.* 2.) $BD = n$, $AB = a$, erit $m = AB + BD = a + n$: & in (4.ª) $Bd = n = BA + Ad = a + m$. In (3.ª) igitur in ęquatione $mn = an + nn$, n eſt $BD = Ad$, m eſt AD ęquationis $mn = -am + mm$: at in (4.ª) $n = Bd$, & $m = Ad = BD$, ut ſit

$$\left.\begin{array}{l}\text{in } (3.^a)\; m + n = AD + Ad = -Bd - BD \\ \text{in } (4.^a)\; n + m = Bd + BD = -AD - Ad\end{array}\right\} = x + x = -x - x, \text{ vel viceverſa.}$$

Quare in illis ęquationibus ad ſuperficiem, ſive ſecundę dimenſionis, quę oriuntur a producto duarum variabilium Syſtematis linearis baſis datę, & in quibus alterutra tantum variabilis reperitur, quadrata ejuſdem variabilis erunt negativa; ſecundi vero termini, in quibus eſt variabilis ſolitaria, erunt vel poſitivi, vel negativi: eę tamen erunt inter ſe copulandę ęquationes, in quibus ſecundi ter-

mini ſignis eiſdem poſitivis, vel negativis afficiuntur, ut videre eſt in (1.ª) & (2.ª). Contra vero æquationes ſecundę dimenſionis, in quibus reperitur variabilis ſolitaria, ortę a producto duarum variabilium Syſtematis linearis baſis variabilis, habent ſemper quadrata variabilis ſolitarię poſitiva, ſecundos vero terminos poſitivos, vel negativos; ſed illę ſumendę ſunt ut homologę, quę alternant ſigna in ſecundo termino, ut (3.ª), & (4.ª) oſtendunt.

§. 10. Quoniam vero radicum valores, ex quibus componuntur iſtiuſmodi ęquationes ſecundę dimenſionis, intra eos limites maximum, & minimum continentur, quos Syſtemata, a quibus proficiſcuntur, (ut vidimus) jubent; ita iſtarum producta, ſive ęquationes ſecundę dimenſionis ſuis & ipſę terminis maximis, & minimis circumſcribantur oportet. Quos ut inveniamus, ſumamus in hoc Capite ęquationes ſecundę dimenſionis illas, quę oriuntur a producto duarum variabilium Syſtematis linearis baſis datæ $m + n = a$ (in qua $m = a$ maxima, $n = o$ minima, & viceverſa, ac ſumma ſemper conſtans) ſcilicet ęquationes $mn = am - mm = an - nn$: & vocata AB $= a$, & AD $= m$, BD $= n$ (*fig.* 3.) erit ęquatio (poſita BL $= \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} =$ CB $=$ CN, & ductis diagonalibus BN, NA) $mn =$ AD.BD $=$ AD.DE $=$ AE $= \overline{a-n}.n = \overline{a-m}.m =$ Bd.de. Sit primum $m =$ AB $= a$ maxima, & n minima $= o$; erit ęquatio $m.n =$ AB.oBD $= a.o$ $= \overline{a-n}.n = a.o =$ AB.B (ut & hîc quando opus erit utamur ea methodo, qua Lib. I. Cap. III. §. 9. uſi ſumus ad deſignandum non ſolum abſolutum zero, ſed etiam locum, in quo ipſum conſiſtit) $= \overline{a-m}.m = \overline{a-a}.a$ $=$ o.BA : & contra facta $m = o$, & $n = a$, erit $m.n = \overline{a-n}.n$ $= \overline{a-a}.a =$ A.BA $= \overline{a-m}.m = a.o =$ AB.B : hoc eſt minimum rectangulum $m.n$ in hoc Syſtemate eſt nullum; eſt enim productum duarum radicum, quarum una eſt maxima $= a$, altera minima $=$ o. Decreſcat nunc m, & fiat AD; erit BD $= n$, & $m.n = \overline{a-n}.n$ $=$ AD.DE $=$ AE $= \overline{a-m}.m =$ Bd. de $=$ Be. Decreſcente rurſus m, & contra creſcente n, tandem erit $m = n = \frac{a}{2}$, ſive $m =$ AC; $n =$ BC : & $m.n = \overline{a-n}.n = \overline{a-\frac{a}{2}}.\frac{a}{2} =$ AC.BC $=$ AN $= \overline{a-m}.m =$ BC.AC $=$ BN $= \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$; in quo caſu rectangulum $m.n$ erit maximum. Quod licet facile ſit cognoſcere, dummodo advertas ſummam

$m + n$

$m + n$ eſſe ſemper conſtantem $= a$, tamen ſic demonſtro. Ponamus iterum m decreſcere ab $AC = \frac{a}{2}$, & fieri Ad, ut ſit $n = Bd = Ge$; erit tunc rectangulum $m.n = \overline{a - m}.m = Bd.de = Be = \overline{a - n}.n = AD.DE = AE$: ſed rectangulum $Be = BN - LD' + EC = \frac{a^2}{4} - GD'.D'N + eD'.D'C$: & $D'N = D'e$; & GD' major $D'C$; ergo $GD'.D'N$ majus $ED'.D'C$; ac proinde Be minus $BN = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$. Ergo rectangulum $m.n$ tunc erit maximum, cum a producto duarum æqualium radicum ortum fuerit. Rectangula igitur omnia, quæ oriri poſſunt a producto duarum variabilium Syſtematis linearis baſis datæ, intra limites $o.AB$, vel $o.BA$ minimum, & $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = AN$, vel $= BN$ maximum continentur: ideoque in hiſce æquationibus quadratum mm ſemper ſit minus am, & nn minus ſit an neceſſe eſt: m enim, vel n maxima ad ſummum æqualis eſt a, in quo caſu, facta $m = a$, $n = o$, erit $nm = am - mm = aa - aa = an - nn = ao - o.o$, vel viceverſa: ideoque $nm = am - mm = an - nn$ ſemper in caſibus intermediis poſitivum erit.

§. 11. Quare in æquatione ſecundæ dimenſionis orta a Syſtemate lineari baſis datæ, rectangulum quidem minimum mn poteſt eſſe zero, tamquam primus limes eorum, intra quos valores intermedii continentur, ſed (quod diligenter eſt notandum) radices ambæ non poſſunt zero æquari. Nam licet rectangulum quodcumque abſtracte ſumptum poſſit æquari zero, quando una, aut altera, vel ambæ radices ſunt zero; tamen hoc repugnat naturæ Syſtematis baſis datæ, in quo tantum abeſt, ut ambæ eodem tempore poſſint eſſe zero, ut facta una, aut altera zero, altera fiat maxima $= a$. Variabiles enim, ſive radices a duobus diverſis punctis in hoc Syſtemate proficiſcentes ſibi obviam occurrunt; ideoque creſcente una, altera ea quantitate decreſcat neceſſe eſt, qua illa augetur, ut eadem variabilium ſumma ſervetur, hoc eſt diſtantia primo poſita inter duo hæc puncta conſtans perſeveret; quemadmodum in Cap. V. Lib. ſup. *De legitima Syſtematum conjunctione* declaravimus. Repugnat igitur in hoc Syſtemate invenire radices ambas eodem tempore æquales zero. Utrum vero repugnantia hæc ſit abſoluta, an tantum relativa, inferius inveſtigabimus.

§. 12. Erit igitur formula analytica in ſuppoſitione rectanguli mn minimi revera ſequens $m.o = n.o = a.o = \overline{a - m}.m = \overline{a - n}.n$: in qua poſita $m = o$ (*fig.* 3.) $= A$, eſt $n = a = BA$; & poſita $m = a = AB$, erit $n = o = B$. Hinc hoc artificio ſtatim patet non poſſe eodem tempore m, & n æquari zero, ſive $m.n = A.B$, niſi in caſu, in quo diſtantia AB, ſive a ſit zero; & æquatio ſit $m.n = \overline{o - m}.m = \overline{o - n}.n$, ex quibus

bus deducitur $n = o - m$, $m = o - n$; & $n + m = o$, $m + n = o$; & $m = o$ maxima æqualis $n = o$ minimæ, & viceverſa: omnia enim æquantur tam minima, quam maxima, quando fiunt zero. Ut vero cognita re compendio utamur, poterit quidem contra naturam Syſtematis uterque factor m, n æquari zero, ita ut ſit $o.o = \overline{a - m}.m = \overline{a - n}.n$: & in prima $m = o$, & $a - m = o$, & $a = m$: in ſecunda vero $n = o$, $a - n = o$, & $a = n$; quia m in prima $a - m = o$ repræſentat n, & in ſecunda $a - n = o$, n eadem eſt ac m. Nam in prima $a - m$ revera æquatur n, eſtque $a - m = n$: & quoniam $m = o = A$; erit $n = a = BA$: in ſecunda revera $a - n = m$, ſed $n = o = B$, ergo $m = a = AB$. Licet igitur in æquatione propoſita $mn = \overline{a - m}.m = \overline{a - n}.n$, tam m, quam n eodem tempore æquentur zero; tamen ſcimus data m, vel n minima $= o$, ab altero factore $m - a = o$, vel $n - a = o$ erui alteram maximam $m = n = BA = a$; vel $n = m = AB$; atque hoc modo revera eſſe cognoſcimus $o.o = \overline{a - m}.m = \overline{a - n}.n$; & $o.o = \overline{a - n}.n = \overline{a - m}.m$; & æquatio $o.o = am - mn = an - mn$. Ex prima $mn = am$ deducitur $m = o = A$, & $n = a = BA$: ex ſecunda $mn = an$, $n = o = B$; $m = a = AB$: eſtque tam $m = a$, quam $n = a$, æquatio limitis maximi radicis linearis, ex qua eruitur $m + o = m + n = a$; $n + o = n + m = a$.

§. 13. Nunc ut conſtruamus æquationem $mn = \overline{a - m}.m = \overline{a - n}.n$, data AB (*fig.* 3.) $= a$ baſi Syſtematis linearis æquationis $m + n = a$, & diviſa bifariam in C, ex quo erecta CN normali ad AB, & æquali CB, deſcribantur quadrata CI, CL, eorumque diagonales ducantur AN, BN. Quoniam ex natura quadrati ſemper BD = DE, vocata AD $= m$, BD $= n$, erit DG quadratum, & æquale nn, & DE = BG $= n$: ideoque $mn = AD.BD = \overline{a - n}.n$. Quare diagonalis BN erit locus geometricus, cujus abſciſſa AD $= m$ ducta in ordinatam DE $= n$ conſtituit rectangulum $m.n = \overline{a - n}.n$. Facta $n = o$ minima, erit AB $= a$ maxima, & rectangulum minimum $n.m = AB.B$. Decreſcente m, ſed non infra AC, ut fiat = AD, creſcit n, & fit = BD, & rectangulum $m.n = AE = \overline{AB - BD}.BD = \overline{a - n}.n = AD.DE$: at facta $m = AC = \frac{a}{2} = n$, erit $m.n$

$$= \overline{a - n}.n = \overline{a - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2} = \overline{AB - BC}.BC = AC.CN = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$$

= CI, quod vidimus eſſe maximum. Et ſane facta m minori $AC = \frac{a}{2}$, puta Ad,

ta Ad, tunc n ſit major BC, ſitque Bd, quo in caſu dg erit quadratum $= mm$, & rectangulum erit Be, & m convertitur in n, & n in m; atque æquatio huic hypotheſi accomodata erit ſequens $n.m = \overline{a - m}.m = \overline{BA - Ad}.Ad = Bd.de = Be$: & facta $m = o$, erit rectangulum minimum $nm = a.o = BA.A$: at facta $m = \frac{a}{2}$, erit rectangulum maximum $n.m = \overline{a - m}.m = \overline{BA - AC}.AC = BC.AC = CL$: qui limites quantitate æquantur primis, ſed ſunt illis oppoſiti directione. Quare facta m minori $\frac{a}{2}$, permutantur coordinatæ, & puncta originis, locuſque geometricus poſitione mutatur, & cum in primo caſu, ſive quando $m > \frac{a}{2}$, punctum originis erat A, abſciſſa $AD = m$, ordinata $DE = n$, locus diagonalis BN; contra in hoc ſecundo, quando ſcilicet $m < \frac{a}{2}$, originis punctum eſt B, abſciſſa $Bd = n$ oppoſita primæ m, & ordinata $de = m$, locuſque diagonalis AN.

§. 14. Inſuper in æquatione $n.m = \overline{a - m}.m$ (*fig.* 3.) $= Bd.de$, quoniam $de = -de'$, ſi in æquatione ponatur $-de'$ pro de, & $-m$ pro m, eadem manente $Bd = a - m$, erit æquatio $n.-m = \overline{a - m}.-m = Bd.-de'$; ſive $n.m = \overline{a - m}.m = Bd.de' = \overline{BA - Ad}.de'$, qui eſt locus ad diagonalem AN': atque hoc artificio tranſitus fit ad partem oppoſitam I'N', & ad diagonalem AN'; & ad N'B creſcente m ſupra $AC = \frac{a}{2}$. Et ſane vidimus $n.m = \overline{a - m}.m = \overline{BA - Ad}.de'$; ſed $BA = -AB$; $de = -de'$; ergo $n.m = \overline{a - m}.m = \overline{-AB - (-de')}.-de' = \overline{AB - de'}.de' = \overline{AB - Ad}.de' = AD.DE'$, facta $DE' = de'$: ac per demonſtrata $m.n = AD.DE' = \overline{a - n}.n$, & $n.m = BD.de' = \overline{BA - Ad}.de' = \overline{a - m}.m$. Quamobrem eadem formula $mn = am - mm = an - nn$, tam rectangula ex una parte ADEg, BdeG, quam quæ in parte oppoſita ADE', Bde' ab Analyſi ſine erroris periculo exhiberi poterunt. Quinimmo quoniam poſita m, vel $n = \frac{a}{2}$, habetur rectangulum maximum BC.CN, vel $AC.CN = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, facile erit a baſi Syſtematis $AB = a$ ad baſim $NN' = a$

noſ-

noſmet transferri, dummodo dato limite maximo $mn = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = AC \cdot CN$ in caſibus mediis fiat $m \cdot n = \overline{N'N - ND'} \cdot ND' = \overline{a - m} \cdot m = \overline{NN' - N'd'} \cdot N'd' = \overline{a - n} \cdot n$, poſita $ND' = m$; $N'd' = n$: & hoc modo a baſi AB ad baſim NN' translati, quatuor alia rectangula NE', Ne', N'E, N'e invenimus, ſingula ab una formula mn expreſſa.

§. 15. Cum veritatem hanc (cujus ignoratione in arctum compulſa Analyſis proprias vires exerere, atque ſeſe explicare hucuſque non potuit) multum conferat pluribus confirmare modis; præter ea, quæ identidem inferius pro re nata occurrent, ſequenti utamur argumento. Quoniam (*fig. ead.* 3.) $AB = a = BA = AC + BC = m + n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x$, erit $mn = \frac{a^2}{4} - x^2$, ut vidimus. Facta $x = 0$, erit $m \cdot n = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = AC \cdot BC$ rectangulum maximum factum ab AC, BC. Porro hoc pluribus modis obtineri poteſt: vel enim manente CB in eo ſitu, in quo eſt, CA per quadrantem circularem converſa erigitur normalis in CN, ut oriatur rectangulum $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = BC \cdot AC = CL$: vel manente horizontali CA, tranſit CB in CN, & tunc $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = AC \cdot CB = Cl$; vel AC tranſiens in CN' gignit $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = AC \cdot BC = CL'$: vel denique CB translata in CN' producit $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = AC \cdot BC = Cl'$. At cum ſemper $AC = \frac{a}{2}$, $BC = \frac{a}{2}$, licet oppoſitæ, poſitive ſumantur, ſingula hæc quatuor rectangula maxima ſigno poſitivo erunt afficienda, quamvis ſingula ſibi invicem directione opponantur. Facta deinde $CD = x$, ut inveniantur rectangula minora intermedia, erit

$$\overline{AC + CD} \cdot \overline{BC - CD} = \frac{a^2}{4} - x^2 = AD \cdot DE = AE = m.n = \overline{a - n} \cdot n:$$

& quoniam $CD = - Cd$, facta in antecedenti hac ſubſtitutione (quoniam maximum hîc eſt Cl), erit $\overline{AC - Cd} \cdot \overline{BC + Cd} = \frac{a^2}{4} - x^2 = AD \cdot Bd = Be = n.m = \overline{a - m} \cdot m$. Poſito vero maximo $AC \cdot BC = Cl'$ (facta

Ad

$Ad = de'$), erit intermedium $\overline{AC - Cd}.\overline{BC + Cd} = \frac{a^2}{4} - x^2 = de'.Bd$ $= Be' = n.m = \overline{a-m}.m$. Ac tandem, ſumpto CL' maximo, erit $\overline{AC + CD}.\overline{BC - CD} = \frac{a^2}{4} - x^2 = AD.DE' = AE' = m.n = \overline{a-n}.n$: quæ ſingula ab eadem formula poſitiva $\frac{a^2}{4} - x^2$ cum exprimantur, cetera etiam rectangula iiſdem ſymbolis atque ſignis erunt afficienda.

§. 16. Tamen ſi communem methodum conſulas, hæc te docebit, poſitis AD, DE poſitivis, & $\overline{\frac{a}{2} + x}.\overline{\frac{a}{2} - x} = + AE$, eſſe AE' negativum, quia oritur a producto AD poſitivæ in DE' negativam; proindeque ex communi ſententia $AE' = AD.DE' = \left\{\frac{a}{2} + x\right\} \times - \left\{\frac{a}{2} - x\right\} = - \left\{\frac{a^2}{4} - x^2\right\}$: idem dicas de aliis velim, quæ tamen poſitiva eſſe methodus noſtra aperte declarat. Ergo erit $AD.DE = AD.DE'$; & facta analogia

$AD : AD :: \quad DE' : \quad DE$; morem communem ſequendo, erit

$AD : AD :: - DE : \quad DE$, vel

$AD : AD :: \quad De' : - DE'$ (quoniam ſi $DE' = - DE$, erit $DE = - DE'$);

ex quibus oriuntur hæ duæ analogiæ a calculo communi prorſus repudiatæ

$$\left\{\begin{array}{l} 1 : 1 :: -1 : \quad 1 \\ 1 : 1 :: \quad 1 : -1 \end{array}\right\}$$: & inſuper ex analogia

$AD : \quad Bd :: \quad dE' : DE$ (quoniam $Bd = - AD$, & $de' = - DE$) oritur

$AD : - AD :: - DE : DE$; vel

$- Bd : \quad Bd :: \quad dE' : - de'$: quæ dant $\left\{\begin{array}{l} 1 : -1 :: -1 : \quad 1 \\ -1 : \quad 1 :: \quad 1 : -1 \end{array}\right\}$

quas tamen Calculus communis libenter admittit. Non video tamen, quo jure iſtis probatis, primæ repudiari poſſint. Nam hæ ultimæ dant $AD.DE = Bd.de'$, ſive rectangulum ex parte poſitiva æquale rectangulo ex parte negativa: ex primis vero ſequitur $AD.DE = AD.DE'$, hoc eſt, id quod admittunt ultimæ, rectangulum ex parte poſitiva $AD.DE$ æquale rectangulo $AD.DE'$ ex parte negativa. Qui conſenſus priorum cum ultimis eo magis demonſtratur ex mea Methodo §§. ſuperioribus adhibita, qua evincitur tam AD, quam BD, ſive tam AB, quam BA eidem $+a$ æquari: ideoque ultimæ, quas libenter amplectimur, profecto congruunt cum illis, quas communis Methodus repudiavit.

§. 17. Hiſce explanatis, ſumatur æquatio (2.da) §. 7. hujus Cap., ſcilicet (*fig. ead.* 3.)

$$(-m).(-n) = \begin{cases} \overline{a-(-m)}.(-m) = \overline{a-(-n)}.(-n) \\ \overline{AB-(-m)}.(-m) = \overline{BA-(-n)}.(-n) \end{cases} \text{ orta a}$$

producto variabilium æquationis linearis $-m-n=a$ (2a) §. 41. Cap. VII. Lib. I., in qua facta $-n$ minima $=0$, eſt $-m$ maxima $=AB=a$; & facta $-m$ minima $=0$, eſt $-n$ maxima $=BA=a$. Æquatio hæc communi methodo tractata dat $mn = -am-mm = -an-nn$, ſcilicet poſitivum æquale negativo, a qua ſi radicem extrahas, oritur reale æquale imaginario. At ex dictis non erit difficile veram hujuſce incommodi cauſſam inveſtigare. Ea nimirum eſt, quia Analyſtæ opinione, non ratione ducti primum quidem membrum ex negativo in poſitivum transformarunt, non vero ſecundum. Nam loco citato §. 41. oſtendimus æquationem linearem $-m-n=AB=BA=a$ non niſi permutationem ſignificare; quam duplici modo obtineri poſſe §. 46. ejuſdem Capitis docuimus. Vel enim pro $-m$ ſubſtituitur $+n$, & pro $-n$, $+m$, & permutantur variabiles, ut quæ originem habebat in A nunc habeat in B, & viceverſa: vel (quod idem eſt) lineæ AB in $-BA$, & BA in $-AB$ facienda eſt inverſio; hoc eſt data $-m-n=AB=BA$, fiat $m+n=-AB=-BA=BA=AB$; vel data $-m-n=-BA=-AB$, fiat $m+n=BA=AB$: quo facto punctum B tranſit in A, & A in B. Hæc eſt vera, & unica ratio, cur licet in hoc Syſtemate, & in æquationibus ſecundæ dimenſionis productum $-m.-n$ æquale facere producto poſitivo $n.m$; ſcilicet permutatione $-m$ fit n, & $-n$ fit m. Porro communis methodus, nemine diſſentiente, admittit & docet $-m.-n=nm$: at ignorata vera hujuſce operationis ratione negat $-m$ fieri poſſe n; ideoque ſecundum membrum, in quo eſt $-m$, vel $-n$ intactum relinquit, quod tamen & ipſum erat transformandum (veluti vidimus §. 14. revera transformari) ut omnia hinc inde rite procederent.

Nam data

$-m.-n = \overline{AB-(-m)}.-m = \overline{BA-(-n)}.-n$; ſi fiat in utraque æquationis parte variabilium permutatio, erit

$n.m = \overline{AB-n}.n = \overline{BA-m}.m$; vel (quod idem eſt) quoniam $AB = -BA$, & $BA, = -AB$

$-m.-n = mn = \overline{AB-(-m)}.-m = -\overline{BA-(-m)}.-m$
$= -BA.(-m)-(-m)^2 = BA.m-(m)^2$

$-m.-n = mn = \overline{BA-(-n)}.-n = -\overline{AB-(-n)}.-n$
$= -AB.(-n)-(-n)^2 = AB.n-(n)^2$:

quo

quo facto omnia ex utraque parte mire conſentiunt. Quid igitur mirum ſi eo artificio (quod in primo membro ut $-m.-n$ in nm converteret communis methodus adhibuit) in ſecundo membro prorſus neglecto, ſtupens ac ignara quid ſignificet, videat oriri poſitivum æquale negativo, & reale æquale imaginario? Hinc manifeſte elucet neceſſitas permutationis in utraque parte, ut vitetur negativum æquale poſitivo; conſecutio neceſſaria methodi communis, quæ admiſſis analogiis $1 : -1 :: -1 : 1$, vel $-1 : 1 :: 1 : -1$, ceteras §. ſuperioris, quas rejicit, neceſſario amplectatur oportet. Non eſt igitur cur ab Analyſi communi tamquam falſa expungatur æquatio, qua invenitur poſitivum æquale negativo (hac enim repudiata, & $-1.-1 = 1$, ut dixi §. ſuperiori, & totus communis calculus repudiandus eſſet): ſed rectius intelligenda, atque explananda, ut §. 14. & ſeqq. oſtendimus.

§. 18. Et ſane revocata æquatione (*fig.* 3.)

(1.ª) $mn = AD.DE = \overline{AB - BD}.BD = \overline{AB - BD}.BG = \overline{AB - BD}.DE = \overline{a-n}.n$; hæc, ex principio omnium conſenſu recepto $-1.-1 = 1.1$, rite ſic efferri poteſt.

$mn = -\overline{AB-(-BD)}.-BD$; ſed $-AB = BA$, $-BD = Ad = de$; ergo erit

(2.ª) $mn = \overline{AB-BD}.BD = -\overline{AB-(-BD)}.-BD = \overline{BA-Ad}.Ad = \overline{BA-Ad}.de = \overline{a-m}.m = Bd.de$. Rurſus quoniam $BG = BD = -DE' = -de'$, $BD = -Ad$, $-AB = BA$; erit

(3.ª) $mn = \overline{AB-BD}.BD = \overline{AB-BD}.-de' = \overline{AB-(-Ad)}.-de' = -\overline{AB-(Ad)}.de' = \overline{BA-Ad}.de' = \overline{a-m}.m = Bd.de'$.

Tandem, quoniam $de = -de' = -DE'$, & $Ad = -BD$; erit &

(4.ª) $mn = \overline{AB-BD}.BD = \overline{BA-Ad}.Ad = \overline{BA-Ad}.de = \overline{BA-Ad}.-DE' = \overline{BA-(-BD)}.-DE' = -\overline{BA-BD}.DE' = \overline{AB-BD}.DE' = \overline{a-n}.n = AD.DE'$. Ergo erit $mn = AD.DE = Bd.de = Bd.de' = AD.DE'$; ſive $mn = \overline{a-n}.n = m.n = \overline{a-m}.m = n.m = \overline{a-m}.m = n.m = \overline{a-n}.n = m.n$: ac poſita $n = m = \frac{a}{2}$, in quo caſu rectangula ſingula mn fiunt maxima; erit $mn = AC.CN = CI = BC.CN = CL = BC.CN' = CL' = AC.CN' = CI'$; cujus æquationis limitis maximi inferius uſus patebit.

 §. 19.

§. 19. Hiſce diligenter perſpectis, evidentiſſime evincitur, artificiis tum calculo qui eſt in uſu, tum meo communibus, in ſecundo æquationis ſuperius propoſitæ membro adhibitis, revera & ſecundum membrum in aliud transformari, & primum membrum, licet intactum videatur iiſdem manentibus ſymbolis ita mutari, ut modo *m* permutetur in *n*, modo *n* in *m*: hoc eſt modo unum, modo alterum ex rectangulis ab eadem parte, in qua primum, ideoque poſitivum ſumptum fuerat, repræſentet; modo, facta *m*, vel *n* reſpectu primæ negativa, referat alterutrum ex rectangulis in parte primo oppoſita, quæ reſpectu primæ negativa jure cenſenda eſt. At ſi ſingula ſolitaria ſumantur, nec inter ſe comparentur, ſingula vere poſitiva dicenda ſunt. Porro cum modo unum, alterum modo ex iſtis, ſed ſemper unum rectangulum a primo membro *m n* ſumatur, ſingula hujuſmodi rectangula tamquam diverſa ſolitaria Syſtemata cenſenda ſunt, nullo inter ſe communi vinculo conſociata, proindeque ſingula in proprio Syſtemate efferri debent poſitive. Species igitur illa repugnantiæ, quam præſeferunt hujuſmodi æquationes, ex eo nullus dubito oritur, quia vulgo male creditur *m n* in primo membro non ſolum *æqualitatem* cum ſecundo, ſed *identatem* etiam primam ſervare, quocumque modo ipſum ſecundum membrum ſubſtitutione quantitatis æqualis pro æquali (a quo axiomate originem, & veritatem habent omnia analytica artificia) in aliam formam convertatur. Et ſane ſumpta primum æquatione $mn = AD.DE$, in qua (quia eſt ſolitaria, & prima) æqualitas, & identitas inveniuntur, calculus communis omnium conſenſu docet poſſe in ſequentem converti, ſcilicet $mn = -m.-n$: ſed hac facta mutatione, idemne rectangulum $AD.DE$ perſeverat? Caveſis hoc dicas: æqualitas quidem remanet, tollitur identitas: eſt enim $-m.-n = (-AD).(-DE)$, qua mutatione ſuperius vidimus vel rectangulum $Bd.de$ (cum ſit $-AD = Bd$; & $-DE = -BD = Ad = de$), vel rectangulum $Bd.de'$ deſignari (cum $-AD = Bd$; & $-DE = DE' = de'$). Et tamen ab omnibus probatur æquatio $-m.-n = Bd.de'$, licet hoc rectangulum revera ſit in parte contraria, & reſpectu primæ poſitionis negativum: altera vero $-m.-n = Bd.de$ omnium ſybilis exploditur, licet rectangulum $Bd.de$ remaneat in parte poſitiva reſpectu primi, & eamdem originem, quam $Bd.de'$ habeat. Ratio vero hujuſce male confirmatæ opinionis ea eſt, quia facta $-AD$ negativa $= BD$, relinquitur $-DE$ negativa, cui rectius ſubſtituenda erat poſitiva de, cum revera ſit $-DE = -BD = Ad = de$.

§. 20. Cavendum igitur ne identitatem cum æqualitate confundamus, ſciamuſque (facta artificiis analyticis ſecundi membri transformatione) primum membrum variabilibus *m* ac *n* conflatum & ipſum transformari poſſe ope ſubſtitutionis in uno tantum ſecundo membro peractæ; qua æqualitate retenta, modo directio & poſitio tantum quantitatis, modo quantitas & ipſa mutatur. Hinc quam maxime oportet quoſdam Canones invenire, quos inferius trademus (quemadmodum fecimus Libro I. Cap. V. §. 44.) ut tuto dijudicare poſſimus, quandonam poſitio tantum, & quando poſitio, & quantitas, vel alterutra mutetur, & utrum inter terminos diverſo ſigno affectos differentia, an ſumma intercedat.

§. 21.

§. 21. Sed ut res hæc plenius confirmetur atque illuſtretur, ſumantur rectangula (*Tab. V. fig.* 4.) AE = mn pertinens ad quadrilaterum ABNI, Be = mn pertinens ad quadrilaterum BANL: erit ex dictis

I.um $AE = mn = \overline{\frac{an}{2} + \frac{a}{2} - n} \,.\, n = AC \,.\, CH + CD \,.\, CH$

$= AC.BD + CD.BD$:

II.um $Be = mn = \overline{\frac{ma}{2} + \frac{a}{2} - m} \,.\, m = BC \,.\, CH + Cd \,.\, CH$

$= BC \,.\, Ad + Cd \,.\, Ad$:

quæ æqualia quidem ſunt quantitate, ſed non identica. Verum ſi hæc iiſdem numero lineis exprimantur, quoniam $AC = -BC$, $BD = -Ad$, $CD = -Cd$; & viceverſa $BC = -AC$, $Ad = -BD$, $Cd = -CD$, erit (facta ſubſtitutione)

(1.a) $mn = AC.BD + CD.BD = -BC.-Ad + (-Cd).-Ad$

$= BC.Ad + Cd.Ad$:

(2.a) $mn = BC.Ad + Cd.Ad = -AC.-BD + (-CD).-BD$

$= AC.BD + CD.BD$:

qua mutatione ſignorum in omnibus factoribus linearibus facta docemur ab uno ad alterum quadrilaterum, ab uno ad alterum rectangulum, ſive ab una ad alteram poſitionem tranſitum factum eſſe. Artificium hoc, quod eruitur a recepta paſſim formula $-1 \,.\, -1 = 1 \,.\, 1$, omnium conſenſu probatur, & frequentiſſime uſurpatur, licet hæc, quam ſignificat, translatio aut ignorata aut neglecta prorſus fuerit. Hoc tamen poſito atque conceſſo, quoniam (in *eadem figura*) eſt $BD = DE = CH = de$; ſumantur eadem rectangula primo modo elata, & facta æqualium ſubſtitutione, erunt æquationes

(3a.) $mn = AC.CH + CD.CH = -BC.CH + (-Cd).CH$;

(4.a) $mn = BC.CH + Cd.CH = -AC.CH + (-CD).CH$: vel

(5.a) $mn = AC.CH + CD.CH = AC.CH - Cd.CH$;

(6.a) $mn = BC.CH + Cd.CH = BC.CH - CD.CH$: vel

(7.a) $mn = AC.CH + CD.CH = -BC.CH + CD.CH$;

(8.a) $mn = BC.CH + Cd.CH = -AC.CH + Cd.CH$:

quæ, eodem jure quo duæ primæ, legitimæ cenſendæ ſunt, quia ab eadem omnibus probata lege deductæ fuerunt. Attamen (3)a, & (4)a dant duo poſitiva æqualia duobus negativis, ceteræ quatuor alternant ſigna, ita ut ſit

1.1

$$1.1 + 1.1 = \left\{ \begin{array}{l} -1.-1 + -1.-1 \\ -1.+1 + -1.+1 \\ +1.+1 + -1.+1 \\ -1.+1 + \quad 1.+1 \end{array} \right\};$$

quas quidem conſecutiones, excepta prima, perpetuo ab Analyſi tamquam quocumque immani abſurdo abſurdiores exulare juſſit omnium Analyſtarum auctoritas, & conſenſus. Verum (quod rem attentius conſideranti mirum certe videri debet) eorumdem Analyſtarum conſenſus, & auctoritas benigne excipit, & patrocinatur æquationem $CD . CH = Cd . CH$,

vel $HE . CH = He . CH$,

& analogias inde proficiſcentes.

$CH : Cd :: CH : CD$,

$CH : He :: CH : HE$: quæ quidem æquationes in quo differant ab æquationibus $CD . CH = - CD . CH$

$He . CH = - HE . CH$ ſcire velim: cum ſit

$CD . CH = \quad Cd . CH = - CD . CH$

$= - Cd . CH = - CD . CH = \quad Cd . CH$ &c. Quare luce clarius patet, prima admiſſa, ceteras omnes repudiari recte non poſſe. Una itaque & eadem formula $\overline{mn}$, una æqualium pro æqualibus ſubſtitutione, modo mutat identitatem ſive poſitionem retenta quantitatis æqualitate, modo alternando ſigna in ſecundo tam ſummam, quam differentiam ambigue ſignificat, quemadmodum ex. gr. in (5.ª) & (*6.ª*) in quibus $\overline{AC - Cd} . CH$ ſignificat tam $AC . CH - Cd . CH = AC . CH - dC . CH = AH - dH$ $= Ae$, quam $\overline{AC - Cd} . CH = \overline{AC + CD} . CH = AH + CE$ $= AE =$ &c.

§. 22. Quoniam igitur demonſtravimus ab una eademque formula $\overline{mn}$ octo rectangula ſingillatim repræſentari, & ſingula eadem æquatione $mn = \overline{a - m} . m$ $= \overline{a - n} . n$ concludi, qua rectangula quæ erant negativa, ſive quæ erant ſumpta in Syſtemate non ſuo, facile fiunt poſitiva, ſive ad proprium ac ſuum Syſtema reducuntur; ut progrediamur, ſumatur iterum formula (*fig.* 4.) mn $= \overline{AB - BD} . BD = \overline{a - n} . n$ (quod enim de hac dicemus, omnibus aliis applicari poſſe quæ ſuperius diximus ſatis oſtendunt): hæc ita efferri poteſt

$$mn = \overline{AB - BD} . BD = \overline{a - n} . n = \overline{AC + CB - BD} . BD$$

$$= \overline{\tfrac{a}{2} + \tfrac{a}{2} - BD} . BD, \text{ ſive (quoniam } CB - BD = CD)$$

mn

$$mn = \overline{AB - BD}.BD = \overline{AC + CB - BD}.BD = \overline{AC + CD}.BD$$

$$\overline{a - n}.n \quad = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - BD \;.\; BD = \frac{a}{2} + Cd.BD;$$

ſed $BD = n$ nequit a zero (quo in caſu rectangulum eſt $a.o$) creſcere ultra $BC = \frac{a}{2}$, quin rectangulum mn decreſcat, quod fit maximum $= \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, quando $CD = o$: ergo $AC = \frac{a}{2}$ erit conſtans, atque ut integra cenſenda; BC vero $= \frac{a}{2} = CD + BD$ æquatur ſummæ duarum variabilium CD, BD, quarum prima CD prout decreſcit, vel creſcit, rectangulum mn contra intra limites $a.o$, & $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ creſcit, vel decreſcit; intra limites o, & $\frac{a}{2}$ creſcente, vel decreſcente altera. Itaque $CB = CD + BD = x + n = m' + n' = \frac{a}{2}$ (vocata $CD\; x = m'$) erit æquatio Syſtematis baſis datæ, ſed dimidiæ totius primo ſumpti Syſtematis $m + n = a = AD\; BD$. Æquatio igitur ſuperior in hanc convertitur

$$mn = \overline{AB - BD}.BD = \overline{AC + CB - BD}.BD = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$$

$$= \overline{\frac{a}{2} + m'}.n, \text{ cum ſit } \frac{a}{2} - n = m', \text{ ſed } n = \frac{a}{2} - m'; \text{ ergo tandem}$$

$$mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n = \overline{\frac{a}{2} + m'}.n = \overline{\frac{a}{2} + m'}.\overline{\frac{a}{2} - m'}$$

$= \overline{AC + CD}.\overline{BC - CD} = AD.BD$. Quoniam vero $\overline{AC + CB - BD}.BD$
$= \overline{-AC - CB - (-BD)}.-BD$,

& $\left\{\begin{array}{l} -AC = BC \\ -CB = CA \\ -CD = Cd \\ -BD = Ad \end{array}\right\}$; erit $-CB = CA = -CD - BD = -m' - n' = Cd + Ad = n' + m'$ (poſuimus enim $Ad = m$):

ergo $Cd = n'$, $Ad = m'$; &
$n.m = \overline{-AC - CB - (-BD)}.-BD = \overline{BC + CA - Ad}.Ad$

=

$= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m} . n'$: ſed $\frac{a}{2} - n' = AC - Cd = m = Ad$; ergo $n.m$ $= \overline{BC + Cd} . Ad = \overline{\frac{a}{2} + m} . n'$: ſed $n' = CA - Ad = \frac{a}{2} - m$; ergo $n.m = \overline{BC + Cd} . \overline{AC - Cd} = \overline{\frac{a}{2} + m} . \overline{\frac{a}{2} - m} = Bd . Ad$. Vel facilius $n.m\ \overline{AC + CD} . \overline{BC - CD} = - \overline{AC - CD} . - \overline{BC - (-CD)}$

$$= \overline{BC + Cd} . \overline{AC - Cd} = Bd . Ad .$$

§. 23. Sunt hîc quædam Corollaria apprime neceſſaria ex dictis deducenda. Ac primum, data æquatione $mn = AD . BD = \overline{AB - BD} . BD$ $= \overline{a - n} . n$, quoniam maximum rectangulum

$m.n = AD . BD$ nequit ſuperare valorèm $AC . BC = \frac{a}{2} . \frac{a}{2}$; dividenda eſt baſis AB bifariam in C, ita ut ſit $m.n = \overline{AB - BD} . BD$ $= \overline{AC + BC - n} . n$, atque AC ſumenda eſt tamquam baſis conſtans, utpote quæ intra limites $\frac{a}{2}$ minimum $= AC$, quando rectangulum eſt maximum, & $AB = a$ maximum, quando ſcilicet rectangulum eſt nullum, continetur; baſis vero $\frac{a}{2} - n$ variabilis ponatur m, ut ſit $\frac{a}{2} = CB = m + n$ $= CD + BD$, & æquatio

$m.n = \overline{AC + CB - BD} . BD = \overline{AC + CD} . BD$; ſed $BD = n$ $= BC - CD = \frac{a}{2} - m$; ergo

$m.n = \overline{AC + CD} . \overline{BC - CD} = \overline{\frac{a}{2} + m} . \overline{\frac{a}{2} - m}$; in qua æquatione m non poteſt eſſe minor zero, nec major $\frac{a}{2}$: rectangulum enim $m.n$ eſt productum duarum radicum, quarum prima $\frac{a}{2} + m$ pertinet ad Syſtema baſis variabilis $\frac{a}{2} + m = n$, in quo m nequit eſſe minor zero, poteſt vero in proprio

Syſte-

Syſtemate ad infinitum progredi, continetur tamen intra limitem maximum $\frac{a}{2}$ ab altera radice $\frac{a}{2} - m = n$ indicatum, quæ pertinet ad Syſtema baſis datæ $m + n = \frac{a}{2}$, in quo m renuit valorem $\left\{ \frac{a}{2} \right\}$ ſuperare; quemadmodum monuimus Cap. V. Lib. I. *De legitima Syſtematum* &c. Quare $mn = \overline{AC + CD} . \overline{BC - CD}$

$$= AC . BC + \begin{matrix} AC . - CD \\ + BC . \ \ CD \end{matrix} - \overline{CD}^2 = AC . BC - \overline{CD}^2 = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} - m^2;$$

& poſita $m = 0$, rectangulum maximum $mn = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} = AC . BC$; & poſita $m = \frac{a}{2}$, erit minimum $mn = AB . n0 = AB . B$. Itaque æquatio $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} . n = \overline{AC + BC - BD} . BD = \frac{a}{2} . n + \overline{\frac{a}{2} - n} . n = AC . BD + \overline{CB - BD} . BD$, in qua poſita $BD = 0$, eſt $mn = \overline{AC + CB} . 0B = AB . B$, & $n = 0 = B$, punctum in B; at facta $BD = BC = n = \frac{a}{2}$; erit $m . n = AC . BC + \overline{CB - BC} . BC$, in qua revera $CB - BC$ æquatur zero, quia $CB - BD = CD + BD - BD = CD$; ſed poſita $BD = BC$, eſt $CD = 0 = C$; ergo $CB - BC = C + BC - BC = C$: & $m . n = \overline{AC + 0C} . BC = \frac{a}{2} . \frac{a}{2}$ maximum. At quoniam m in primo membro, quando eſt maxima, æquatur $AB = a$, & m minima $= \frac{a}{2}$; ergo $mn = \frac{mn}{2} + \frac{mn}{2}$, & æquatio $mn = \frac{mn}{2} + \frac{mn}{2} = \frac{a}{2} . n + \overline{\frac{a}{2} - n} . n$, poſitis in primo membro $m + n = a$.

§. 24. Deinde obſervandum, data æquatione $mn = \frac{an}{2} + \overline{\frac{a}{2} - n} . n$,

eſſe $\left\{ \begin{array}{l} mn - \frac{an}{2} = \overline{\frac{a}{2} - n}\,.\,n \\ \overline{m - \frac{a}{2}}\,.\,n = \overline{\frac{a}{2} - n}\,.\,n \end{array} \right\}$; ſed $m - \frac{a}{2} = -n$, & $\frac{a}{2} - n = +m$;

ergo $-nn = mn$: Vel $\overline{m - \frac{a}{2}}\,.\,n = \overline{\frac{a}{2} - n}\,.\,n$; ſed $\frac{a}{2} = m + n$; ergo $\overline{m - m - n}\,.\,n = \overline{m + n - n}\,.\,n$, & $mn - mn - n^2 = mn + nn - nn$ ac denique $-n^2 = mn$: hoc eſt quadratum negativum æquale rectangulo poſitivo, & viceverſa. Quæ conſecutio, cum plurimum conferat ad ea quæ dicenda ſunt, pluribus eſt confirmanda; licet ſuperius, & in *Libro* I. ſæpe demonſtratum fuerit in Syſtemate baſis datæ eſſe $m = -n$, & $n = -m$. Vidimus ſuperius in æquatione $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n$ $\left\{ \text{facta } n = \frac{a}{2} \right\}$ rectangulum maximum eſſe (*fig.* 4.) $AC\,.\,BC = \frac{a}{2}\,.\,\frac{a}{2}$, atque hoc modo revera repræſentare rectangulum duarum quidem æqualium quantitatum, ſed diverſarum. Quod ſi præter æqualitatem, etiam identitatem in quantitatibus deſideres (quo nomine revera, & jure appellatur quadratum, cujus vera, & completa notio in eo ſita eſt, ut una eademque linea in ſe ducta ſuperficiem gignat); tunc, cum BC ſit in parte oppoſita AC, ut ſit $AC = -BC$, & $BC = -AC$; erit $AC\,.\,BC = AC\,.\,-AC = -BC\,.\,BC$, proindeque $AC\,.\,BC = \frac{a}{2}\,.\,\frac{a}{2} = -(\overline{AC}^2) = -(\overline{BC}^2) = -\left\{\frac{a^2}{4}\right\} = -\left\{\frac{a^2}{4}\right\}$. Contra vero dato quadrato $(\overline{AC}^2) = (\overline{BC}^2) = \left\{\frac{a^2}{4}\right\}$; erit $(\overline{AC}^2) = AC\,.\,AC = BC\,.\,BC = AC\,.\,-BC = BC \times -AC = -\frac{a}{2}\,.\,\frac{a}{2} = -\frac{a}{2}\,.\,\frac{a}{2}$.

§. 25. Itaque a ſimplici formula algebraica $\frac{aa}{4} - \frac{aa}{4}$ abſtracte ſumpta, nullum erui poteſt tutum indicium de ejus determinato valore. Nam $\frac{aa}{4} - \frac{aa}{4}$ poteſt repræſentare unum idemque quadratum a ſe ipſo ſubtractum, proindeque ſignifi-

gnificare differentiam nullam in utraque dimenſione, & ipſum in punctum quadratum deſinere: quadratum enim proprie dictum, cum non ſolum ab æquali, ſed ab eadem etiam linea in ſe ducta oriatur, ſi hæc nulla ſit, in ſe ducta gignet punctum quadratum. Inſuper hæc eadem formula poteſt exhibere rectangula minima ſive nulla, & quidem numero infinita, cum ſit $\frac{aa}{4} - \frac{aa}{4}$ $= \overline{\frac{a}{4} + \frac{a}{4}} . \overline{a - a} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} . \overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}} = \overline{a + a} . \overline{\frac{a}{4} - \frac{a}{4}}$ $= \overline{\frac{fa}{4g} + \frac{fa}{4g}} . \overline{\frac{ga}{f} - \frac{ga}{f}}$, nullius quidem ſingula altitudinis, ſed baſis infinitis modis diverſæ (quemadmodum notavimus Cap. II. Lib. I.). Vel tandem eadem formula eſſe poteſt ſumma unius quadrati $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ cum altero rectangulo maximo, ſive ſumma duorum quadratorum, vel duorum rectangulorum ſimul. Ita in eadem *figura* 4.ª ſi CL ponatur quadratum ortum a linea CB in ſe ducta, erit $= \left(\frac{a}{2}\right)^2$, & $- \frac{a}{2} . \frac{a}{2}$ repræſentare poterit rectangulum maximum AC . BC ortum a producto duarum variabilium æquationis $m + n = a$ Syſtematis baſis datæ; proindeque in extremo hoc caſu $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a}{2} . \frac{a}{2}$ indicabit ſummam duorum rectangulorum maximorum, vel quadratorum CL + Cl, vel unius quadrati cum altero rectangulo: idem dicas velim de aliis. Quod ſi quis a me quærat, quænam interſit differentia inter utroſque modos concipiendi eamdem quantitatem $\frac{aa}{4}$; dico nullam intereſſe in extremo hoc limite, ſi ad quantitatem, multam tamen ſi ad poſitionem attendas: unum enim eſt in parte alterutrius oppoſita. Quod ſi ad geneſim advertas, & ad caſus intermedios, conſtabit quadratum eſſe aggregatum infinitorum rectangulorum ejuſdem baſis $\frac{a}{2} = BC$, ac altitudinis variabilis: rectangulum vero maximum AC . BC conflari ex aggregato infinitorum rectangulorum & baſis, & altitudinis variabilis, quæ tamen baſis cum altitudine ſemper æqualis eſt duplo valori baſis datæ quadrati AC: quod quantum conferat animadvertiſſe, inferius patebit. Præter vero hanc indicatam ejuſdem formulæ ambiguitatem, ſi addas quodlibet latus cujuſcumque rectanguli, vel quadrati ſumi poſſe tamquam baſim, atque hinc inde erigi poſſe alterum normale latus ex puncto dato in quadrato, ex puncto variabili in rectan-

ctangulo, quiſque videt quanta ex una formula oriatur indeterminatio. Quamobrem ſi, uti vidimus Libro I., opus eſt conſtructione legibus illic deſcriptis peracta, ut dijudicare poſſimus & ſecernere ſummam a ſubtractione; potiori jure hîc enitendum erit ut quædam regulæ inveniantur & tradantur, quibus liceat opportuna conſtructione ambages omnes evitare, in quas infinitimoda hæc indeterminatio quantitatum ſecundæ dimenſionis nos conjicit, & ambiguitatem valoris, prout res fert, determinare. Ut autem id obtineamus, cum in æquationibus iſtis longe magis operoſum ſit ac difficile quam in linearibus, ſequentem juvat inire viam.

§. 26. Invenimus §§. 13. & ſeqq. hujus Capitis, data æquatione lineari Syſtematis baſis datæ $m + n = a$, rectangula omnia, quæ a producto duarum variabilium eamdem ſemper inter ſe ſummam a conſtituentium oriuntur, contineri a loco geometrico rectilineo conflato a diagonalibus (*fig.* 3.) BN, NA, AN′, N′B. Locus BN eſt locus ad quem pertinent omnia rectangula a minimo uſque ad maximum, quæ fiunt a producto variabilium m & n, quæ continentur in quadrilatero AlNB, donec m eſt major $\frac{a}{2}$, ſive n minor, in quo Al eſt linea, quæ continet abſciſſas omnes a minima A uſque ad maximam Al, ſuntque ordinatæ AB, gE, maxima AB $= a$, minima vero lN $= \frac{a}{2}$; & BN erit locus. Hac methodo inveniuntur & reliqua. Ita NA eſt locus quadrilateri BLNA; AN′ quadrilateri NlAN′; N′B quadrilateri NLBN′. In primo quadrilatero AlNB, AB.o eſt minimum rectangulum æquationis $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}\,.\,o = \overline{AC + CB}\,.\,B = AB\,.\,B$; in qua æquatione n ſemper eſt minor $m = AD$, & $\frac{a}{2}$ eſt $= CB$, cum n minima $= B$, maxima $= BC$. In hoc itaque minimi rectanguli caſu erit $n = B$ minima, $CD = CB = \frac{a}{2}$ maxima, & AB maxima $= a$. In puncto vero N (in quo caſu mn maximum $= AC\,.\,BC$), in æquatione $mn = \overline{AC + CB - BD}\,.\,BD = \overline{AC + CD}\,.\,BD$ erit $CD = o$ minima, AC vero & BC æquales, ſive $m = n = \frac{a}{2}$. Quando igitur rectangulum eſt minimum, variabilium æquationis $m + n = a = AC + BC$ eſt una maxima, altera minima; æquationis vero $CB = \frac{a}{2} = CD + BD = m + n$, $CD = m$ eſt maxima $= \frac{a}{2}$, $BD = n$ minima $= o = B$: quando vero eſt

maxi-

maximum, radices æquationis $m + n = a$ æquantur inter ſe, & ſingulæ $= \frac{a}{2}$; ſeu $m = AC$, $n = BC$: radicum vero æquationis $CB = CD + BD = m + n = \frac{a}{2}$, quæ CD erat maxima in primo caſu, fit hîc minima $= 0$, & $n = BC$ fit maxima, quæ erat minima, quando rectangulum erat minimum, ſive nullum. Itaque æquationis integræ $m + n = a$ in caſu rectanguli minimi una radicum fit maxima, altera minima: in caſu rectanguli maximi æquantur inter ſe, proindeque ſingulæ æquantur $\frac{a}{2}$ dimidiæ baſi: at radicum æquationis dimidiæ $CB = CD + BD = m + n = \frac{a}{2}$, quando rectangulum eſt minimum, una eſt maxima $= \frac{a}{2}$, altera minima $=$ B; quando vero rectangulum eſt maximum, quæ erat minima fit maxima $= BC = \frac{a}{2}$, & quæ maxima fit minima $CD = 0 =$ C. Hoc inferius multum proderit animadvertiſſe.

§. 27. In hoc tamen puncto N (*fig. ead.* 3.), in quo rectangulum AE eſt maximum, fit nullum rectangulum N′E quadrilateri N′L′BN, quod erat maximum in puncto B, quando AE erat nullum; locuſque horum rectangulorum in hoc ſecundo quadrilatero contentorum eſt eadem diagonalis NB, ſed inverſe deſcripta, ut ubi in B erat nullum $=$ AB. B rectangulum quadrilateri primi, tamquam principium fluxionis ac deſcriptionis diagonalis BN, fit maximum rectangulum quadrilateri N′L′BN, ac finis fluxionis & deſcriptionis diagonalis ejuſdem, ſed inverſæ NB. Huic rurſus puncto N reſpondet & alterum maximum rectangulum quadrilateri BLNA, & diagonalis AN, & alterum minimum quadrilateri NLBN′, & diagonalis N′B. Idem dicas de aliis oppoſitis diagonalibus AN′, N′B, quæ ſunt tamquam loca geometrica rectangulorum ab aliis quatuor quadrilateris contentorum, quæ eo ordine, quo alia recenſuimus, procedunt. Itaque in unoquoque puncto B, N, A, N′ duo maxima rectangula, & duo nulla, ſive minima incipiunt: hæc ex zero minimo uſque ad rectangulum maximum $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$; illa a rectangulo maximo $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ uſque ad zero progrediuntur: atque hoc modo, a puncto B incipiendo BN′, NA, AN′, N′B ſucceſſive & ordine deſcribuntur diagonales, vel a rectangulis minimis baſis maximæ a uſque ad maxima baſis minimæ $\frac{a}{2}$ contentis in quadrilineis, quæ in *Schemate* verticaliter ſuis diagonalibus reſpondent

(I) Diagonales	BN	, NA	, AN′	, N′B
Quadrilatera	ABNl	, N′NAl′	, BAN′L′	, NN′BL
Baſes maximæ	AB	, N′N	, BA	, NN′
Baſes minimæ	AC	, N′C	, BC	, NC
Rectangula max.	Cl	, Cl′	, CL′	, CL :

vel a rectangulis maximis ſucceſſive diminutis, contentis in quadrilineis ad minima

(II) Diagonales	BN	, NA	, AN′	, N′B
Quadrilatera	N′NBL′	, BANL	, NN′Al	, ABN′l′
Baſes maximæ	N′N	, BA	, NN′	, AB
Baſes minimæ	N′C	, BC	, NC	, AC
Rectangula max.	CL′	, CL	, Cl	, Cl′ :

vel a rectangulis, quorum primum incipiens a minimo excipitur ab altero maximo, & ſic ſucceſſive alternando

(III) Diagonales	BN	, NA	, AN′	, N′B
Quadrilatera	ABNl′	, BANL	, BAN′L	, ABN′l
Baſes maximæ	AB	, minimæ BC	, maximæ BA	, minimæ AC
Baſes minimæ	AC	, maximæ BA	, minimæ BC	, maximæ AB
Rectangula max.	Cl	, CL	, CL′	, Cl′ :

Si quæ ordine erant ultima fiant ſucceſſive prima rectangula, tunc directio diagonalium eſt in parte contraria, ſcilicet BN′ + N′A + AN + NB; dummodo quæ erant maxima fiant minima, & contra.

§. 28. Quamobrem ſi (I).ª ſerie utaris, in qua a minimo uſque ad maximum progredientibus rectangulis, antecedens quodcumque ubi ad maximum pervenerit excipitur a proximo ſuo minimo; a quocumque minimo initium ducas, ſemper tamen intelligas oportet jam præexiſtentem ſeriem quamdam antecedentium rectangulorum maximorum, quæ ſingula ſucceſſive facta maxima excipiuntur a proximo minimo, quod & ipſum creſcens uſque ad maximum cum ſubſequenti proximo minimo ita conjungitur, ut numquam perfectæ continuitatis lex abrumpatur. Ita in punto B (*fig.* 3.), in quo rectangulum minimum quadrilateri ABNl eſt nullum $= AB . B$, intelligendum eſt rectangulum maximum quadrilateri ABN′l′, quod eſt $AC . CN' = AC . BC = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} = - BC . BC$; ſcilicet §. 24. æquale quadrato $(BC)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ negativo, ſive in parte oppoſita. Ergo concipiendum eſt maximum quadratum $N'B = \frac{a^2}{4}$ contiguum rectan-

ctangulo minimo A B . B quadrilateri primo aſſumpti A B N l, quod proinde huic rectangulo addendum eſt, ſemperque conſtans manet, quocumque modo rectangulum minimum A B . B augeatur per omnes intermedios magnitudinis gradus a minimo uſque ad maximum. Idem dicas de A B N′ l′, quod eſt contiguum rectangulo quadrilateri N N′ A l facto jam maximo, & æquali N C . A C, ſive per idem §. 24. æquali quadrato oppoſito C l′: & ſic ad infinitum. Ergo ſemper concipienda erit ſeries quædam infinita quadratorum $\frac{a^2}{4}$, quæ antecedat, & contingat quodcumque medium rectangulum; cui proinde præponenda eſt.

§. 29. Hinc rectangulum medium $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \cdot n$, ſi a prima ſerie ortum concipiatur, ab infinita Serie quadratorum $\frac{a^2}{4}$ jam exiſtente præoccupetur oportet, quæ omnia ut una æquatio complectatur, ſic erit efferenda $\infty + mn = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \ldots\ldots + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \cdot n$. Et ſane cum diagonales propoſitæ ſuo perimetro quadratum continuatum (*fig. ead.* 3.) concludant; quodcumque punctum B perpetuo fluens concipi poteſt, infinitis diagonalium omnium revolutionibus emenſis, iterum reverſum fuiſſe in B ad locum, a quo prius diſceſſerat. At iter hoc indefinitum puncti B, (I.ª) ſumpta ſerie, ſupponit, infinita rectangula continuo & ſucceſſivo fluxu a minimis ad maxima jam percurſa infinitum numerum quadratorum C L + C l + C l′ + C L′ + &c. ſucceſſive genuiſſe: ergo, ſic concepto fluxu puncti B, erit

$$(\text{I.}^a)\; mn = \infty + mn = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \ldots\ldots + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \cdot n.$$

Series vero (II.ª), quæ progreditur ſucceſſive a maximis ad minima, poterit repræſentari ab æquatione

$$(\text{II.}^a)\; mn = 0 + mn = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \ldots\ldots + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \cdot n$$

$= 0 + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \cdot n$: ſupponit enim jam præexiſtens rectangulum maximum ſucceſſive decreſcendo ad nihilum redegiſſe quadratum $\frac{a^2}{4}$ quod genuerat, jam minimum factum.

§. 30. Tandem (III.ª) Series 27. dabit æquationem

$$(\text{III.}^{am})\; mn = \frac{\infty}{2} + mn = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \ldots + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \cdot n.$$

Rectan-

Rectangulum enim primo minimum uſque ad maximum augetur, producitque $\frac{a^2}{4}$ $=$ Cl: at ſecundum deſtruit maximum CL $= \frac{a^2}{4}$ jam præexiſtens, decreſcendo uſque ad nihilum: tertium e minimo producit CL′: quartum maximum jam exiſtens genitum Cl′ deſtruit, decreſcendo uſque ad nihilum: & ſic ad infinitum. Quod ſi (quemadmodum in fine ejuſdem §. 27. obſervavi) quæ erant maxima fiant minima rectangula, & viceverſa, tunc orietur æquatio

$$(\text{IV.}^a)\ mn = \frac{\infty}{2} + mn = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \ldots + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n.$$

In primo caſu æquationis (III.ᵃ) remanent quadrata oppoſita Cl, CL′ (ceteris Cl′, CL evaneſcentibus); in hoc vero annihilatis Cl, CL′ permanent infinita quadratorum paria Cl′, CL.

Et ſane ſi (III.ᵃ) & (IV.ᵃ) addantur, erit

$$\frac{\infty}{2} + mn = \frac{a^2}{4} + 0 + \frac{a^2}{4} + 0 + \frac{a^2}{4} + 0 \ldots\ldots + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$$

$$= \infty.\overline{\text{Cl} + \text{CL}} \ldots\ldots \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$$

$$\frac{\infty}{2} + mn = 0 + \frac{a^2}{4} + 0 + \frac{a^2}{4} + 0 + \frac{a^2}{4} \ldots\ldots + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$$

$$= \infty.\overline{\text{Cl}' + \text{CL}} \ldots\ldots \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n;$$

ſive $\frac{\infty}{2} + mn + \frac{\infty}{2} + mn = \infty.\overline{\text{Cl}+\text{CL}'} + \infty.\overline{\text{Cl}' + \text{CL}} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$:

at $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$; ergo, hac dempta ex utraque parte, tandem

erit $\frac{\infty}{2} + \frac{\infty}{2} + mn = \infty + mn = \infty.\overline{\text{Cl}+\text{CL}'} + \infty.\overline{\text{Cl}'+\text{CL}} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$,

ſive $\infty + mn = \text{CL} + \text{Cl} + \text{Cl}' + \text{CL}' + \text{CL} + \text{Cl} + \text{Cl}' + \text{CL}' \ldots \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$,

ſive $\infty + mn = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \ldots\ldots + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$, quæ eſt (I.ᵃ).

Quare (I.ᵃ) ſupponit præexiſtentem jam infinitam ſeriem rectangulorum maximorum,

rum, ſive quadratorum totius integræ revolutionis diagonalium, ſive infinitam ſeriem $\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = a^2$ integri quadrati $(AB)^2 = a^2$; (III.ª) ac (IV.ª) infinitam ſeriem quadratorum $Cl + CL'$, $Cl' + CL$ e diametro oppoſitorum.

§. 31. Hiſce, quibus opportune in Parte II. utemur, in anteceſſum animadverſis, ſumamus jam a nobis propoſitas æquationes ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis datæ

$$mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \,.\, n = \overline{\frac{a}{2} + m} \,.\, \overline{\frac{a}{2} - m}$$

$$= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m} \,.\, m = \overline{\frac{a}{2} + n} \,.\, \overline{\frac{a}{2} - n};$$ & vocata (ut prius)

$AD = m$ (*Tab. V. fig. ead.* 3.), $BD = n$, ut ſit $m + n = AC + BC = a$, ac in duas diviſa æquatione, erit

$$(1)\; mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \,.\, n = \overline{AC + BC - BD} \,.\, BD = \overline{\frac{a}{2} + m} \,.\, \overline{\frac{a}{2} - m}$$

$$= \overline{AC + m} \,.\, \overline{BC - m} = \overline{AC + CD} \,.\, \overline{BD + DC - DC}$$

$$= \overline{AC + CD} \,.\, BD = AD \,.\, BD:$$

$$(2)\; nm = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m} \,.\, m = \overline{BC + AC - Ad} \,.\, Ad = \overline{\frac{a}{2} + n} \,.\, \overline{\frac{a}{2} - n}$$

$$= \overline{BC + n} \,.\, \overline{AC - n} = \overline{BC + Cd} \,.\, \overline{Ad + dC - dC}$$

$$= \overline{BC + Cd} \,.\, Ad = Bd \,.\, Ad;$$

quas quiſque videt non eſſe identicas: (1)ª enim repræſentat rectangulum medium $AD \,.\, BD$ contentum in quadrilatero $ABNl$, (2.ª) rectangulum medium in parte oppoſita $Ad \,.\, Bd$ quadrilateri $BANL$; nec una alteri exacte quantitate & identitate æquatur, niſi ponas vel (1.am) $m \,.\, n = (-m) \,.\, (-n) = (-AD) \,.\, (-BD) = Bd \,.\, Ad$ (facta $-AD = Bd$, & $-BD = Ad$); vel (2.am) $m \,.\, n = (-m) \,.\, (-n) = (-Bd) \,.\, (-Ad) = AD \,.\, BD$ (facta $-Bd = AD$, & $-Ad = BD$): quo artificio ab uno ad alterum quadrilaterum fit tranſitus, ut ſupra vidimus. Ponamus nunc $n = 0$, ut ſit $m = \frac{a}{2}$ (vidimus enim in ſecundo membro n, vel m maximam non poſſe ſuperare $\frac{a}{2}$, quippe oriuntur ab æquatione $m + n = \frac{a}{2}$; cum

rectangulum maximum nequeat ſuperare $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$; & (1.ª) dabit $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - 0} \cdot 0$ $= \overline{AC + CB} \cdot B = AB \cdot B$, rectangulum nullum, ſive minimum quadrilateri ABNI. At poſito valore eodem in (2.ª) invenitur (2.ª) $nm = \overline{BC + CA - AC} \cdot AC = BC \cdot AC$, quod eſt rectangulum maximum quadrilateri BANL.

§. 32. Quare illud diligenter animadvertendum, non poſſe ſcilicet in hujus formæ æquationibus ſecundæ dimenſionis limitem unum haberi, niſi alter huic ex oppoſito reſpondeat; & in iis æquationibus, quæ a producto duarum variabilium Syſtematis baſis datæ $m + n = a$ proficiſcuntur, ſemper limiti minimo æquali zero reſpondere limitem maximum $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, ideoque inter hoſce limites minimum & maximum æquationes illas intermedias contineri, quæ rectangula omnia a maximo uſque ad minimum cujuſcumque quadrilateri ſuperius indicati complectuntur. Porro cum maximum $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ tam poſſit repræſentare (uti vidimus §. 24.) rectangulum poſitivum maximum uniuscujuſque quadrilateri, quam quadratum negativum maximum æquale rectangulo maximo ejuſdem quadrilateri (cum rectangulum maximum ſemper in oppoſita ejuſdem quadrilateri plaga conſiſtat); erit in quadrilatero (*fig. ead.* 3.) ABNl rectangulum maximum $m \cdot n = AC \cdot BC = - BC \cdot BC = - (BC)^2 = CL$, ſcilicet æquale quadrato negativo, ſi ad idem quadrilaterum ABNl referatur. At ſi referatur ad quadrilaterum BANL, quadratum CL (quod relatum ad rectangulum maximum AC . BC quadrilateri ABNl erat negativum) relatum ad quadrilaterum oppoſitum BANL, cujus rectangulum maximum eſt $BC \cdot AC = CL$, erit poſitivum, hoc eſt idem ac quadratum CL. Ergo æquatio $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \cdot n$ $= \overline{AC + CB - BD} \cdot BD = \overline{\frac{a}{2} + m} \cdot \overline{\frac{a}{2} - m} = \overline{AC + CD} \cdot \overline{BC - CD}$ dabit rectangulum AD . BD: & hæc ipſa $mn = (- n) \cdot n = m \cdot (- m)$ $= - nn = - mm = - \overline{BC + CD} \cdot \overline{BC - CD} = - (BD)(BD)$ $= - (BD)^2 = - \left\{ \frac{a^2}{4} - m^2 \right\}$, ſive $- mn = m^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 = n^2$ $= \frac{a^2}{4} - m^2$, relatis omnibus ad idem quadrilaterum. Et $mn = \overline{\frac{a}{2} + m} \cdot \overline{\frac{a}{2} - m}$ $=$

deque earumdem limitibus rectilineis. 243

$= \overline{\frac{a}{2} - n} . \overline{\frac{a}{2} + n} = \frac{a^2}{4} - (m)^2 = m^2 = \frac{a^2}{4} - n^2$, relatis ad quadrilaterum BANL.

§. 33. Æquationem $- m^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 = - n^2 = \frac{a^2}{4} - m^2$ in Caput ſequens extricandam conjicimus: nunc in excutienda æquatione ſequenti maxime generali immorabimur

$$(\text{I.}^a)\ mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} . n = \overline{\frac{a}{2} + m} . \overline{\frac{a}{2} - m} = \overline{\frac{a}{2} + n} . \overline{\frac{a}{2} - n}$$

$$= \frac{a^2}{4} - m^2 = n^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 = m^2 .$$

Ac primum mn conſiderari poteſt vel ut rectangulum, vel ut quadratum; ſive vel ut productum duorum factorum diverſorum æqualium, vel inæqualium, vel ut productum unius & ejuſdem factoris in ſe ipſum ducti: notum eſt enim quadratum mediæ proportionalis geometricæ æquale eſſe quidem rectangulo duarum extremarum, at rectangulum non eſſe idem numero & poſitione ac quadratum cui æquatur, & viceverſa. Sumamus igitur primo mn uti rectangulum: & in noſtra *figura* retenta eadem linearum denominatione, erit $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} . n = \overline{\frac{a}{2} + m} . \overline{\frac{a}{2} - m} = AD . BD$ quadrilateri ABNl, & $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m} . m = \overline{\frac{a}{2} + n} . \overline{\frac{a}{2} - n} = \overline{BC + Cd} . \overline{BC - CD} = Bd . BD = - Ad . BD$, ſi in eodem quadrilatero ABNl ſumatur: hoc tamen ex Cap. V. Lib. I. a veritate abludit. At vere $mn = Ad . Bd$ quadrilateri BANL; ergo $mn = \overline{\frac{a}{2} + m} . \overline{\frac{a}{2} - m} = AD . BD = \overline{\frac{a}{2} - n} . \overline{\frac{a}{2} + n} = Ad . Bd$: prima pertinet ad rectangulum quadrilateri ABNl; ſecunda oſtendit rectangulum quadrilateri oppoſiti BANL. In quibus quadrilateris ABNl, BANL m & n rectanguli mn in primo membro conſtituunt eamdem AB, & $m + n = AD + BD = Ad + Bd = AB = a$; utræque ſcilicet in eadem directione: at m & n, quæ ſunt in ſecundis membris ortæ ab æquatione $m + n = \frac{a}{2}$ ſunt quidem æquales quantitate, ſed poſitione diverſæ: in prima enim eſt $m + n = CD + BD = \frac{a}{2}$, in ſecunda $m + n = Cd + Ad = \frac{a}{2}$: ac proinde $(-m)$ & $(-n)$ in prima æquales $(+n)$, $(+m)$ in ſecunda

Hh 2

da, & viceverſa. Quare ſi in ſecundo membro æquationis $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n$ $= \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m$ permutentur variabiles, & loco n in prima ponatur $-m$, & loco m in ſecunda ponatur $-n$, erit æquatio $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-(-m)}.(-m)$ $= AB-(-m).(-m) = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-(-n)}.(-n) = BA-(-n).(-n)$, ſive $mn = -\left\{\frac{2am}{2}+m^2\right\} = -\frac{2ABm}{2} - m^2 = -\left\{\frac{2an}{2}+n^2\right\}$ $= -\frac{2BAn}{2} - n^2$; ſive, facta inverſione, $= \frac{2BAm}{2} - m^2 = BAm - m^2$ $= ABn - n^2 = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n$: quo artificio facta fuit quadrilineorum, & variabilium permutatio; & prima æquatio, quæ dabat rectangulum A D . B D, & quadrilaterum A B N l, indicat nunc rectangulum A d . B d, & quadrilaterum B A N L; & viceverſa ſecunda. Quando igitur quadrilatera ſuper eadem baſi A B, vel B A conſtituta ſunt, tranſitus fit ab uno ad alterum quadrilaterum ejuſdem baſis, ſi in æquatione $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n = 2.\frac{a}{2}.n - n.n$ loco n ponatur m, & in altera $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m$ loco m ponatur n: eſt enim $\overline{\frac{2a}{2}-n}.n = \overline{\frac{2a}{2}-(-m)}.(-m) = -\overline{(-a)-(-m)}.(-m)$, &, facta inverſione lineæ A B in B A, vel B A in A B, $= -\overline{(a)-(-m)}.(-m)$ $= am - m^2 = \frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m.m$.

§. 34. At ſi data eadem æquatione $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m$ fiat $m = 0$ minima, & $n = \frac{a}{2}$ maxima in ſecundis membris; tunc erit mn $= \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = AC . BC$ maximum rectangulum quadrilateri A B N l æqua-

le

le $\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}\cdot o$, ſive æquale minimo rectangulo non quadrilateri B A N L', ſed N'N B L': & poſita $n = o$, & $m = \frac{a}{2}$, erit $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}\cdot o$ minimum rectangulum quadrilateri A B N l', & $mn = \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}$ maximum rectangulum quadrilateri N'N B L'. Nam cum ſit rectangulum A E $= \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}\cdot n$ $= \overline{\frac{a}{2}+m}\cdot\overline{\frac{a}{2}-m}$, & B e $= \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}\cdot m = \overline{\frac{a}{2}+n}\cdot\overline{\frac{a}{2}-n}$, facta C D $= m = o$, ſive A D $=$ A C; erit etiam neceſſario C d $= n = o$, & A d $=$ A C, B d $=$ B C: ac proinde utraque rectangula tam A E quadrilateri A B N l, quam B e quadrilateri B A N L maxima: nequeunt igitur hujuſmodi duo rectangula æquationibus propoſitis ſimul comprehendi, atque definiri. In hoc tamen caſu, in quo eſt $m = n = o$, rectangula quadrilineorum N'N A l', N'N B L' fiunt minima, & fit $m = n = \frac{a}{2}$ maxima, cum C D $=$ C d $=$ D'E $=$ N D' $=$ D'e, quæ ſunt altitudines rectangulorum hujuſmodi quadrilineorum, factæ nullæ nulla reddunt & ipſa rectangula. Aliud igitur rectangulorum par inveniendum eſt, ut eodem tempore in quo m ſit maxima $= \frac{a}{2}$, altera n ſit nulla, & viceverſa.

§. 35. Ut igitur inveniantur quadrilatera æquationis $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}\cdot n$ $= \overline{\frac{a}{2}+m}\cdot\overline{\frac{a}{2}-m} = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}\cdot m = \overline{\frac{a}{2}+n}\cdot\overline{\frac{a}{2}-n}$ ea lege inter ſe conſociata, ut quando rectangulum unum eſt maximum, alterum ſit minimum, & verificetur æquatio $mn = \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}\cdot o$, quæ contradictioni a methodo vulgari damnatur; ſatis eſt animadvertere (poſita in ſecundis membris hac conditione, ut quando eſt minima $m = o$, ſit maxima $n = \frac{a}{2}$, & vice-

ver-

verſa) exhiberi a prima æquatione rectangulum A E quadrilateri A B N I, & a ſecunda rectangulum N′E quadrilateri N′N B L′ : quæ rectangula ita inter ſe conſtructionis neceſſitate ſunt comparata, ut primo creſcente a zero, ac deſcripta jam diagonali B N, facto maximo, alterum a maximo decreſcat uſque in N, & fiat zero; ac diagonalem jam deſcriptam N B inverſo itinere deſtruat . Nam quando ponitur B D, quæ eſt altitudo rectanguli A E maxima æqualis $BC = \frac{a}{2}$, neceſſario C D ſit zero: at cum hæc C D ſit altitudo rectanguli N′E contenti in quadrilatero N′N B L′, facta hac nulla, & ipſum ad nihilum redigatur oportet. Ergo non poteſt rectangulum contentum in uno horum quadrilaterorum ad maximum valorem aſſurgere, niſi alterum uſque ad minimum deprimatur . Hinc neceſſario conſequitur, ut uno eodemque tempore utraque conditio ſervetur; ita ut quando mn eſt maximum reſpectu unius quadrilateri, ſit nullum alterum reſpectu alterius quadrilateri; & in caſibus intermediis reciprocentur : & hoc ita abſolute neceſſarium, ut factores rectanguli mn in primo membro, æquales ſinguli $\frac{a}{2}$ nequeant producere rectangulum maximum, quin radicum alterius membri facta una maxima $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$, altera fiat zero.

§. 36. At variabiles m, n in ſecundo membro, ſi æquationem $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n$ ſpectemus, quæ pertinet ad quadrilaterum (*fig. ead.* 3.) A B N I, pendent ab æquatione $m + n = CD + BD = \frac{a}{2}$, & $m = CD = D'E$, $n = BD$; ſi vero ſumatur æquatio $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}\,.\,m$ rectanguli N′E quadrilateri N′N B L′, pertinent ad æquationem $n + m = CD' + ND' = \frac{a}{2}$, in qua $m = ND' = D'E = CD$, & $n = CD' = BD$. Nam facta in prima æquatione n maxima $= \frac{a}{2}$, eſt $CD = m = 0$; ergo in ſecunda $m = ND' = D'E = CD = 0$, & $n = CN = BD = \frac{a}{2}$ maxima . Ergo in primo caſu rectangulum eſt maximum A C . B C conflatum a factoribus æqualibus, proindeque $mn = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$; & in ſecunda rectangulum eſt nullum genitum a producto $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - 0}\,.\,0 = N'N\,.\,N$. Quo intellecto omnis tollitur repugnantia, quam

quam præſeferunt hujuſmodi æquationes; ac luce clarius patet in iiſdem æquationibus mn non eſſe identicum, nec ad unum tantum quadrilaterum pertinere, ſed eſſe duo ſimul rectangula hac conditione colligata, ut creſcente uno alterum decreſcat, & in limite extremo facto uno maximo alterum fiat zero, & viceverſa. Quæ vero huic conditioni ſimul ſatisfaciunt ſunt rectangula illa, non ejuſdem, ſed æqualis baſis per centrum C alteram normaliter, & biſariam ſecantis. Igitur tantum abeſt ut ſigno $=$, quod dicitur æqualitatis, ſemper perfecta æqualitas & identitas indicetur, ut in ipſa legitima æquatione $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \,.\, n$ $= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m} \,.\, m$ in limite extremo membrum unum ſit maximum $= \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, & alterum minimum $= 0$; unum tamen pro altero promiſcue uſurpari poteſt, dummodo ad illud rectangulum, ad quod pertinet, referatur.

§. 37. Quoniam vero numquam ſatis eſt pro rei dignitate atque neceſſitate in hiſce primis notionibus illuſtrandis atque inculcandis immorari, juvat ad ea quæ dicenda ſunt ulterius conſiderare in hac mutua Analyſeos cum Geometria conſociatione æquationem, qua concluditur affectio geometrica, natura ſua omnes, qui dari poſſunt caſus, comprehendi, qui arbitrio ab ipſa divelli nequeunt; niſi multiplicatis conditionibus ac datis id quod generalius erat, excluſionis methodo limitetur. Porro ſi in noſtra conſtructione poſitio & fluxio unius rectanguli ab æquatione exhibiti alia rectangula variabilia diverſo modo diſpoſita neceſſario determinet, quæ aliis ac diverſis in quantitate & poſitione modificationibus obnoxia ſint; profecto eadem ipſa conſtructionis neceſſitas, qua uno modo afficitur unum, & cætera diverſo modo afficiat neceſſe eſt. Quare diligenter cavendum, ne quæ cum eo a mente primum concepto termino mutatis circumſtantiis conciliari nequeunt, proindeque abſurda ſunt, judicemus univerſim etiam talia in aliis diverſis comparationis terminis ab ipſa eadem æquatione neceſſario comprehenſis. Itaque etſi ſæpe ac ſæpius liceat mente abſtrahere, ac ſeparare ab eo quod quærimus quæ inter ſe naturali vinculo colligantur, quia ad rem, quam quærimus, non pertinent; tamen quantitatis natura, atque ejus univerſitas mente ſemper eſt complectenda, ne mutatis circumſtantiis, aut ſimul (quæ eſt mentis imbecillitas) incaute inter ſe conjunctis quæ contradictionem involvunt, univerſim concludamus obtineri nullo modo poſſe quod quærimus. Ut id quod innuimus exemplorum ad rem noſtram conducentium appoſitione clarius percipiatur, ſequentes Tabulas hic ſubjicio, in quibus omnia rectangula variabilia in ſingulis quadrilateris contenta ita diſpoſita invenies, ut continuo & ſucceſſivo fluxu diagonales omnes ordinate deſcribant. Columnæ verticales (1.)[mæ] exhibent quadrilatera; (2.[dæ]) æquationes reſpondentes rectangulis mediis in unoquoque quadrilatero contentis: (3.)[æ] valores rectangulorum maximorum: (4.)[tæ] quadrata maxima æqualia rectangulis quantitate, non poſitione: (5)[æ] progreſſum, ac directionem rectangulorum in unoquoque quadrilatero a maximo ad minimum, vel viceverſa: (6)[tæ] diagonales ab extremitate rectanguli fluentis deſcriptas: (7)[mæ] tandem baſes datas, ac earum directiones unius Syſtematis linearis $m + n = a$.

TAB.

TAB. I.

(1)	(2)	(3) Rect. Max.	(4) Quad. Max.	(5)	(6) Diagonalis	(7) Baſis
ABNl	$mn = AE = AD.DE = AD.BD$	$AC.BC = Cl$	$\overline{BC}^2 = CL$	a min. ad max.	BN	AB
N'NAl'	$mn = N'e = N'D'.D'e = N'D'.ND'$	$N'C.NC = Cl'$	$\overline{NC}^2 = Cl$	a min. ad max.	NA	N'N
BAN'L'	$mn = Be' = Bd.d'e' = Bd.Ad$	$BC.AC = CL'$	$\overline{AC}^2 = Cl'$	a min. ad max.	AN'	BA
NN'BL	$mn = NE' = Nd'.d'E' = Nd'.N'd'$	$NC.N'C = CL$	$\overline{NC}^2 = CL'$	a min. ad max.	N'B	NN'

TAB. II.

(1)	(2)	(3) Rect. Max.	(4) Quad. Max.	(5)	(6) Diagonalis	(7) Baſis
N'NBL'	$mn = N'E = N'D'.D'E = N'D'.ND'$	$N'C.NC = CL'$	$\overline{NC}^2 = CL$	a max. ad min.	BN	N'N
BANL	$mn = Be = Bd.de = Bd.Ad$	$BC.AC = CL$	$\overline{AC}^2 = Cl$	a max. ad min.	NA	BA
NN'Al	$mn = Ne' = Nd'.d'e' = Nd'.N'd'$	$NC.N'C = Cl$	$\overline{N'C}^2 = Cl'$	a max. ad min.	AN'	NN'
ABN'l'	$mn = AE' = AD.DE' = AD.BD$	$AC.BC = Cl'$	$\overline{BC}^2 = CL'$	a max. ad min.	N'B	AB

TAB. III.

(1)	(2)	(3) Rect. Max.	(4) Quad. Max.	(5)	(6) Diagonalis	(7) Baſis
ABNl	$mn = AE = AD.DE = AD.BD$	$AC.BC = Cl$	$\overline{BC}^2 = CL$	a min. ad max.	BN	AB
BANL	$mn = Be = Bd.de = Bd.Ad$	$BC.AC = CL$	$\overline{AC}^2 = Cl$	a max. ad min.	NA	BA
BAN'L'	$mn = Be' = Bd.de' = Bd.Ad$	$BC.AC = CL'$	$\overline{AC}^2 = Cl'$	a min. ad max.	AN'	BA
ABN'l'	$mn = AE' = AD.DE' = AD.BD$	$AC.BC = Cl'$	$\overline{BC}^2 = CL'$	a max. ad min.	N'B	AB

TAB. IV.

(1)	(2)	(3) Rect. Max.	(4) Quad. Max.	(5)	(6) Diagonalis	(7) Baſis
N'NBL'	$mn = N'E = N'D'.D'E = N'D'.ND'$	$N'C.NC = CL'$	$\overline{NC}^2 = CL$	a max. ad min.	BN	N'N
N'NAl'	$mn = N'e = N'D'.D'e = N'D'.ND'$	$N'C.NC = Cl'$	$\overline{NC}^2 = Cl$	a min. ad max.	NA	N'N
NN'Al	$mn = Ne' = Nd'.d'e' = Nd'.N'd'$	$NC.N'C = Cl$	$\overline{N'C}^2 = Cl'$	a max. ad min.	AN'	NN'
NN'BL	$mn = NE' = Nd'.d'E' = Nd'.N'd'$	$NC.N'C = CL$	$\overline{N'C}^2 = CL'$	a min. ad max.	N'B	NN'

§. 38.

§. 38. Ex horum rectangulorum variabilium combinatione & fluxu, quæ oriuntur a producto duarum radicum unius Syſtematis integri linearis baſis datæ æquationis $m + n = a$, eruitur (1)° totum Syſtema ſecundæ dimenſionis hoc modo conflatum quatuor rectangula variabilia ſimul eodem tempore complecti, quæ ſimul totum Syſtema deſcriptione diagonalium exhauriunt, ita inter ſe connexa, ut uno variato cetera eam ſubeant mutationem, quam poſtulat prima variatio: (2.°) quatuor rectangula maxima ſimul ſumpta hujuſce Syſtematis æqualia eſſe rectangulo totali $a . a$, ideoque æquari quidem magnitudine quatuor quadratis, in quæ dividitur quadratum totale, ſed ſeorſim ſumpta poſitione diverſa eſſe a quadratis partialibus ſeorſim ſumptis. Jam ex ſola inſpectione columnæ (3)ª & (4)ᵗᵉ uniuſcujuſque Tabulæ palam fit rectangulum maximum cujuſcumque quadrilateri eſſe in parte oppoſita quadrati illius, ad quod pertinet. Ita rectangulum maximum quadrilateri (*fig. ead.* 3.) A B N l, ſive C l, eſt in parte oppoſita quadrati C L, ad quod & pertinet, & ipſi in hoc limite maximo æquatur: idem dicendum de aliis. Quare ſi ſumatur unum tantum & ſolitarium ex iſtis rectangulis totum Syſtema conſtituentibus, rectangulum maximum æquale erit quadrato in parte poſitiva poſito, ſive æquale quadrato negativo, & viceverſa; uti monuimus §. 24. At ſi ſimul ſumantur quatuor rectangula maxima, ſive totum Syſtema, omnia poſitiva ſumenda erunt; quodcumque enim quadratum, vel rectangulum partiale unius quadrilateri, quod eſt negativum reſpectu ſui rectanguli, vel quadrati, fit poſitivum relate ad aliud rectangulum, vel quadratum maximum alterius quadrilateri. Ita in *Tabula* I.ª rectangulum primi quadrilateri, quod eſt C l, eſt negativum relate ad ſuum quadratum C L; ſed idem eſt ac quadratum maximum alterius quadrilateri N′ N A l′, ideoque poſitivum: (3.°) denique eruitur quodcumque rectangulum medium promiſcue poſſe repræſentare unumquodque ex iſtis quatuor rectangulis Syſtema integrum variabile conſtituentibus: in *Tabula* enim III.ª in columna (2.ª) exhibetur tam rectangulum AD . DE, quam AD . DE′, & Bd . de & Bd . de′, cum ſingula (in columna 7.ª) ad eamdem baſim A B pertineant. Quinimmo & alia ſeorſim quatuor ad baſim N N′ referri poſſunt; cum ſit N N′ = N′N = A B = B A = a. Hinc evidentiſſime patet ratio, cur tam ex. gr. D E, quam D E′ cum ceteris ſumendæ ſint omnes poſitivæ (ut §§. 17, & ſeqq. demonſtratur), licet in parte invicem contraria conſtitutæ aliæ reſpectu aliarum dicantur negativæ. Altitudo enim & baſis ſingulorum rectangulorum ſimul ſumptæ æquantur a ſemper poſitivæ; proindeque earum portiones poſitivæ ſumendæ ſunt, cum A D, B D, vel N D′, N′D′ &c. in hoc Syſtemate ſemper ſint poſitivæ.

§. 39. In ſingulis *Tabulis* deſcriptis ita ſunt diſpoſita quadrilatera, ut horum rectangula maxima, vel quadrata ſimul connexa totum Syſtema exhauriant, ſive ſimul ſumpta æquentur rectangulo integro $a . a$, vel quadrato a^2; & rectangula media fluendo ſingula a minimo ad maximum, vel contra quatuor diagonales (quæ dant locum integrum geometricum) deſcribunt; proindeque variatione uniuſcujuſque fluentis cetera neceſſario vinculo colligata mutationem patiantur oportet. Videndum nunc quænam in ſingulis *Tabulis* pro diverſa quadrilaterorum combinatione differentia intercedat. In I.ª & II.ª *Tabula* ſimul uniuntur

tur duo rectangula baſis ejuſdem A B, ac duo alia baſis diverſæ N N′ ita diſpoſita, ut baſes alternatim ſibi ſuccedant: in III.ª & IV.ª quatuor rectangula ejuſdem baſis A B & N N′ eadem lege diſpoſita invenies, ut videre eſt in (7.ᵐᵃ) verticali columna. At in I.ª & in II.ª quando duo rectangula quadrilaterorum ejuſdem baſis fiunt minima, ſive nulla, alia duo alterius baſis fiunt maxima; & e contra. In III.ª vero & IV.ª omnia vel fiunt maxima eodem tempore, vel minima, cum ab eadem baſi proveniant. Quare in I.ª & II.ª variabiles m, & n ex Syſtemate baſis datæ $m + n = \frac{a}{2}$ alternando in æquationem uniuſcujuſque rectanguli fluentis erunt introducendæ, ut in limite duo maxima duobus minimis rectangulis reſpondeant. Itaque totum Syſtema *Tabulæ* I.ª & II.ª ſequentes complectuntur æquationes

$$(1)\; mn+nm+mn+nm = \begin{cases} \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m \\ \overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m}+\overline{\frac{a}{2}+n}.\overline{\frac{a}{2}-n}+\overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m}+\overline{\frac{a}{2}+n}.\overline{\frac{a}{2}-n} \\ \frac{a^2}{4}-m^2+\frac{a^2}{4}-n^2+\frac{a^2}{4}-m^2+\frac{a^2}{4}-n^2 \end{cases}$$

$$(2)\; nm+mn+nm+mn = \begin{cases} \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n \\ \overline{\frac{a}{2}+n}.\overline{\frac{a}{2}-n}+\overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m}+\overline{\frac{a}{2}+n}.\overline{\frac{a}{2}-n}+\overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m} \\ \frac{a^2}{4}-n^2+\frac{a^2}{4}-m^2+\frac{a^2}{4}-n^2+\frac{a^2}{4}-m^2 \end{cases}$$

in quibus, poſita una maxima, altera fit minima. At æquationes *Tabularum* III.ª & IV.ª erunt

$$(3)\; mn+mn+mn+mn = \begin{cases} \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n \\ \overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m}+\overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m}+\overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m}+\overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m} \\ \frac{a^2}{4}-m^2+\frac{a^2}{4}-m^2+\frac{a^2}{4}-m^2+\frac{a^2}{4}-m^2 \end{cases}$$

$$(4)\ nm+nm+nm+nm=\begin{cases}\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m\\ \overline{\frac{a}{2}+n}.\overline{\frac{a}{2}-n}+\overline{\frac{a}{2}+n}.\overline{\frac{a}{2}-n}+\overline{\frac{a}{2}+n}.\overline{\frac{a}{2}-n}+\overline{\frac{a}{2}+n}.\overline{\frac{a}{2}-n}\\ \frac{a^2}{4}-n^2+\frac{a^2}{4}-n^2+\frac{a^2}{4}-n^2+\frac{a^2}{4}-n^2\end{cases}$$

Prima & ſecunda ſingularum pertinent ad rectangula, tertia ad quadrata. Fiat primum $n=0$, ut ſit $m=\frac{a}{2}$, & æquationes ſingulæ, facta linearum ſubſtitutione pro ſymbolis, ad quæ revera ſingula mn pertinent, in ſequentes convertentur:

$$(1)\ mn+nm+mn+nm=\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}.0+\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}.0+\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\\ \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}.\overline{\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}+\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}.\overline{\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}+\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\end{array}\right\}\text{Rect. minimis, \& maximis, ſive}\\ \frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-(on)^2+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-(on)^2\ \text{Quadr. minimis, \& maximis;}\end{cases}$$

$$(1)\ AE+N'e+Be'+NE'=\begin{cases}AB.B+N'C.NC+BA.A+NC.N'C\\ AB.B+Cl+BA.A+CL\quad\text{Rect.}\\ oCL+Cl+oCL'+CL'\\ (oBC)^2+(NC)^2+(oAC)^2+(N'C)^2\quad\text{Quadr.}\\ =(B)^2\qquad\qquad =(B)^2\end{cases}$$

$$(2)\ N'E+Be+Ne'+AE'=\begin{cases}\left.\begin{array}{l}N'C.NC\qquad NC.N'C\\ CL'+N'N.N+Cl+NN'.N\end{array}\right\}\text{Rect.}\\ \left.\begin{array}{l}CL+oCl+Cl'+oCL'\\ (NC)^2+(oAC)^2+(N'C)^2+(oBC)^2\\ \quad=(A)^2\qquad\qquad=(B)^2\end{array}\right\}\text{Quadr.}\end{cases}$$

$$(3)\ AE+Be+Be'+AE'=\begin{cases}AB.B+BA.A+BA.A+AB.B\quad\text{Rect.}\\ \left.\begin{array}{l}oCL+oCl+oCl'+oCL'\\ (oBC)^2+(AE)^2+(oAC)^2+(oBC)^2\end{array}\right\}\text{Quadr.}\\ =(B)^2=(A)^2=(A)^2=(B)^2\end{cases}$$

$$(4)\ N'E+N'e+Ne'+NE' = \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} N'C.NC + N'C.NC + NC.N'C + NC.N'C \\ CL' \quad + \quad Cl' \quad + \quad Cl \quad + \quad CL \end{array}\right\}\text{Rect.} \\ \left.\begin{array}{l} CL \quad + \quad Cl \quad + \quad Cl' \quad + \quad CL' \\ (NC)^2 + (NC)^2 + (N'C)^2 + (N'C)^2 \end{array}\right\}\text{Quad.} \end{array}\right.$$

§. 40. Conſecutionum, quæ ex una iſtarum *Tabularum* inſpectione ſponte ſua fluunt, prima eſt, quod quamvis iiſdem ſymbolis analyticis mn quodcumque rectangulum deſignetur; tamen in ſingulis iſtis æquationibus eadem formula analytica rectangula diverſa indicantur, & ita diverſa, ut in æquationibus (1.)[a], & (2.)[a] duo alternando fiant maxima, duobus aliis in nihilum abeuntibus; & viceverſa. Adde, quod non ſolum poſſunt quantitate differre, ſed & genere & natura quantitatis: nam vel ſunt quadrata, vel rectangula, & quæ ſunt quadrata vel rectangula, in rectangula vel quadrata convertuntur. Quare methodus communis, quæ ſemper iiſdem ſymbolis expreſſas quantitates in unum colligit, additione, vel ſubtractione (ſi ſigna ſint diverſa) prius facta, atque eamdem numero pluries repetitam ſupponit, incaute limitat quod natura ſua generalius eſt, & identitatem cum æqualitate confundit. Ita erraret qui in noſtris *Tabulis* primum membrum $mn + mn + mn + mn$ æquaret $4mn$, perinde ac ſi idem effet rectangulum quater ſumptum; ac gravius erraret, ſi idem ut rectangulum ſemper acciperet ea falſa ductus ratione, quod ſymbolis m & n ſpecie tenus diverſis expreſſum & indicatum fuerit: ex iſtis enim ſymbolis ignotum exhibentibus nihil de ejuſdem natura, & quantitate erui poteſt, niſi cum altero membro, quod vel reipſa totum datum eſt, vel artificiis analyticis aliquo modo limitatum, comparetur. Porro cum hoc comparationis membrum pro diverſa artificiorum analyticorum ratione varie affici poſſit & in magnitudine, & in natura; quid mirum ſi ignotum quod quærebatur iiſdem ignotis ſymbolis expreſſum modo unam, alteram modo naturam, & quantitatem induere poſſit?

§. 41. Illud etiam non minoris momenti conſequitur, duobus modis ad nihilum redigi poſſe quantitatem ſecundæ dimenſionis (ut vidimus in *Lib.* I. quantitati lineari evenire): vel auferendo totam, quanta eſt, invariabilem a calculo, quod fit ſubtractione ipſius a ſe ipſa; vel fluxus ipſius continuo diminuti annihilatione. Quod ut clarius percipiatur, rectangulum ex. gr. Cl in noſtris *Tabulis* & *figura* jam genitum tolli poteſt, ſi totum quantum eſt a *figura* auferatur, ſive ſubtrahatur identicum ab identico: vel poteſt fluendo continua diminutione a ſtatu, in quo eſt, per omnes magnitudinis gradus minores (ut puta A E) tranſeundo in nihilum tandem redigi. Modus tamen unus annihilationis neceſſario continet alterum: nam ex. gr. a formula (1)[a] primæ *Tabulæ*, in qua exhibetur rectangulum nullum ope æquationis $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, indicatur rectangulum maximum idem numero a ſe ipſo ſubtractum, ſive totum ſublatum, quia ſenſim diminutum ad nihilum pervenit: eadem tamen, ſi ita efferatur $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}} \cdot \overline{\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}$
$=$

$= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} \cdot o \frac{a}{2}$, nullum quidem docet eſſe, ſed diverſo modo nullum factum ac in primo caſu: cum hîc formula oſtendat, decreſcente altitudine ea ratione qua baſis creſcit, tandem hac facta maxima altitudinem minimam ſive nullam reddi: hinc nullum rectangulum A E, ſed linea maxima A B $= a$ in *figura* eſt intelligenda.

§. 42. Præter hoſce duos diverſos annihilationis modos quantitatibus linearibus communes, alter exiſtit modus annihilationis ſolis quantitatibus ſecundæ dimenſionis proprius, quem nobis exhibet eadem formula $mn = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$. Vidimus enim, ſuppoſito $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ quadrato proprie dicto, mn fieri quadratum m^2, vel n^2, proindeque ſignificare $(om)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, ſive quadratum nullum in utraque dimenſione: qui modus quantitatibus unius dimenſionis applicari nequit.

§. 43. Plura alia, & quidem ſingula maximi momenti ex hiſce *Tabulis* Corollaria eruenda in ſequentia, ac præcipue in *Partem* II.^{am} transferimus. Hîc maxime intereſt diligenter inveſtigare qua via liceat nobis a maximo, vel minimo rectangulo aut quadrato ad medium, vel viceverſa tranſitum facere, & quænam artificia analytica utriſque pro varia rectanguli vel quadrati natura ad hunc tranſitum legitime obtinendum applicanda ſint. In memoriam igitur revocemus quod ſuperius oſtendimus, quantitatem ſecundæ dimenſionis $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ tam ſignificare poſſe maximum rectangulum, quam quadratum maximum æquationis a nobis perpetuo aſſumptæ. Et primum conſideremus $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ tamquam rectangulum ortum a duobus æqualibus quidem factoribus, ſed diverſis; quod proinde rectangulum ab æquatione $mn = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, ſive ab æquatione $mn = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + o$ exhibetur. Et licet idem ſit quantitate tam $mn = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, quam $mn = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + o$; tamen multum refert in noſtra hypotheſi unam potius, quam alteram ex ipſis æquationibus aſſumere. Nam per primam numquam poteris a maximo illius rectanguli ad ejus medium deſcendere, ſi in eodem genere quantitatis perſiſtere velis; poteris vero, ſi ad ſecundam confugias.

§. 44. Et ſane, ſumpta æquatione $mn = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + o$, ex dictis cognoſcitur

tur hanc repræſentare valorem maximum rectanguli medii variabilis $mn = \frac{a}{2}n + \frac{a}{2}n - nn$, cujus maximum $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, in qua valor $n = \frac{a}{2}$ eſt maximus, ad quem aſſurgere poſſit n, cum pendeat ab æquatione $m + n = \frac{a}{2}$. Ergo facto n maximo, nn non poteſt ſuperare valorem $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$; proindeque tunc erit maximum mn, quando zero æquabitur $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = 0.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$; nullum quando $n = 0$. Hinc facile ex demonſtratis colligere eſt æquationem maximi $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ tunc dare medium, quando ſecundus factor $\frac{a}{2}$ maximus deſcendit intra limites $\frac{a}{2}$ & zero, atque etiam $-\frac{a}{2}$ primi factoris, qui ſemper in quantitate æquatur n. Hoc ſemel cognito, facile erit in quacumque æquatione hujuſce formæ $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ (conſiderata ut rectangula) ad medium rectangulum noſmet transferre, facto $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + 0 = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, ac tandem $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} - n.n$. Quare viam unam, qua licet in hoc Syſtemate a maximo ad medium tranſitum facere, ſervato quantitatis genere, ac eadem natura, nobis præbet *abſolutum zero*, quod cum cuicumque æquationi addi, vel demi poſſit ſine ipſius æqualitatis detrimento, hoc unum aptum eſt ad graviſſimum hoc negotium impervium adhuc proſpere conficiendum. Mirum hoc profecto eſt, ac vix credibile; ſed tamen perfecte congruit cum iis, quæ diximus Cap. V. Lib. I., ubi vidimus quantitates lineares, quæ bifariam ſectæ inter ſe æquabantur, additione vel ſubtractione ipſius zero inæquales intra certos limites fieri. At illic hoc artificio mutatur quidem linearum valor, atque etiam, ſi vis, directio, non vero natura; cum ſemper in genere lineari conſiſtat: hîc vero abſoluti zero ſubſidio utrumque, vel alterutrum ſervari, ac mutari poſſe, ulterius progrediens ſic demonſtro.

§. 45. Sumamus eamdem æquationem $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$; & ab hac ad quadraticam tranſeamus. Quoniam vidimus in hoc Syſtemate $m = -n$, & vi-

& viceverſa, & rectangulum $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = AC.BC = -(AC)^2 = -(BC)^2$ in noſtra *figura* 3; erit $mn = -mm = -nn = -\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$; ac proinde $mm = nn = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}\right)$ $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left\{-\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}$: ſed $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ eſt differentia duorum quadratorum quantitate, & identitate æqualium, proindeque per §. 42. $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = on^2 = om^2$; ergo $mm = nn = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - (on)^2$ $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - (om)^2$; & æquationes $mm = \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 - on^2$, & $nn = \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 - om^2$: & ab hoc maximo ad medium tranſeundo $mm = \frac{a^2}{4} - n^2$, $nn = \frac{a^2}{4} - m^2$.

Hoc modo ab æquatione primo ſumpta rectangulum medium $mn = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n.n$ exhibente ad mediam quadraticam zero abſoluti ope translati fuimus.

§. 46. Data vero æquatione quadratica maxima $m^2 = \frac{a^2}{4} - (on)^2$, ſcimus n^2 maximum æquari $\frac{a^2}{4}$, quia ſcimus n non poſſe excedere valorem $\frac{a}{4}$; ergo maximum $n^2 \times (o)^2 = (o)^2.\frac{a^2}{4} = o.\frac{a^2}{4} = \overline{1-1}.\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$; ergo m^2 $= \frac{a^2}{4} - (on)^2 = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right\}$: ſed $m^2 = -mn = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right\}$ $= -\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left\{-\frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2}\right\}$; ergo tandem $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$: &, facto tranſitu a maximo ad medium rectangulum, $mn = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n.n$. Item quoniam etiam $n^2 = \frac{a^2}{4} - (om)^2$; erit eodem progreſſu nm $= \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left\{+\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}\right\}$, & medium $mn = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m.m$:

quod

quod prorſus congruit cum iis, quæ ſuperius diximus de rectangulorum permutatione. Igitur, data æquatione $mn = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, in qua duæ variabiles ſpecie tenus diverſæ ſunt, ſi $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ quadratum velis, ſatis erit m, n eadem ſpecie deſignare, atque identicas ſumere, & viceverſa. Sed rem hanc fuſius in Parte II.ª tractabimus: hîc ſufficiat attigiſſe.

§. 47. Nunc hîc innuam, quomodo a minimo ad medium tranſitus faciendus ſit. Æquatio quadratica maximi $m^2 = \frac{a^2}{4} - (on)^2$, quæ eſt ad angulum rectum, dat æquationem mediam $m^2 + n^2 = \frac{a^2}{4}$, in qua poſito quadrato m^2 maximo $= \frac{a^2}{4}$, eſt $n^2 = \left\{ o \cdot \frac{a}{2} \right\}^2$, & viceverſa; & quadratum $\frac{a^2}{4}$ angulo recto oppoſitum conſtans, ſive baſis $\frac{a}{2}$. Itaque ſi $m^2 = \frac{a^2}{4} - (on)^2$ maximum; erit $(on)^2 = \frac{a^2}{4} - m^2$ minimum, ſive $n^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$ minimum. Ab hoc igitur minimo quadrato ſi velimus ad medium tranſitum facere, fiat $-\left\{ \frac{a}{2} \right\}^2$ variabile, & erit $n^2 = \frac{a^2}{4} - m^2$: ſed ex dictis $n^2 = \frac{a^2}{2} - m^2 = mn = \overline{\frac{a}{2} + m} \cdot \overline{\frac{a}{2} - m}$ rectangulo, ergo $mn = \overline{\frac{a}{2} + m} \cdot \overline{\frac{a}{2} - m} = \overline{\frac{a}{4} + \frac{a}{2} - n} \cdot n$. Hac ratione a minimo quadrato ad quadratum medium, & ab hoc ad medium rectangulum tranſitum fecimus. Vel dato minimo quadrato $n^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$, erit $n^2 = -mn = -\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, & $mn = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, ſive $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - om} \cdot om$; & medium $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m} \cdot m = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \cdot n$: hac vero diverſa methodo a minimo quadrato ad minimum rectangulum, & ab hoc ad medium rectangulum licet tran-

tranſire. Hiſce artificiis facile cuique erit a minimo rectangulo ad rectangulum, vel quadratum medium pervenire. Animadverto tamen in æquatione quadratica minima $m^2 = \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{a}{2}\right\}^2$ a me factum fuiſſe variabile quadratum ſigno *minus* affectum, ut ad æquationem quadraticam $m^2 + n^2 = \frac{a^2}{4}$ perveniremus, ne a Syſtemate ſecundæ dimenſionis orto a producto duarum variabilium Syſtematis linearis baſis datæ primo ſumpto deflecterem: ceterum licet quadratum poſitivum $\left\{\frac{a}{2}\right\}^2$ variabile ſupponere: ex qua ſuppoſitione oritur $m^2 = n^2 - \frac{a^2}{4}$, ſive $m^2 - \frac{a^2}{4} = n^2$; de qua æquatione, ut dixi, in Capite ſequenti agemus.

§. 48. Additione igitur, vel ſubtractione unius zero tranſitum licet facere a maximo ad medium variabile, ſive a minimo ad medium; hoc eſt ad ea omnia intermedia rectangula, vel quadrata invenienda, quæ intra limites Syſtematis baſis datæ linearis $m + n = a$ continentur: quo modo licet in eodem genere quantitatis quadraticæ, vel rectangulæ conſiſtere; vel, ubi lubet, facile ab uno ad alterum noſmet transferre. Videamus nunc curſim quid contingat, omiſſo penitus zero, noſtræ æquationi $mn = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$: in hac, poſito primum $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \left\{\frac{a}{2}\right\}^2$, erit mn vere quadratum; ideoque $m^2 = \left\{\frac{a}{2}\right\}^2$, quod erit ſemper conſtans, & ita invariabile, ut neque ad medium neque ad minimum liceat progredi, niſi addatur, vel ſubtrahatur, ut ſupra, zero abſolutum: idem dicas velim de rectangulo $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$. Nunc in rectangulo ponamus unam ex datis $\frac{a}{2}$ ſe minuendo fluere, fierique n; erit, poſito mn quadrato, $m^2 = \frac{a}{2} \cdot n$: at in hoc caſu baſis $\frac{a}{2}$ ſive (*fig.* 3.) AC ſemper conſtans erit, & $\frac{a}{2} \cdot n$ æquale rectangulo ex. gr. AC.CD' variabili, quod longe diſtat ab aſſumpto AE; etenim AE conſtat ex rectangulo baſis datæ $AC = \frac{a}{2}$ ductæ in variabilem DE, & ex rectangulo CD.DE variabili in utraque dimenſione, cum ſit $CD = \frac{a}{2} - n$, $DE = BD$ $= n$;

$= n$; nec ſuppetit methodus, ſine additione abſoluti zero, ab uno ad alterum tranſitum faciendi. Non conveniunt igitur hæc niſi in extremo limite maximi valoris m, vel $n = \frac{a}{2}$ in puncto N, quando $\frac{a}{2} . n = \frac{a}{2} . \frac{a}{2}$ eſt vel rectangulum maximum, vel quadratum æquationis aſſumptæ: in quo tamen caſu non licet ab uno ad alterum tranſire niſi abſoluti zero ſubſidio. Ceterum univerſim æquatio $\frac{a}{2} . n = m^2$ requirit rectangulum factum ab uno factore dato in alterum variabilem æquale quadrato, quod limitibus rectilineis non continetur, nec pendet ab æquatione lineari $m + n = \frac{a}{2}$; locuſque geometricus eſt (ut omnes norunt) ad Parabolam, quæ longe abludit a noſtra hypotheſi. Sed de hoc fuſius infra: nunc id tantum attigiſſe ſufficit, ut oſtendatur quantum zero abſolutum æquationi additum, vel ab eadem ſubtractum conducat, ne a Syſtemate ad Syſtema, neve a genere ad genus aberremus, nulla ſpe in viam a qua diſceſſimus iterum redeundi. Hæc animadverſio multum aliquando juvabit in Conſtructione Locorum Geometricorum, qua facile & Rollii ſententia contra Methodum communem inveniendi radices æquationum conſtructione Locorum a me in Præfatione indicata confirmatur, & Mathematicorum contra ſentientium male inſtituta defenſio infirmatur.

§. 49. Interim obſervandum quod, quemadmodum in æquatione quadratica $m^2 + n^2 = \frac{a^2}{4}$ dato $(n)^2$ maximo fit $(m)^2$ minimum, proindeque non poteſt in hac æquatione exiſtere maximum, niſi minimum eodem tempore ac ſimul cum maximo conjungatur; ita in æquatione rectangula $mn = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n . n$, non poteſt dari maximum, niſi in eadem æquatione minimum ejuſdem naturæ reperiatur. Nam ponamus primum maximum rectangulum $mn = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} + \frac{a}{2} . \frac{a}{2} - \frac{a}{2} . \frac{a}{2}$: verum $\frac{a}{2} . \frac{a}{2} - \frac{a}{2} . \frac{a}{2} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} . \overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} . 0$; ergo $mn = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} . 0$. Sed ex noſtris formulis invenimus $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} . 0$ eſſe formulam rectanguli minimi, & $\frac{a}{2} . \frac{a}{2}$ rectanguli maximi; ergo mn æquale maximo rectangulo plus minimo: cumque pateat ex *Tab. I.* & *II*, facto ex. gr. $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} . 0 =$ (*fig. ead.* 3.) AB.B, fieri maximum $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}} . \frac{a}{2} =$ N'C.NC; erit

$m\,n$

$mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.o =$ N′C.NC + AB′.B, ſive = maximo rectangulo C I′ quadrilateri N′N A I′ + A B.B. Quamobrem dato uno limite alter neceſſario reperiatur oportet, ex quorum alterutro vel ex utroque ad æquationem intra hoſce limites concluſam licet pervenire. Et ſane ſit $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$; erit ex demonſtratis $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n = \overline{\frac{a}{2} + m}.\overline{\frac{a}{2} - m}$; ſed $m = -n$, ergo $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n = \overline{\frac{a}{2} - n}.\overline{\frac{a}{2} + n}$: ergo facta $n = o$ tandem erit $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.o = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$. Quare cum in limite minimo rectangulorum, omnibus zero factis, nullum remaneat indicium quantitatis jam in nihilum redactæ; commodius ex limite maximo rectanguli, vel ex maximo limite æquationis quadraticæ $m^2 + (on)^2 = \frac{a^2}{4}$ (qui quoad quantitatem utrique communis eſt) tutum ſumi poterit indicium de natura & valore quantitatis intermediæ, & ab una ad alteram, limitibus utrique communibus, tranſitum legitimum anquirere.

§. 50. Sed jam nobis ad majora properantibus præcipuus ex hoc Capite fructus colligendus eſt, præter quædam ſparſim jacta ſemina, quæ in veritates non minoris ponderis in ſequentibus Capitibus erumpent. Obſervandum igitur primum æquationes omnes ſecundi gradus in hoc Capite recenſitas, cum oriantur ex producto duarum variabilium ea conſtanti lege conjunctarum, ut earum ſumma æquetur a datæ, ſuperſtrui fundamento Syſtematis linearis integri baſis datæ $m + n = a$. Quare maximus valor, ad quem pervenire poſſunt earum producta mn, eſt $(m + n)^2 = a^2$ ſive (facta una, vel altera variabili m maxima, vel minima) $m^2 = a^2$, $n^2 = a^2$: cum producta, vel quadrata, quæ a diviſione a in duas partes oriuntur ſimul ſumpta nequeant excedere quadratum, vel rectangulum aa maximum (ut patet): ideoque quocumque modo inſtituatur hujuſmodi variabilium diviſio, omnia quæ oriri poſſunt producta intra limites rectilineos quadrati maximi L I′ (*fig. ead.* 3.) contineantur oportet. Hoc igitur quadratum aa recte appellari poteſt *Syſtema totale* minora ſub ſe complectens, infra quod omnia quæ ad hoc negotium pertinent, aguntur, & extra quod omnia fiunt impoſſibilia: hoc eſt non pertinet ad hoc primo ſumptum generale Syſtema quicquid extra ipſum eſt, ſed ad alia Syſtemata referendum: ideoque Syſtema hoc ut totale ſumptum abſtrahitur, ac divellitur a ſpatio ejuſdem naturæ, ſive ſecundæ dimenſionis infinito prorſus, quo undequaque circumda-

datur; nec ullam ad hoc ſpatium indeterminatum relationem habet, neque quoad linearem poſitionem, neque quoad primum comparationis terminum, ſive unitatem, ad quam magnitudinem ſuam refert: cum omnia intra limites ſui Syſtematis circumſcripta atque concluſa eo prorſus modo agantur, & gubernentur, ac ſi tota extra ipſum exiſtens quantitas interminata, nulla eſſet. Hoc perfecte congruit cum iis, quæ diximus *Cap. I. Lib. I.*

§. 51. In hoc vere ſolitario Syſtemate quadratico aa, genito a Syſtemate lineari $m + n = a$ duobus tantum punctis datis A & B (*fig. ead. 3.*) terminato, punctum medium D ſeparationis unius variabilis A D $= m$ ab altera B D $= n$ ita indeterminatum eſt, ut ſine aliqua nova adjuncta circumſtantia nullo modo determinari poſſit, niſi in limitibus extremis. Problema igitur inveniendi ſingulas radices, quæ in ſe ductæ productum aa faciant, pendet ab æquatione $m^2 + 2mn + n^2 = a^2$, in qua nonniſi in limite extremo, quando una aut altera eſt zero, altera innoteſcit, quia fit a: in caſibus vero intermediis, niſi una ad libitum ſtatuatur data minor ipſa a, nullo modo determinari poteſt: neque aliam patitur conſtructionem, quam quæ a diagonali per medium quadratum ducta exhibetur.

§. 52. Ut vero infinita hæc indeterminatio aliquo modo intra anguſtiores limites circumſcribatur, ponamus baſim linearem A B $= a$ puncto medio C dato bifariam diviſam: ſtatim patet hoc adjuncto totum quadratum integrum aa in quatuor æquales datas partes dividi, quarum ſumma totum quadratum exæquet, ita ut ſingulæ etiam innoteſcant. Ergo aa, quod erat ſolitarium Syſtema & indiviſibile, quando a nullo erat dato puncto diviſa, dividitur in quatuor Syſtemata partialia data quadrata, vel rectangula, quæ proinde inter ſe licet contigua, invicem ſeparari poſſunt. Si hæc ſingula ut ſolitaria ſumamus, ſingula partiale Syſtema $\frac{a}{2} . \frac{a}{2}$ conſtituunt, quod oritur a Syſtemate lineari baſis datæ $m + n = \frac{a}{2}$: quo poſito æquatio prima Syſtematis integri, complectens hæc quatuor cognita partialia Syſtemata, diſpertiri poteſt in quatuor æquationes ſolitarias nullo appoſito vinculo inter ſe conjunctas, quarum unaquæque ad ſuum partiale Syſtema $\frac{a}{2} . \frac{a}{2}$ pertinens, peculiari modo ab aliis diverſo affici poteſt, neque in ceteras influere, niſi aliquo communi vinculo colligentur. Cum vero id pluribus modis obtineri poſſit, ut a ſimplicioribus ad magis compoſita deveniamus, ducantur (ut ſuperius fecimus) in *figura* 3.ª quatuor diagonales, quæ quadratum primo quadrato inſcriptum reddunt æquale dimidio integri: quo artificio quatuor partialia Syſtemata data $\frac{a}{2} . \frac{a}{2}$, quæ prius puncto dato C avulſa fuerant a Syſtemate integro, & facta ſolitaria iterum in unum quaſi corpus ope harum diagonalium coaleſcunt in qua-

quatuor quadrilatera in *figura* deſcripta & ſuperius memorata, quorum rectangula in unoquoque contenta a maximo ad minimum, vel viceverſa fluentia ſucceſſive, & ordine (uti vidimus) quatuor diagonales deſcribunt.

§. 53. Hac igitur conſtructione Syſtema integrum in quatuor quadrata, vel rectangula data $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ diviſum, dividitur in quatuor quadrilatera data, quorum naturam, propter ea quæ dicenda ſunt, multum refert cognoſcere. Quodcumque igitur quadrilaterum ex. gr. ABNI (*fig.* 3.) componitur a duabus partibus datis quadrato ſcilicet AN, & triangulo dato CBN, quæ proinde, licet contigua, invicem ſeparari poſſunt, atque ut ſolitaria cenſeri. Hac facta hypotheſi, patet quadratum AN maximum gigni a rectangulo fluente AC.CD′ datæ baſis $AC = \frac{a}{2}$, & variabilis $CD' = n$: at maximum triangulum CBN gigni a fluente rectangulo CD.DE variabili & quoad altitudinem & quoad baſim: ideoque AC.CD′ erit rectangulum medium inter quadratum AC nullum, & maximum AN: & CD.DE erit rectangulum medium in maximo triangulo CBN. Donec igitur ſolitaria hæc concipiuntur, in rectangulo $AD' = AC \cdot CD'$, fluens CD′ quemcumque valorem intra limites o, & $\frac{a}{2}$, ſive C, & CN obtinere poteſt: & in rectangulo CD.DE altitudo DE a o uſque ad $\frac{a}{2}$ progredi poteſt; ſed cum in hoc, altitudine creſcente, minuatur eadem quantitate baſis, hinc facta DE maxima, fit CD zero, & hujuſmodi rectangulum deſinit tandem in D.CN, ſive fit nullum. Hujuſmodi ergo rectangulum intra duos limites minimos oB, & oN continetur; hoc eſt a minimo in puncto B creſcit uſque ad maximum in puncto diagonalis medio (ut patet), a quo iterum fluendo minuitur, & iterum fit nullum in puncto N. Itaque hæc duo rectangula, licet contigua, nullam inter ſe habent communionem: primum enim pertinet ad quadratum AN; ſecundum ad triangulum CBN, quæ cum poſuerimus diviſa invicem, diviſa erunt & ſolitaria hujuſmodi rectangula.

§. 54. Ut vero hæc in unum quaſi corpus coaleſcant, aliquo communi vinculo ſunt conjungenda: quod hîc facile obtinebitur, ſi in utroque rectangulo eamdem altitudinem conſtituamus, hoc eſt ſi fiat CD′ æqualis DE: quo facto quadrilaterum ABNI conflatum a duobus Syſtematibus ſolitariis AC.CN & triangulo CBN unum tantum Syſtema conſtituit, cujus rectangula media a lineis rectis AB, BN, NI, IA concluduntur, ſive a perimetro ipſius quadrilateri. Verum quadrilaterum hoc non niſi una tantum diagonali BN definitur; atque ideo quatuor æqualia & ſimilia quadrilatera ſunt neceſſaria ad totum quadratum inſcriptum perficiendum. Hujuſmodi quatuor quadrilatera ita constructa ſunt, ut bina & bina habeant neceſſariam aliquam inter ſe ſocietatem: ita quadrilaterum ABNI communicat cum quadrilatero AN′NI ope quadrati CI; & AN′NI communicat

cat cum quadrilatero B A N′ L′ ope trianguli communis A C N′, &c. ut in *Tab.*: ac proinde intimo nexu alterius cum altero omnia inter ſe neceſſario connectuntur. Quo fit ut etiam rectangula media cujuſcumque quadrilateri, rectangulo in utraque dimenſione variabili E′ e inſcripto, mutuo vinculo colligentur; quo nulla cujuſcumque rectanguli altitudo mutari poteſt, quin cetera in aliis quadrilateris mutationem patiantur. Quorum opera eæ omnes combinationes, quas ſupra indicavi in *Tabulis*, perficiuntur, quibus totum exhauritur Syſtema a quadrato inſcripto quæſitum, quemadmodum *figura* 3.ª & §§. 37, & 38. oſtendunt.

§. 55. Quod ſi, eadem manente conſtructione, iterum nova inſtituatur revolutio, hæc tota quanta eſt veſtigiis primæ prorſus inſiſtens, nihil novi in appoſita conſtructione producit, ac proinde tamquam nulla cenſenda eſt non ſolum ipſa, ſed quotquot denuo, licet infinitæ, inſtaurarentur revolutiones, quæ proinde omnes quamvis infinitæ quæ ſuperſunt in tradita conſtructione, ſine erroris periculo æquales zero dici poſſunt, & revera ſunt. Quomodo vero e nihilo, in quo evaneſcunt in hac conſtructione, eruantur, & aliquid fiant in *Parte* II. demonſtrabo. Hic ſatis ſit innuiſſe modum, quo a Syſtemate integro $mn = aa$ æquationis linearis $m + n = a$, ad quatuor Syſtemata ſolitaria $mn + mn + mn + mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ ope diviſionis bifariam factæ integræ A B $= a$, & ab iſtis, artificio ſuperius tradito, ad quatuor quadrilatera data: nempe ope ſubſtitutionis zero, ex qua æquatio fit $mn + mn + mn + mn$

$$= \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2};$$

& facto tranſitu a maximis ad media

$$mn + mn + mn + mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n = \text{Rect.}$$

$$= \frac{a^2}{4} - m^2 + \frac{a^2}{4} - n^2 + \frac{a^2}{4} - n^2 + \frac{a^2}{4} - m^2 = \text{Quadr.}$$

inveniuntur rectangula media, vel quadrata cujuſcumque quadrilateri, ut innuimus in *Tabulis*, & fuſius in citata *Parte* II.ª demonſtrabimus. Ex his tamen leviter perſtrictis illud conſequitur in hoc Syſtemate limites rectilineos a nobis indicatos eſſe limites maximos, ideoque figuras omnes, quotquot conſtructione mutata inveniri poſſint rectilineæ, curvilineæ, &c. hiſce limitibus inſcriptas eſſe, nec extra divagari poſſe, ac perimetro in ſe redeunte ſpatium concludere, reſpuereque quamcumque *aſymptotum*: ſunt igitur nomine limitum maximorum definiendi, quibus, tamquam limes minimus, reſpondet zero: intra zero itaque, ut limitem minimum, & datam aliquam quantitatem, ut limitem maximum, omnia Syſtemata, quæ a baſi quadratica data procedunt, concludantur oportet.

§. 56. Hiſce explicatis, quæ maxime ſunt neceſſaria ad graviſſimum hoc, de quo agimus, negotium proſpere inchoandum; compendio facto, quæ in toto hoc Capi-

Capite demonſtravimus (quorum uſus inferius frequentior erit) in ſequentibus perſtringimus.

Def. I. *Productum illud duarum quantitatum linearium dicitur proprie quadratum, ſi conſtet duabus radicibus, non ſolum æqualibus, ſed etiam identicis, hoc eſt una & eadem numero radice in ſe ducta. Contra vero illud proprie dicendum erit rectangulum, quod oritur a producto duarum diverſarum radicum æqualium, vel inæqualium.* §. 33.

Prop. I. Quodvis quadratum in rectangulum, & contra quodvis rectangulum in quadratum converti poteſt ſine diſpendio æqualitatis. Demonſt. §§. 39. & 40.

Corollarium. Caute igitur diſtinguendum, quandonam eadem quantitas ſecundæ dimenſionis vicem gerat rectanguli, & quando quadrati; ne artificia, quæ ſunt propria unius generis, atque naturæ, male alteri applicentur; neve falſo credatur idem genus primo ſumptum permanere, licet artificiis, quibus utimur, in aliud genus quantitatis nobis inſciis translatum fuerit.

Defin. 2. *Syſtema quadraticum baſis datæ illud dico, in quo ſumma quadratorum variabilium Syſtematis baſis datæ linearis ſemper conſtans perſeverat.*

Prop. II. Quæcumque æquatio ſecundæ dimenſionis orta a producto duarum variabilium Syſtematis baſis datæ linearis, ad Syſtema quadraticum baſis datæ reduci poteſt. §§. 44, & 45.

Definitio 3. *Itaque impoſterum æquationem ſecundæ dimenſionis quamcumque ortam a producto duarum variabilium Syſtematis linearis baſis datæ, æquationem Syſtematis quadratici baſis datæ appellabo, ut & brevitati ſtudeam, & affinitatem perpetuo advertam, quam habet hoc Syſtema quadraticum cum ſuo Syſtemate lineari, in quo ſumma radicum ſemper conſtans eſt.*

Prop. III. In Syſtemate baſis datæ quadratico quodcumque quadratum, vel rectangulum variabile (quod dicam *medium*) a duobus limitibus maximo, & minimo circumſcribitur, in quos tandem continuo augmento, aut diminutione continua deſinit, & quos nequit prætergredi: maximum eſt quadratum, vel rectangulum datum & finitum, minimum quadratum, vel rectangulum nullum.

Prop. IV. In Syſtemate baſis datæ quadratico quodcumque quadratum, vel rectangulum datum, diviſione baſis linearis biſariam facta, dividi poteſt in quatuor alia quadrata, vel rectangula data partialia, quæ ſimul ſumpta totum integrum Syſtema æquant; & quæ ſumpta ſolitaria ſunt maxima in proprio Syſtemate §. 38.

Prop. V. In Syſtemate baſis datæ quadratico quodcumque partiale quadratum, vel rectangulum datum conſtituit Syſtema integrum totale ſolitarium, & maximum: ideoque quodcumque Syſtema quadraticum in quatuor alia Syſtemata partialia dividi poteſt.

Definitio 4. *Quodcumque Syſtema quadraticum baſis datæ tunc integrum appellabo, cum baſis linearis integra concipitur: ſolitarium, cum nulli comparatur: partiale vero, quando concipitur ortum a diviſione biſariam facta baſis datæ linearis alterius Syſtematis quadratici jam præexiſtentis, cui comparatur.*

Prop. VI. In Syſtemate baſis datæ quadratico quodcumque Syſtema partiale quadra-

dratum, eſt in oppoſita rectanguli maximi, cui æquale eſt, plaga conſtitutum. §§. 23, & 24.

Prop. VII. Itaque in quocumque Syſtemate quadratico baſis datæ quadratum unius, vel alterius variabilis poſitivum æquale eſt ipſarum rectangulo negativo, & viceverſa. §. 24.

Prop. VIII. Quantitates æquales, ſed non identicæ, licet ſigno *plus*, & *minus* notentur, dant ſummam, non differentiam, quæ non niſi in quantitatibus identicis locum habet. Quare ſigna *plus*, *minus* quantitatibus præfixa iiſdem legibus reguntur, quas tradidimus Cap. V., & VII. ſuperioris Libri, ac præcipue Can. I. & II, ut ambiguitas ſignorum tollatur, & additio a differentia, prout res fert, ſecernatur. At in æquationibus linearibus mutatur valor, vel directio linearum (prout, quemadmodum vidimus, ſumuntur identicæ, vel diverſæ) non natura: hîc valorem, directionem, naturam (aut omnia, aut bina, aut ſingula) mutari, aut ſervari poſſe oſtendimus.

Prop. IX. Quantitates æquales, ſed non identicæ, male (ut moris eſt) facta prius additione, vel ſubtractione in unum atque eumdem terminum, coeficiente præfixo, reducuntur. Hoc, quod æquationem expurgare dicitur, non licet niſi in quantitatibus identicis præſtare. §. 40.

Prop. X. Limites rectilinei maximi Syſtematis quadratici baſis datæ ſunt limites, intra quos quotvis figuræ rectilineæ, vel curvilineæ ortæ a varia partialium Syſtematum diviſione totæ continentur, & ſuo perimetro ſpatium claudunt. §. 55.

Prop. XI. In Syſtemate quadratico baſis datæ a quadrato, vel rectangulo medio ad maximum, vel minimum, vel contra licet tranſitum facere unius abſoluti zero ſubſidio, quo vel in eodem genere perſiſtere, vel ab uno ad aliud genus tranſire licet. §§. 44, 47, & 48.

Prop. XII. In Syſtemate baſis datæ quadratico æquatio, quæ dat maximum, continet & minimum; & e converſo quæ dat minimum continet & maximum; ideoque cuicumque æquationi limitis maximi addendum eſt zero, quod ſubintelligitur; & cuicumque æquationi limitis minimi addendum eſt maximum, quod cum minimo neceſſario conjungitur. §§. 35, & 36.

Prop. XIII. In Syſtemate baſis datæ quadratico valor & natura cujuſcumque producti duarum variabilium pendet tota a termino, qui ſumitur tamquam datus, cui comparatur: qui terminus cum variam naturam, & magnitudinem artificiis analyticis induere poſſit, varie etiam afficit & in magnitudine, & in natura productum ignotum & variabile, quod quæritur. Hinc nihil obſtat quin ab eadem formula varie modificata diverſæ radices erui poſſint, quarum productum ſingulis diverſis mutationibus reſpondeat. §§. 45, & ſeqq.

Prop. XIV. In Syſtemate baſis datæ quadratico quantitas, quæ in æquatione ſymbolo conſtanti (puta *a*) expreſſa tamquam data ſumitur, poteſt & ipſa fluere, & fieri variabilis: cum enim talis facta fuerit fluendo uſque ad maximum, non repugnat in reditu a maximo ad medium iterum fieri variabilis: quin immo hoc geneſis, & natura quantitatis flagitat. §. 43. Ita in noſtris formulis rectangulum ex. gr. maximum $mn = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ tunc fit, cum

fluens

fluens m ad maximum valorem $\frac{a}{2}$ pervenerit: ergo, ut iterum ad medium revocetur, neceſſario quæ erat in limite maxima fiat variabilis oportet, quin immo & nulla, cum a medio transfertur ad minimum. Hinc fieri poteſt variabilium in datas, ac datarum in variabiles tranſmutatio, quin terminorum tranſpoſitione quod erat poſitivum in negativum convertatur. Hoc artificio, & hac variabilium in datas permutatione, & viceverſa, invertitur directio, & poſitio linearum; ut quæ erant negativa fiant poſitiva, quemadmodum vidimus Lib. I., & in ſequentibus magis patebit.

Prop. XV. Maximus valor, ad quem pervenire poteſt rectangulum, vel quadratum cujuſcumque ex quatuor quadrilateris, in quæ diviſimus Syſtema quadraticum totale, ortum ab æquatione Syſtematis linearis baſis datæ $m + n = a$, eſt $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, vel $\left\{\frac{a}{2}\right\}^2$ quarta pars rectanguli, vel quadrati maximi Syſtematis integri $(m + n).(m + n) = a.a$, vel $(m + n)^2 = (a)^2$. §. 38.

Defin. 5. *Contiguum illud alteri dicitur, quod nullo interjecto medio alterum contingit quidem, ſed nec alterum afficit, nec ab altero afficitur: continuum vero quod unum in alterum ita influit, ut utrumque alterutrius mutationibus obnoxium ſemper ſit.*

Diligenter diſtinguendam eſſe *contiguitatem* a *continuitate* præter ea, quæ diximus in Cap. I. & V. Lib. I., §§. 54, 55, & 56. hujus Capitis ſatis aperte declarant: atque inſuper ex hoc ipſo Capite eruitur artificium, quo fiant continua quæ erant contigua, & viceverſa. Nam vidimus §. 32. non poſſe dari maximum rectangulum, niſi ex adverſo rectangulum nullum reperiatur. Itaque data æquatione $mn = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n.n$, quæ eſt continua; ſi fiat n maxima $= \frac{a}{2}$, erit ex eodem §. $mn + 0mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} \pm \left\{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right\}.\left\{\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right\} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} \pm \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - 0\right\}.0$: in hoc vero caſu æquatio dividi poteſt in duas ſolitarias æquationes, quarum prima ſit $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, & ſecunda $mn = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - 0.0$: ergo quæ erat una, & continua æquatio legitime ope limitis maximi & minimi dividi poteſt in duas æquationes ſolitarias, ac unaquæque in caſibus mediis diverſas affectiones ſubire. Eodem prorſus, ſed inverſo artificio, quæ ſunt ſolitaria fieri poſſunt contigua, & a contiguitate ad continuitatem pervenire. Sed de re hac tanti momenti in Analyſi, præter ea quæ in ſequentibus Capp. dico, in II.ª hujuſce Tomi Parte ex compoſito agam, cum *De legitima diviſione & unione Syſtematum ſecundæ dimenſionis* verba faciam.

Hæc bene intellecta, ac memoriæ conſignata, viam ſternent ad ea, quæ in ſequentibus Capitibus ſunt tradenda.

CAPUT II.

De limitibus rectilineis æquationis ſecundæ dimenſionis ortæ a producto duarum variabilium Syſtematis linearis baſis variabilis.

§. 1. Poſtquam limites rectilineos, quibus quodcumque Syſtema ſecundæ dimenſionis ſolitarium baſis datæ, nec non quatuor partialia, in quæ dividitur, Syſtemata circumſcribuntur in anteacto Capite invenimus: recta docendi ratio poſtulat, ut ad inveſtigandos limites rectilineos æquationum, quæ a producto duarum variabilium Syſtematis baſis variabilis oriuntur, accedamus. Ad hoc perficiendum, revocentur hîc æquationes §. 4. Cap. præcedentis, quas diximus gigni a producto duarum variabilium Syſtematis linearis baſis variabilis, quæ ſunt ſequentes

(I.)ª $mn = \overline{a+n}.n = -\overline{a+m}.m$, poſita æquatione Syſtematis linearis baſis variabilis $m = a+n$, vel $m-n = a$.

(II.)ª $mn = \overline{a+m}.m = -\overline{a+n}.n$, æquationis Syſtematis baſis variabilis $n = a+m$, vel $n-m = a$.

In (I.ª) n minima eſt zero, cui reſpondet m minima $= a$: in (II.ª) vero n minima eſt a, & m minima zero: ac proinde quando una eſt minima zero, altera eſt minima, licet æquetur quantitati datæ a. In hoc vero limite minimo Syſtematis baſis variabilis ſi ſumantur æquationes ſolitariæ $0mn = -\overline{a+m}.m$, & $0mn = -\overline{a+n}.n$; prima dabit $0n = -a+m$; ſecunda $0m = -a+n$: in prima $0n+a = m$, in ſecunda $0m+a = n$; ſive $m = a$ minima, $n = a$ minima, quæ ſingulæ pertinent ad diverſum Syſtema lineare baſis variabilis, neque inter ſe conciliari poſſunt: fieri enim nequit, ut in eodem Syſtemate ambæ ſint minimæ, & æquales eidem quantitati a. Adde quod hujuſmodi limitis æquationes $m = a$, $n = a$ pertinere etiam poſſunt ad Syſtema baſis daſis datæ $m+n = a$, in qua, facta n minima $= 0$, fit m maxima $= a$, & viceverſa. In hoc vero Syſtemate baſis variabilis, facta m minima $= a$, erit $n = 0$; & æquatio $m-n = a$: at, facta $n = a$ minima, erit altera $n-m = a$: in hac m poteſt eſſe zero, quod repugnat in altera; contra vero in hac repugnat n eſſe zero, quod in altera fieri poteſt.

§. 2. Ut vero hujuſmodi ambiguitas tollatur, ſciamuſque quandonam pertineat æquatio ad Syſtema baſis datæ $m+n = a$, facta n, vel m zero, altera fit maxima, & quando ad Syſtema baſis variabilis, & ſint minimæ, utque cognoſcamus

mus quando ab uno ad alterum Syſtema deferamur, ac demum liceat affectiones illas eruere apprime neceſſarias, quæ ex promiſcuo hoc Syſtematum commercio conſequuntur; confugiendum eſt ad æquationes, quas diximus *homologas*, quia ab eodem Syſtemate lineari profectæ, unam tantum variabilem continentes, mutuam ſibi opem præſtant: ideoque ſimul in unoquoque Syſtemate accipiantur oportet, ut, inter ipſas comparatione inſtituta, inoffenſo pede progrediamur. Data igitur æquatione ambigua limitis $o\,m\,n = -\,a\,m + m\,m$, quæ pertinere poteſt tam ad Syſtema baſis datæ, in quo a eſt maxima, quam ad Syſtema baſis variabilis, in quo e contra a eſt minima; ut determinetur Syſtema a quo orta fuit, ſumenda eſt æquatio illa homologa, quæ ſimul cum propoſita ad determinandum Syſtema concurrit. Sumpta æquatione $a\,n + n\,n = o\,m\,n$, determinatur Syſtema baſis variabilis; qua docemur æquationem limitis aſſumptam ad hoc Syſtema pertinentem pendere ab æquatione media Syſtematis baſis variabilis $m\,n = -\,a\,m + m\,m = a\,n + n\,n$, quæ oritur a Syſtemate variabili lineari $m = a + n$. Vocata igitur (*Tab. V. fig.* 2.) $AB = a$, & $BD = n$, erit $m = a + n = AB + BD = AD$, & æquatio media ſecundæ dimenſionis $m\,n = -\,\overline{a + m}\,.\,m = \overline{AD - AB}\,.\,AD = BD\,.\,AD = \overline{a+n}\,.\,n = AD\,.\,BD$; quæ rectangula ſunt æqualia, facta tamen factorum permutatione. Æquatio igitur propoſita a ſua homologa ſecum conſociata determinationem ſumit in Syſtemate lineari, a quo determinatur Syſtema ſecundæ dimenſionis, ad quod ſumpta homologa pertinet.

§. 3. Hoc cognito, quærendi ſunt limites proprii utriuſque variabilis in hac hypotheſi. Facta igitur prima §. 1. æquali zero, erit $o\,m\,n = -\,a\,m + m\,m$, ex qua eruitur $o\,n\,.\,\frac{m}{m} = -\,a + m$, ſive $o\,n = -\,a + m$; & $m = a + o\,n$ in limite, & $m = a + n = AB + BD$. Ergo m minima $= AB$, & $n = BD$, minima $= B$: ut igitur concilientur ſimul hujuſmodi æquationes, & ſint homologæ, neceſſe eſt ut, poſita in prima $m = a$ minima, ponatur in altera $n = o$; quo facto eſt $m\,(o\,n) = a\,n + n\,n = a\,(on) + (on)\,.\,(on)$, & $m = a + o\,n$, ac tandem $m = a + n = AB + BD$; atque omnia amice conſpirant. Verum ſi ſumpta ſecunda æquatione $m\,n = a\,n + n\,n$, quæratur variabilis in limite eadem methodo qua ſupra uſi ſumus, erit $o\,m\,.\,\frac{n}{n} = a + n$, ſive $o\,m = a + n$, quæ multum differt a Syſtemate lineari primo: in hoc enim fit $m = o$, & $n = -\,a$, ſcilicet poſitivum æquale negativo, quæ æquatio reſpectu primi Syſtematis eſt abſurda; ponit enim eodem tempore m intra limitem minimum a, & medium n, & etiam æqualem zero: quod fieri nequit. Ne tamen putes æquationem hanc ita a veritate abhorrere, ut univerſim tamquam abſurda ſit ejuranda. Nam ex hac deducitur $n = -\,a + o\,m = -\,AB + o\,m$: ſed $-\,AB = BA$; ergo $n = BA + o\,m$, & $n = BA + m = BA + Ad$: ac

 proin-

proinde devenimus ad æquationem linearem primæ oppoſitam, in qua $BA = a$, $m = Ad$, & $n = BA + Ad$, ſive $n = a + m$, ut ſit æquatio $n \,.\, m = \overline{BA + Ad} \,.\, Ad = Bd \,.\, Ad = \overline{a + m} \,.\, m = n \,.\, \overline{n - a} = -an + nn$; in quibus hîc minima $n = a = BA$, minima $m = 0 = A$. Ex quo conſequitur recte in hac diverſa ſuppoſitione, ſi rite tractentur æquationes homologæ, fieri variabilium & Syſtematis permutationem : & quæ erat abſurda in primo caſu, quia non poterat conciliari cum hypotheſi primæ æquationis, fit realis, dummodo prima huic ſecundæ morem gerens ad iſtiuſmodi nutum conformetur. Quare hîc erunt æquationes homologæ $nm = am + mm = -an + nn$: quibus magis magiſque confirmatur quicquid ſuperius oſtendimus in toto primo Libro, & in Capite ſuperiori de ſigno *minus*, quod permutationem indicare contendimus.

§. 4. Sed veritas hæc tanti momenti in tota Analyſi hactenus ignota eſt pluribus illuſtranda. Ex dictis eruitur æquationes omnes ſecundæ dimenſionis, quæ dicuntur *affectæ*, duobus modis æquari poſſe zero tamquam limiti minimo duarum dimenſionum. Etenim ſumpta ex. gr. formula ſuperiori $0mn = -am + mm$, erit primo modo $(0n)m = -am + mm$, & $0n \,.\, \frac{m}{m} = -a + m$, ſive in limite $m = a + 0n$, & $m = a + n$. Hoc tantum modo Analyſis communis in ſimilibus circumſtantiis univerſim, & perpetuo utitur. At luce clarius patet æquationem propoſitam æquari etiam poſſe zero, ſi variabilis in ipſo contenta ſit & ipsa zero: tunc enim erit $0m \,.\, n = -a(0m) + (0m).(0m)$, ſive $n = -a + 0m$; quæ eſt eadem, quam invenimus §. ſuperiori, dum æquationem limitis $mn = an + nn$ primo modo quæſivimus, quęque quemadmodum tractetur oſtendimus. Quod ſi ignoratione hujuſce duplicis modi, quo æquatio ſecundæ dimenſionis evaneſcere poteſt, fiat ſemper ab Analyſtis $n = -a + 0m$; quid mirum ſi, ducta hac ex. gr. in m, ſe ſe offerat æquatio $nm = -am$, & (facta m ex. gr. b) $nm = -ab$, ſive poſitivum æquale negativo, & extracta radice reale æquale imaginario? Nonne ſtatim ex dictis palam fit non Analyſeos, ſed male ipſa utentium culpa in damnum hujuſce ſcientiæ converti id quod natura ſua facilem, & elegantem ſuppeditat methodum, qua ab uno originis puncto A (*fig.* 2.) & directione AB ad punctum B, & ad directionem oppoſitam deveniamus? Curandum igitur potius erit, ut inveſtigemus quibus legibus regendi ſint iſti duo diverſi modi, quibus æquatio ſecundæ dimenſionis evaneſcere poſſit, & quomodo æquationibus homologis applicandi.

§. 5. Quoniam igitur quæcumque æquatio affecta ſecundæ dimenſionis duplici hoc modo ad nihilum redigi poteſt ; accipiamus primum æquationes homologas Syſtematis ſecundæ dimenſionis baſis datæ, nempe $mn = an - nn = am - mm$ æquationis linearis $m + n = a$, ſive, (*fig.* 1.) facta $m = AD$, $n = BD$, & $a = AB$, $m + n = AD + BD = a = AB$: horum valorum ſubſtitutione æquationes homologæ reperiuntur $mn = \overline{a - n} \,.\, n = \overline{AB - BD} \,.\, BD$
$= AD$

$= AD.BD = \overline{BA - AD}.AD = BD.AD$. Facta prima m zero, erit $(om)n = \overline{AB - n}.n$, & poſita $n = o$, erit $m(on) = AB(on) - (on).(on)$, ſive $m = AB - (on)$ maxima $= AB = a$, & minima $n = o = B$, ac media $m + n = a = AB$: & in ſecunda, facta $n = o$, erit $m(on) = a - m.m$, ſive $on = B = a - m$, & $m = AB = a$. Ab utraque igitur, diverſo hoc modo utentes, eaſdem maximam, ac minimam eruimus, atque in eodem Syſtemate æquationes propoſitas retinuimus, quæ ideo homologæ cenſendæ ſunt. At ſi fiat in prima $m = o$, erit $(om)n = an - nn$, & $om = a - n$, ſive n maxima $= a$, & m minima $= o$: hoc eſt vel $n = BA$, & $m = A$; vel facta variabilium permutatione, $n = AB$, & $m = B$. Quo utroque modo n, m erunt negativæ reſpectu primæ poſitionis; quippe eſt vel $n + m = BA = -AB$, ſive $-n - m = AB$, & $-n = m = AD$, & $-m = n = BD$, vel $n + m = AB$, & $AD = n$, $BD = m$. In ſecunda vero evaneſcente ut in primo caſu n, erit $on = a - m = BA - m$, & $on + m = BA$, ſive $on = B$ minimæ, & $m = BA$ maximæ. In prima igitur eſt n maxima $= AB$, & m minima $= B$; in ſecunda eſt

n minima $= B$, & m maxima $= BA$:

quæ conditiones in utraque nequeunt conciliari, & æquationes dici nequeunt revera *homologæ*. Ut vero hæc ultima homologa fiat, ſit oportet $m = o$, & æquatio limitis $om.n = am - mm = a(om) - (om).(om)$, ſive $n = a - om$, & $n + om = a$: quo facto omnia in utriſque conveniunt; & æquatio limitis utrique æquationi communis erit $n + m = BA = a$; quæ eſt prorſus oppoſita primæ, ſive $n + m$ hujus $= -m - n$ primæ, & $BA = a = -AB = -a$; & viceverſa. Hac igitur duplici inverſa ratione, qua hę duę ęquationes ad nihilum reducuntur, æquationes ſervantur homologæ, & ad oppoſitam directionem, ſive a poſitivo ad negativum tranſitus fit, quin ulla in æquatione reperiatur quantitas negativa.

§. *6*. Quomodo æquationes ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis variabilis & ſemper ſimul conſpirantes inter ſe cohæreant, & negativa vitentur, ſatis diximus §. 3. Videndum nunc quid accidat uni tantum æquationi, cui duplex hæc ſuppoſitio applicatur. Sumpta primum $mn = -am + mm$, & facta $n = o$, erit $on = -a + m$; ergo n minima $= o$, & m minima $= a$, & $m = a + n = AB + BD$ (*fig.* 5.); in qua $m = AD$, $n = BD$: at facta $m = o$, erit $om(n) = -a(om) + (om).(om)$, ſive $n = -a + om = -AB + om = BA + om$; & $n = BA + m = BA + Ad$: ergo $n = Bd$; & $m = Ad$, & $nm = a + m.m$: ſive terminus am, qui erat negativus, factus eſt poſitivus, & revera æquatio $mn = -am + mm = AD.BD = am + mm = Bd.Ad$. Hac igitur ſecunda ſuppoſitione a puncto A ad B, & ab una plaga ad oppoſitam deferimur, & $-am + mm$ converſa eſt in $+am + mm$, eodem licet ſymbolo expreſſa. Sumpta vero $mn = an + nn$, & facta primum

mum $n = 0$, erit $m = a + 0n$, ſive m minima $= AB$, n minima $= B$, & univerſim $m = AD$, $n = BD$; & $mn = an + nn = AD \, . \, BD$; ſive $m = AB + 0n = -BA + 0n = -a + n$, & $mn = -an + nn$: poſita vero $m = 0$, erit $0m = a + n$; ac proinde $n = -a + 0m = -AB + 0m$, & $n = -AB + m = -AB + Ad = -a + m$, & $nm = an + nn = -am + mm = \overline{BA + Ad} \, . \, Ad = Bd \, . \, Ad$: ſed ſuperius invenimus $Bd \, . \, Ad = am + mm$; ergo idem rectangulum $Bd \, . \, Ad$ æquari poteſt tam $am + mm$, quam $-am + mm$; ex quo conſequitur eadem formula $am + mm$, vel $-am + mm$ tam rectangulum $AD \, . \, BD$, quam oppoſitum $Bd \, . \, Ad$ ſignificari poſſe: adde quod rectangulum hoc æquale eſt etiam $Bd \, . \, BD$, & $AD \, . \, Ad$, quemadmodum demonſtravimus *Cap.* V. *Lib.* I. §. 52.; ex quo eruimus $Bd + Ad = AD + BD = AD + Ad = BD + Bd$; (quod multum præſtat animadvertere): æquatione vero $nm = -am + mm = am + mm = an + nn = -an + nn = AD \, . \, BD = Bd \, . \, Ad$ docemur, hac duplici ſuppoſitione in ſingulis æquationibus, ab una ad alteram plagam tranſitum fieri poſſe. Hæ inter ſe non poſſunt eodem tempore conciliari, poſita eadem æquatione Syſtematis linearis baſis variabilis, ſi in utraque ſuppoſitione in ſingulis æquationibus variabilis identica ſumatur: has vero æquari inter ſe poſſe quiſque videt, dummodo animadvertat tam $a + m$, quam $-a + n$, vel viceverſa, hîc ſummam, non ſubtractionem indicare, quemadmodum & in hoc, & in toto I. Libro paſſim oſtendimus.

§. 7. Quamobrem cum in omni æquatione ſecundæ dimenſionis orta tam a Syſtemate lineari baſis datæ, quam a Syſtemate lineari baſis variabilis, ſemper duæ variabiles neceſſario concurrant ad utrumque Syſtema lineare conſtituendum (linea enim integra data, a cui vel ſumma, vel differentia variabilium æqualis eſt, duobus terminis neceſſario definitur, a quorum alterutro alterutra variabilis originem fixam, ac permanentem ſuæ fluxionis ducit); non niſi in caſu limitis maximi, & minimi in Syſtemate baſis datæ, in Syſtemate baſis variabilis in limite minimo una tantum variabilis relinquitur, altera facta zero. Itaque in æquationibus, quæ dicuntur *affectæ*, cum una, vel altera tantum variabilis reperiatur in duobus terminis, qui æquantur rectangulo, duæ diverſæ æquationes ſumendæ ſunt, ut unaquæque variabilis ſeorſim habeatur, atque ex una valor limitis maximi, ex altera minimi in Syſtemate baſis datæ, in Syſtemate baſis variabilis valores variabilium ambo minimi eruantur. Porro hujuſmodi æquationes, ut id perficiant, & homologæ vere ſint, ea lege inter ſe conjungantur oportet, ut ſimul conſpirent ad eumdem valorem eidem variabili tribuendum, ſive ut ad idem Syſtema lineare pertineant: ſecus, quod erat utrique commune Syſtema, in duo Syſtemata inter ſe oppoſita diſtrahitur, neque amplius homologas æquationes conſtituit. Ita ſumptis duabus homologis æquationibus, in quarum prima variabilis minima poſita fuerit æqualis zero, in altera maxima $= a$ in Syſtemate baſis datæ, & item minima $= a$ in Syſtemate baſis variabilis; ſi in eadem æquatione operatio invertatur, & fiat maxima, quæ fuerat minima in Syſtemate baſis

datæ;

datæ; at in Syſtemate baſis variabilis a minima æquali zero ad minimam æqualem a tranſitus fiat; inverſa & in homologis inſtituatur ratio neceſſe eſt, ut in communi Syſtemate lineari perſeverent. Hoc tamen modo æquationes ſervantur quidem inter ſe homologæ, ſed mutatur Syſtema lineare (converſione negativarum in poſitivas permutatis variabilibus, ut exemplis ſuperius allatis palam fit): qua permutatione, negativis ſublatis, ab una ad alteram poſitionem, ab una plaga ad alteram oppoſitam manu veluti ducimur. Hinc patet uſus hujuſmodi æquationum homologarum ad vitandam æqualitatem poſitivi cum negativo.

§. 8. Quod ſi una tantum æquatio ſecundæ dimenſionis aut propoſita ſit, aut ſumi velit, in eadem eo artificio, quo §. *6.* uſi ſumus, ambo limites inveniendi ſunt; ſcilicet maximus & minimus in Syſtemate baſis datæ, ambo minimi in Syſtemate baſis variabilis: qui limites, licet uno eodemque tempore in eadem numero æquatione ejuſdem variabilis dari nequeant; ſimul tamen inveniri poſſunt, ſi ſumpta diverſa variabili, ex una, quæ erat identica, duæ diverſæ æquationes efformentur. Ita in noſtro exemplo, in quo §. *6.* ex data $mn = -am + mm$ eruimus alteram $mn = am + mm$, ſi ponatur m identica, non poteſt hæc eadem eſſe ſimul minima æqualis a, ut requirit prima æquatio, & etiam minima æqualis zero, ut ſecunda poſtulat: utrique tamen ſatiſfit, ſi m diverſa ſumatur, ſcilicet æquetur n; tunc enim æquationes $mn = -am + mm = an + nn$ recte cum veritate conſentiunt: facta enim $m = a$ minima, altera neceſſario eſt minima æqualis zero.

§. *9.* Hiſce artificiis non ſolum in eodem Syſtemate ſecundæ dimenſionis baſis datæ, vel baſis variabilis ſemper perſiſtimus, atque utraſque æquationes homologas communi ſemper vinculo conſociatas continemus; ſed etiam licet noſmet ab uno ad alterum Syſtema ope limitis minimi nullo negotio transferre. Nam, poſita primum æquatione Syſtematis baſis datæ $mn = an - nn = am - mm$, & poſita $m = 0$, erit $(0m)\, n = \overline{a - m}.m$, ſive $0 = am - mm$: ſed ſcimus hanc limitis æquationem communem eſſe cum æquatione limitis minimi Syſtematis baſis variabilis (quæ cum ſit $mn = -am + mm = an + nn$, erit prima, facta $m = 0, 0 = -am + mm$ proindeque vel hæc $-0 = am - mm$ æqualis æquationi alterius Syſtematis $0 = am - mm$, vel $-0 = -am + mm$ primi Syſtematis æqualis $0 = -am + mm$ ſecundi baſis variabilis): ergo, dato Syſtemate baſis datæ, & ſumpta æquatione limitis $-0 = -am + mm$, ſi hæc referatur ad Syſtema baſis variabilis, erit $-0 = -am + mm = 0 = -am + mm$; &, facto tranſitu ad mediam, erit $mn = -am + mm$ æquatio Syſtematis baſis variabilis orta ab æquatione lineari $n + a = m$. Simili prorſus modo nobis in Syſtemate baſis variabilis conſtitutis agendum erit, ut ad alterum baſis datæ Syſtema ducamur: ea ſolum differentia, quod hîc, cum ſit æquatio limitis $0 = -am + mm$, ut tranſitus fiat ad alterum Syſtema, ponendum eſt $-0 = am - mm = 0 = am - mm$. Quod ſi jubeamur, propoſita æquatione $mn = an + nn$ Syſtematis baſis variabilis, ad baſis datæ Syſtema tran-

ſitum

ſitum facere; haud difficile id conſequemur, ſi ſuam homologam accipiamus $mn = -am + mm$: nam ab hujus limite minimo (facta $n = 0$) facilem tranſitum ad Syſtema baſis datæ dari jam diximus; dummodo accipiatur æquatio $mn = an - nn$, & fiat $n = 0$, ut ſit $m = a$ maximus valor, qui tamen eſt minimus in æquatione propoſita $mn = an + nn$, vel in ſua homologa $mn = -am + mm$. Vel (quod idem eſſe oſtendimus) facta

$$mn = 0mn = an + nn = -\overline{(-a) + n}.n = -\overline{(+a) + n}.n,$$

erit $-0mn = \overline{a - n}.n = 0mn$, ac tandem $(0n)m = a(0n) - (0n).(0n)$, ſive $m = a - 0n$ maximus valor, qui erat minimus in æquatione propoſita limitis.

§. 10. Hac una methodo ſuperius a nobis tradita, qua fit $mn = 0$ in Syſtemate baſis datæ, licet invenire limites æquationum & variabilium Syſtematis baſis datæ, cum in hoc Syſtemate ſemper maximum cum minimo conſociëtur, neque duo minima, aut duo maxima eodem tempore poſſint conciliari, ideoque numquam $mn = 0.0$. Hac etiam methodo uti poſſumus ad inveniendos limites minimos Syſtematis baſis variabilis, & ab uno Syſtemate ad alterum tranſitum facere, dummodo ad ea artificia confugiamus, quæ §§. ſuperioribus adhibuimus, ne in negativum æquale poſitivo incidamus. Non, eſt tamen cur via prorſus inverſa ad totum hoc negotium proſpere conficiendum non liceat incedere in hoc Syſtemate baſis variabilis; hoc eſt a duobus limitibus maximis initium ſumendo, quos tum quæ diximus in Lib. I. cum ipſa æquatio $m - n = a$ nobis oſtendunt eſſe prorſus abſolute infinitos, inter ſe tamen differre quantitate data a. In hac igitur hypotheſi ponendum erit $mn = \infty . \infty$, ſive æquale producto infiniti in infinitum (nam quando una variabilis eſt infinita, altera etiam infinita ſit oportet): quo valore poſito in æquationibus, erit $mn = (\infty m).(\infty n) = \overline{a + n}.n = \overline{-a + m}\cdot m$; atque ex utraque deducitur $\infty m = a + n$, $\infty n = -a + m$; ſive $\infty m - a = n$, $\infty n + a = m$, qui ſunt limites infiniti, ſive maximi æquationis propoſitæ Syſtematis baſis variabilis. Hiſce æquationibus oſtenditur tam in prima, quam in ſecunda (∞m), (∞n) ſemper infinities majus eſſe valore dato a, quæ cum ſit data ſive conſtans ad libitum determinanda, nos docet variabiles propoſitas ſemper hanc datam a cujuſcumque valoris etiam infiniti intervallo prope infinito ſuperare debere: quemadmodum oſtendi in Cap. VI. Lib. I. *De Infinito* &c. Atque hinc illud maximi momenti conſequitur via hac inverſa ſemper ſcopulum illum æqualitatis ſcilicet poſitivi, & negativi evitari poſſe, in quem impingunt formulæ algebraicæ ad Syſtema variabile pertinentes, communi more tractatæ, ſive a limite zero deductæ; ideoque imaginarium omne a tota Analyſi, ubi lubet, perpetuo eliminari.

§. 11. Et ſane cum in Syſtemate baſis datæ æquationes homologæ ſint

$$mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m = (\textit{fig. } 3.)\ \overline{AC + CB - n}.n$$

$=$

$= \overline{BC + CA - m.m}$, ſi in prima ſit $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ negativa ſive $- AC - CB$, ſumatur ſecunda, cum ſit $- AC - CB = CA + BC = BC + CA$: quo modo vitatur negativum æquale poſitivo; & viceverſa: & cum in iſtis n, vel m maximam ſuperare non poſſe valorem $\frac{a}{2}$ in Cap. anteced. oſtenderim; etiam in hoc caſu idem malum vitatur. Quod ſi ponas in utraque, vel alterutra $mn = 0$, invenies vel $(0m)\,n = an - nn$, ſive $0 = a - n$, vel $m(0n) = a(0n) - (0n).(0n)$, ſive $m = a - 0n = a$. Ex hoc igitur Syſtemate baſis datæ vera imaginarii origo detegitur, atque etiam imaginarium ipſum perpetuo tollitur. Malum igitur hoc nonniſi e formulis Syſtematis baſis variabilis $mn = \overline{a + n.n} = \overline{-a + m.m}$ oriri poteſt: in prima, poſito $mn = 0$; in ſecunda, facta m minori a. Sed malum hoc non eſt neceſſarium, neque a natura æquationum productum, ſed ex falſa hypotheſi inconſulto a nobis facta, ipſa natura ęquationis linearis $m = a + n$ repugnante, ex qua ęquationes homologę ſecundę dimenſionis gignuntur: ſuppoſuimus enim m vel zero, vel minorem a, quando ęquatio propoſita jubet valorem minimum ipſius m non poſſe minorem eſſe a. Duobus tamen modis errori noſtro, non Analyſeos, remedium opportunum dari poſſe oſtendi. Primo modo facta poſitiva a, quę erat negativa: ut intelligatur fieri debere variabilium permutationem, cum in hoc Syſtemate m nequeat eſſe minima $= 0$, niſi loco n ſubſtituatur, ſive ad plagam oppoſitam tranſitus fiat; quo facto æquatio $0m - a = 0m - AB$ (*fig.* 5.) $= n$ fit $0m + a = 0m + BA = n$, & ęquatio media $m + a = n$ in viam, a qua aberravimus, tribuendo variabili m minimum illud, quod alterius erat, nullo negotio manu veluti iterum reducit. Secundo modo non a minimis progrediendo verſus maxima, ſed a maximis verſus minima deſcendendo iter inſtituendum eſt ita, ut ęquatio linearis primo ſumpta ſit $\infty m - a = n$, & fluxu continuo diminuta m uſque ad valorem a, fiet tandem in limite minimo $m - a = a - a = n$: ex qua deducuntur $m = a$, $n = 0$, ambę minimę: atque ita conſtitutis limitibus maximis & minimis utriuſque variabilis, non ſolum valores medios recte invenimus, ſed illos utrique variabili vere tribuimus, quos earumdem differentia poſitiva a ab ęquatione lineari primum determinata requirit.

§. 12. Ubi huc pervenerimus ſi ulterius decreſcat m infra valorem a, in ęquatione $m - a = n$ erit n vere negativa; ideoque ſit oportet $m - a = - n$, quæ multiplicata per alterum factorem m dabit $mm - am = - mn$, ſive $mn = am - mm$: ſed ex $m - a = - n$ eruitur $n - a = - m$, quę ducta in n dabit $mn = an - nn$, quę eſt altera ęquatio homologa Syſtematis baſis datę. Simili modo deſcendendo ab ęquatione limitis maximi ęquationis huic homologę ejuſdem Syſtematis baſis variabilis, ſcilicet ab $mn = an + nn$ uſque ad $m = a$, erit $m = a + 0n$: at, facta m minori a, m non poteſt

amplius eſſe æqualis a, ſed eidem a quantitate diminutę, ſive differentię $a-n$; ergo $m = a - n$, & $mn = an - nn$, ſive $n = a - m$, & $mn = am - mm$; atque iterum inveniuntur ambę ęquationes homologę. Hic eſt alter modus addendus ſuperioribus, quo ab uno ad aliud Syſtema licet pervenire, quin in negativum ęquale poſitivo incidamus: facile enim adhiberi poteſt & in tranſitu a Syſtemate baſis datę ad Syſtema baſis variabilis. Nam, data ęquatione Syſtematis baſis datę $mn = \overline{a - m}.m$, erit $n = a - m$, in quo Syſtemate m non poteſt eſſe major a: at ſi fiat m major a, n neceſſario erit negativa, ideoque $-n = a - m$, &, facta multiplicatione per m, $-mn = am - mm$, ſive $mn = -am + mm$. Vel, quoniam ex $-n = a - m$ oritur $m = a + n$, facta multiplicatione per n, erit $mn = an + nn$; quę eſt altera ęquatio homologa Syſtematis baſis variabilis.

§. 13. Ex hoc uno argumento (ſi cetera deeſſent quæ diximus præcipue in *Cap.* VI. *Lib.* I. *de Infinito*, quæque dicemus inferius) evidentiſſime demonſtratur *realitas* atque *exiſtentia* (ejuſdem naturæ ac realitas & exiſtentia abſoluti zero) illius *Infiniti abſoluti*, quod recentiores Analyſtæ exulare cogunt ab Analyſi, minime reputantes huic male prolatæ ſententiæ quicquid impedimenti, quicquid repugnantiæ, quicquid imaginarii in hanc Scientiam prorepſiſſe queruntur, omne tribuendum eſſe; nec tot incommodis occurri poſſe, niſi quod omnium votis proſcriptum fuerat, omnium votis tamquam e poſtliminio iterum revocetur. Hujuſce vero male inſtituti judicii iniquitatem præſenſerat Celeberrimi Alembertii opinio in Præfatione a me indicata §. 54., qua negativi cum poſitivo prorſus tollitur comparatio ſubſtitutione illius quantitatis ſemper quantitati negativæ præponendæ, quæ ſit major quacumque data negativa, cui præponitur: ab hac enim *Infinitum* hoc *abſolutum* tacito quodam modo arguitur, atque defenditur. Dolendum quod hanc, quam nec ſibi, nec aliis ſatis probare poterat opinionem, ita in incerto reliquerit, ut neque ex ſuo, neque ex aliorum animo anticipatam, quam ejurare incœperat, de hujuſce *Infiniti abſoluti* abſurditate male conceptam opinionem eradicare potuerit.

§. 14. Hiſce in anteceſſum demonſtratis, nunc ad inveſtigandos limites rectilineos Syſtematis baſis variabilis accedentes datam jam lineam (*fig.* 5.) AB $= a$, quæ erat baſis Syſtematis baſis datæ, indefinite ab utraque parte producamus, ut, dicta AD $= m$, BD $= n$, ſit æquatio linearis Syſtematis baſis variabilis AD $= m =$ AB + BD $= a + n$, ex qua eruimus §. 1. æquationes ſecundæ dimenſionis, ſive rectangulum AD.BD $= mn = \overline{a + n}.n = \overline{-a + m}.m$. Ex punctis A, & B utrimque ad angulum ſemirectum ducantur lineæ indefinitæ Ae, Ae′; BE, BE′, erunt de, de′ æquales Ad; DE, DE′ æquales BD: ergo loco BD in æquatione AD.BD utramque DE, DE′ licet ſubſtituere, ex qua utraque ſubſtitutione oriuntur æquationes

$$\text{AD.BD} = mn = \overline{a+n}.n = \frac{\overline{\text{AB} + \text{BD}}.\text{DE}}{\overline{\text{AB} + \text{BD}}.\text{DE}'} = \overline{-a + m}.m = \frac{\overline{\text{AD} - \text{AB}}.\text{DE}}{\overline{\text{AD} - \text{AB}}.\text{DE}'}$$

. Sed, po-

ſita $BD = Ad$, ſunt $DE = de = Ad = DE' = de' = BD$; ergo, hac etiam facta ſubſtitutione, $AD.BD = mn = \frac{\overline{AB+BD}.de}{AB+BD.de'}$: ex quibus patet eamdem formulam rectanguli $mn = \overline{a+n}.n = \overline{-a+m}.m$ unumquodque ex ſupradictis rectangulis repræſentare poſſe; quorum duo dextrorſum a parte BD, alia duo ſiniſtrorſum a parte A d verticaliter ſurſum, vel deorſum progrediuntur; ac proinde hujuſmodi hæc quatuor rectangula ſimul ſumpta Syſtema integrum totale exhauriunt, quod conſtructio ſupra indicata oſtendit. Limites minimi hujuſmodi rectangulorum ſunt rectangula nulla in punctis A, B, quando BD, & A d ſunt zero, & baſis minima communis AB, vel $BA = a$: maxima vero hinc inde progrediuntur ad infinitum, & fiunt infinita.

§. 15. Si hujuſmodi rectangula ſolitaria ſumantur, erit (*fig. ead.* 5.)

$$(1)\ AD.BD = AD.DE = m.n = \overline{AB+BD}.DE = \overline{a+n}.n$$
$$= \overline{AD-AB}.DE = \overline{m-a}.m:$$

$$(2)\ AD.BD = AD.DE' = m.n = \overline{AB+BD}.DE' = \overline{a+n}.n$$
$$= \overline{AD-AB}.DE' = \overline{m-a}.m:$$

$$(3)\ AD.BD = Bd.de = m.n = \overline{BA+Ad}.de = \overline{a+n}.n$$
$$= \overline{Bd-BA}.de = \overline{m-a}.m:$$

$$(4)\ AD.BD = Bd.de' = m.n = \overline{BA+Ad}.de' = \overline{a+n}.n$$
$$= \overline{Bd-BA}.de' = \overline{m-a}.m:$$

quia tam in ($3.^a$), quam in ($4.^a$) $AB = BA$, $BD = Ad$: & in ($3.^a$) $de = Ad$; in ($4.^a$) $de' = AD$. Tantum igitur abeſt ut hujuſmodi rectangula iiſdem ſymbolis expreſſa ſint identica, ut poſitionem, ac directionem quoquoverſum mutent, quin ulla in formulis, ac ſignis mutatio fiat. Quod ſi tamen omnia primæ poſitioni ad libitum ſumptæ comparare velis, quoniam duo prima ab uno rectangulo $AD.BD$, duo ſecunda ab uno rectangulo $Bd.Ad$ oriuntur: erit hoc ultimum cum primo comparatum $-Bd.-Ad$: cum ſit $AD = -Bd$, $BD = -Ad$, ideo $AD.BD = -Bd.-Ad$: ſed omnium conſenſu $- \times - = + \times + = +$; ergo $AD.BD = -Bd.-Ad = Bd.Ad$. Verum ſi hæc æqualia ſunt, cur cetera, quibus hæc æquantur, inæqualia erunt? Ergo eo ipſo quod omnium conſenſu probatur æquatio $-1.-1 = 1.1$, neceſſario admittenda altera eſt $-1 = 1$. Nam ſi omnia ad primum referantur, erunt hujuſmodi rectangula

(1) $AD.BD = AD.DE = m.n = \overline{AB+BD}.DE = \overline{a+n}.n$
$= \overline{AD-AB}.DE = \overline{-a+m}.m$:

(2) $AD.BD = AD.DE' = m.(-n) = \overline{AB+BD}.DE' = \overline{a+n}.(-n)$
$= \overline{AD-AB}.DE' = \overline{-a+m}.(-m)$:

(3) $AD.BD = -Bd.-Ad = -Bd.-de = (-m).(-n) = \overline{-BA-Ad}.de$
$= \overline{-a-n}.(-n) = \overline{-Bd-(-BA)}.de = \overline{-(-a)-m}.(-m)$:

(4) $AD.BD = -Bd.-Ad = -Bd.-de' = (-m).(-n) = \overline{-BA-Ad}.de'$
$= \overline{-a-n}.-(-n) = \overline{-Bd-(-BA)}.de' = \overline{-(-a)-m}.-(-m)$.

(1.ª), & (3.ª) conveniunt inter ſe: (2.ª) vero & (4.ª), ſi communem ſequamur methodum, dant $+ = -$, hoc eſt in eam neceſſario incurrunt conſecutionem, quæ tamquam abſurda, atque ex meo penu nunc tandem deprompta mihi exprobratur: quæ tamen nullo modo vitari poteſt, niſi ope limitis minimi, ut initio hujus Capitis fecimus, vel multiplicata per $(- \times -)$ (2.ª), ut ſit $-.\overline{AB+BD}.-DE' = \overline{-AB-BD}.-DE' = \overline{BA+DB}.-DE$ $= \overline{-BA-DB}.-DE' =$ (facta linearum inverſione) $\overline{AB+BD}.-(-n)$ $= \overline{AB+BD}.n =$ &c., ne quæ præcipue in *Capite* ſuperiori §§. 7, & ſeqq. oſtendimus hîc repetamus. Hæc tamen iterum innui, ut magis magiſque confirmetur neceſſitas earum legum, quas in *Cap.* V. *Lib.* I. & in fine *Capitis* antecedentis tradidi, ut tutum de ſignorum valore judicium ferri queat.

§. 16. Nunc iterum ſumamus æquationes homologas hujuſce Syſtematis baſis variabilis ſuperius inventas, ſcilicet $mn = \overline{a+n}.n = \overline{-a+m}.m$, atque eas ita diſponamus, ut ſit $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+n}.n = \overline{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+m}.m$.

Et quoniam $m = a + n$, erit $\frac{m-n}{2} = \frac{a}{2}$; & $m = \frac{2a+2n}{2}$ $= \frac{a}{2} + \frac{m-n+2n}{2} = \frac{a}{2} + \frac{m+n}{2}$; & $n = \frac{2m}{2} - \frac{2a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 2m$ $= -\frac{a}{2} - \frac{m+n+2m}{2} = -\frac{a}{2} + \frac{n+m}{2}$. Hiſce valoribus in ſuperiori æquatione ſubſtitutis, erit

$$mn = \overline{\tfrac{a}{2} + \tfrac{a}{2} + n}\,.\,n = \overline{\tfrac{a}{2} + \tfrac{m+n}{2}} \times \overline{-\tfrac{a}{2} + \tfrac{n+m}{2}} = \overline{-\tfrac{a}{2} - \tfrac{a}{2} + m}\,.\,m$$

$$= \overline{-\tfrac{a}{2} + \tfrac{n+m}{2}}\,.\,\overline{\tfrac{a}{2} + \tfrac{m+n}{2}} :$$

ideoque $m + n = \frac{m+n}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{n+m}{2} = \frac{n+m}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{m+n}{2}$, ſive

$$m+n = \frac{m+n}{2} + o\,.\,\frac{a}{2} + \frac{n+m}{2} = \frac{n+m}{2} - o\,.\,\frac{a}{2} + \frac{m+n}{2} = \frac{m+n}{2} + \frac{n+m}{2}$$

$$= \frac{n+m}{2} + \frac{n+m}{2};$$

quarum ſingulæ æquationes licet quantitate æquentur, differunt tamen inter ſe poſitione, & valore ſingularum variabilium. Nam ſubſtitutis eo ordine lineis, quem unaquæque æquatio requirit, cum ſit (*Tab.* V. *fig.* 5.) $dB = AD$, erit $\frac{dB + BD}{2} = \frac{m+n}{2} = \frac{dD}{2} = dC$, & $\frac{n+m}{2} = \frac{DB + Bd}{2} = \frac{Dd}{2}$ $= DC$: ergo

$$m + n = \left\{\begin{array}{l} \frac{m+n}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{n+m}{2} \\ dC + CB - CB + DC \\ \frac{n+m}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{m+n}{2} \\ DC + CA - CA + dC \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \frac{n+m}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{m+n}{2} \\ DC - CB + CB + dC \\ \frac{m+n}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{n+m}{2} \\ dC - AC + AC + DC \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{m+n}{2} + \frac{n+m}{2} \\ dC + DC \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \frac{n+m}{2} + \frac{m+n}{2} \\ DC + dC \end{array}\right.$$

ſive $m + n = \frac{dB + DB}{DA + Ad} = \frac{DB + dB}{dA + DA} = dC + DC = DC + dC = dD = Dd$.

Hic in memoriam revocentur quæ dixi in *Cap.* V. *ſuper. Libri*, in quo fuſius demonſtravi, non niſi quæ identicæ ſunt & ſuperimponuntur invicem, lineas ſigno negativo notatas vere ſubtractionem ſignificare, ceteras, quæ diverſæ ſunt, quocumque modo, & directione progrediantur, ſemper ſummam indicare, & ſigno poſitivo eſſe afficiendas: atque etiam oſtendi quænam inter haſce varias ſcribendi rationes differentia intercedat, & quantum conferat ad hæc omnia diligenter attendere. Hic loci igitur, diviſione unius *a* integræ in duas æquales partes, præ-

ter

ter puncta data, A, & B, determinatum fuit etiam punctum medium C, quo Syſtema integrum baſis variabilis $m = a + n$ diviſum fuit in duo Syſtemata ſolitaria baſis variabilis, ſcilicet $m = \frac{a}{2} + n$, $n = -\frac{a}{2} + m$, quemadmodum in *Capite* V. ſuperioris Libri *De legitima* &c. neceſſario fieri debere oſtendi, ut legitima Syſtematum conjunctio obtineatur.

§. 17. Et ſane in noſtra *figura* $m - \frac{a}{2} = AC + CD - AC = CD$; $n + \frac{a}{2} = CB + BD = CD$. Sed ſuperius invenimus $CD = \frac{m+n}{2}$; ergo $m - \frac{a}{2} = CD = \frac{m+n}{2}$; & $n + \frac{a}{2} = CD = \frac{m+n}{2}$; & $m - \frac{a}{2} = n + \frac{a}{2}$, ſive $m = a + n$; quæ eſt æquatio linearis integra Syſtematis primo ſumpti: & $m - \frac{a}{2} + n + \frac{a}{2} = \frac{m+n}{2} + \frac{m+n}{2}$; ergo in hoc caſu m æqualis eſt n, quia in utraque æqualis eſt $\frac{m+n}{2}$: at facta tranſpoſitione termini $o . \frac{a}{2}$, ut ſit $m + n = \frac{m+n}{2} + \frac{a}{2} + \frac{m+n}{2} - \frac{a}{2}$, tunc m differt ab n, cum ſit $m = \frac{m+n}{2} + \frac{a}{2}$, $n = \frac{m+n}{2} - \frac{a}{2}$. Quare ſi in æquationibus

$$mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n} . n = \overline{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m} . m \text{ fiat } m = \frac{a}{2} + n, \text{ erit}$$

$$mn = \overline{\frac{a}{2} + m} . \overline{m - \frac{a}{2}} = \overline{-\frac{a}{2} + n} . \overline{\frac{a}{2} + n} : \& \ m + n = m + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m$$

$= n - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n$: ſed ſuperius invenimus $m + n = \frac{m+n}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{m+n}{2}$; ergo $m = n = \frac{m+n}{2}$, & $2m = 2n = m + n$. Hoc vero nihil aliud ſignificat, niſi quod m, & n poſſunt & inæquales eſſe, & æquales: æquales ſunt, quando in æquatione non adeſt $\frac{oa}{2}$, ſive $\frac{a}{2} - \frac{a}{2}$ vel a ſit zero; inæquales, ſi ponatur $\pm \frac{oa}{2}$ in altero membro: fiunt etiam inter ſe æquales, ſi fiat $m + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n = m + m$ $= n$

$= n + n$; primum enim membrum ſic efferendum eſt $m + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n$ $= \frac{m+n}{2} + \frac{a}{2} + \frac{m+n}{2} - \frac{a}{2} = \frac{m+n}{2} + \frac{m+n}{2} = \frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2} + \frac{m+n}{2} - \frac{(m-n)}{2}$ $= \frac{m+m}{2} + \frac{n+n}{2} = m + m = n + n$; at in ſecundo membro m, m, vel n, n fiunt inæquales, cum una æquetur $\frac{m+n}{2} + \frac{a}{2}$, altera $\frac{m+n}{2} - \frac{a}{2}$; uti in *Cap.* V. *Lib.* I. fuſius explicavimus. Verbo m, n poſſunt eſſe ambæ inæquales, & tunc $mn = \overline{a+n}.n = -\overline{a+m}.m$, in qua æquatione m ſemper differt ab n quantitate a tam in limite minimo, quam in limite maximo: poſſunt etiam inter ſe æquari, & tunc $m + n = \frac{m+n}{2} + \frac{m+n}{2}$, ut ſit $m = n$ $= \frac{m+n}{2} =$ dC, vel DC, ac ſibi obviam occurrunt. Hæ tamen fiunt inæquales ſubſtitutione $\pm \frac{0a}{2}$, ſive additione & ſubtractione ejuſdem quantitatis $\frac{a}{2}$, quæ ſemper tamen ſit minor $\frac{m+n}{2}$; atque ad ſummum $\frac{m+n}{2}$ in limite æquet. Hiſce vero omnibus modificationibus rectangulum mn varie afficitur, ut §. ſuperiori innuimus, in quarum inquiſitione maxime præſtat nunc diligentius immorari.

§. 18. Ac primo revocemus æquationes homologas ſecundæ dimenſionis ortas a Syſtemate integro lineari baſis variabilis $m = a + n$, quæ ſunt $mn = \overline{a+n}.n$ $= -\overline{a+m}.m$, e quibus §. 15. eruimus quatuor rectangula hinc inde a punctis (*fig. ead.* 5.) A, B, quæ incipiendo ab AB data $= a$, in qua ſunt minima, ſive nulla, ſucceſſive creſcendo uſque ad infinitum producunt ſingula quatuor quadrilatera ABEg, BAeG, BAe′G′, ABE′g′, atque BE, Ae, Ae′, BE′, quæ ſunt diagonales quadratorum BE, Ae, Ae′, BE′, quæque ſunt loca geometrica deſcripta a punctis fluentibus E, &c. variabilis gE, Ge, G′e′, g′E′, nec non limites maximi, intra quos hujuſmodi quadrilatera continentur. Verum quemadmodum in hac prima conſtructione AD ſumitur tamquam baſis rectanguli variabilis AE, &c; ita DE, DE′ (ſecta AB bifariam in C, & ducta normali indefinita D′d′, factoque quadrato l′L) ſumptæ in indefinita D′d′ poſſunt eſſe baſes aliorum quatuor rectangulorum, quæ primis ſunt ſimiles, & æquales, atque conſtituere quatuor alia quadrilatera N′NE″G‴, N′Ne″g‴, NN′e‴g″, NN′E‴G″, quæ a primis non differunt niſi poſitione, ut ſit CD′ = DE; Cd′ = DE′

$= DE'$, & $CD' + Cd' = n + n = n + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n = N'C + CD' + Cd' - N'C$

$= N'D' + N'd' = \begin{matrix} N'D' + ND' \\ m \;+\; n \end{matrix}$; vel $CD' + Cd' = n + \frac{a}{2} + n - \frac{a}{2}$

$= NC + Cd' + Cd' - NC = Nd' + N'd' = m + n$; & $m = a + n$. Quare quemadmodum in Syſtemate ſecundæ dimenſionis baſis datæ octo invenimus quadrilatera, quorum quatuor ſimul diſpoſita, ut oſtendit *Tabula* §. 37. *Capitis* anteced., totum Syſtema integrum ſecundæ dimenſionis baſis datæ conſtituunt; ita & in hoc Syſtemate duarum dimenſionum baſis variabilis ex octo quadrilateris ſupra inventis, quatuor eodem ordine diſpoſita ac quadrilatera Syſtematis ſecundæ dimenſionis baſis datæ totum Syſtema ſecundæ dimenſionis baſis variabilis complent.

§. 19. Sed, antequam progredior, inveſtiganda eſt atque reddenda ratio cur tam in Syſtemate baſis datæ Capitis antecedentis, quam in hoc Syſtemate baſis variabilis datam a bifariam diviſerimus. Hoc a nobis eo conſilio factum eſt, ut hac diviſione legitime inter ſe uniantur rectangula illa ac quadrilatera, quæ ab una eademque formula mn ſeorſim repræſentantur. Nam præter illa quatuor rectangula a nobis inventa §. 15. ope inverſionis lineæ AB (*fig. ead.* 5.) in BA, qua inverſione ab una plaga AD ad alteram Bd fit tranſitus, & baſis rectanguli variabilis quæ erat AD, altitudo $BD = DE$, vel DE', mutatur in baſim Bd, & altitudinem $Ad = de = de'$, & loca geometrica rectilinea BE, BE′ fiunt Ae, Ae′; alia oriri poſſunt rectangula ſingula eidem mn æqualia, & quidem innumera, ac prorſus infinita, ſi ex. gr. ponatur BD, vel Ad ut baſis rectanguli, & erigatur AD, vel Bd normalis ex puncto B, vel A, quæ ſit altitudo; ex quarum producto oriatur vel rectangulum $BD.DE''$; vel $BD.DE'''$; vel $Ad.de''$, &c. æquale mn. At hæc rectangula ſingula nullo inter ſe communi vinculo colligantur, ut legitima & regularis conſtructio lege aliqua communi continuata obtineri poſſit. Ut vero hoc conſequamur, hac duplici via inſiſtendum eſt. Primo diviſa (ut fecimus) bifariam AB in C, ex hoc tamquam centro ducatur normalis $NN' = AB = a$, quæ dividitur & ipſa bifariam a puncto C; quo facto quadratum I′L dividitur in quatuor quadrata æqualia ope cujuſvis AB, NN′ per medium quadratum tranſeuntis, & ex punctis N, N′ ductæ ad angulum ſemirectum cum NN′ rectæ indefinitæ NE″, Ne″; N′E‴, N′e‴ conſtituunt totidem rectangula æqualia, ſimilia, & ſimiliter poſita, quæ cum ſint variabilia, fluendo deſcribunt ea quadrilatera tam in Syſtemate baſis datæ Capitis antecedentis, quam in hoc, in *figuris* 3.ª & 5.ª a nobis delineata, quibus dividitur in tot partialia Syſtemata ſolitaria baſis datæ, vel baſis variabilis totum Syſtema integrum ſecundæ dimenſionis; quæ ſingula Syſtemata ſolitaria oriuntur in primo caſu a Syſtemate lineari baſis datæ, in ſecundo a Syſtemate lineari baſis variabilis contigua, atque in eadem lineæ directione, uti vidimus Lib. I. Cap. IV. *De diviſione unius Syſtematis in plura* &c. Oſtendimus ulterius Cap. V. Lib. I. *De legitima Syſtematum conjunctione* &c.

ut

ut ex duobus Syſtematibus partialibus vere unum ac legitimum conſtituatur Syſtema, neceſſe eſſe ut unum partiale Syſtema ſit baſis datæ, alterum baſis variabilis, ſi Syſtema integrum baſis datæ velis; vel ambo ſint baſis variabilis, ſi Syſtema integrum baſis variabilis requiras. Quo artificio ita Syſtemata partialia in unum colligantur, ut univerſim & Syſtematum linearium baſes unam rectam continuam datis punctis diſtinctam conſtituant, & nulla in uno accidat mutatio, quin alterum afficiat.

§. 20. Verum ex Capite antecedenti conſtat variabiles, quæ in ſe ducuntur ad conſtituendas æquationes ſecundæ dimenſionis, nihil aliud eſſe niſi variabiles illas, in quas dividitur totum Syſtema integrum lineare baſis datæ, vel baſis variabilis, atque unamquamque uni, vel alteri Syſtemati partiali æqualem eſſe. Et ſane ex dato Syſtemate baſis datæ $m + n = a$ invenimus earum productum $mn = \overline{a - m}.m = \overline{a - n}.n$. Verum ut habeatur rectangulum maximum mn, oſtendimus dividendam eſſe a bifariam, ut æquatio ſit $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$, ac valorem m, vel n non poſſe ſuperare $\frac{a}{2}$: ergo ſi valor maximus eſt $n = \frac{a}{2}$, erit valor minimus in Syſtemate baſis datæ $m = 0$, & æquatio $m + n = \frac{a}{2}$: igitur primum Syſtema partiale, in quod dividitur Syſtema integrum baſis datæ, erit $m + n = \frac{a}{2}$, Syſtema partiale baſis datæ. At, facta hac ſubſtitutione in æquationibus ſuperioribus, habentur

$$m'n' = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m = \overline{\frac{a}{2} + n}.\overline{\frac{a}{2} - n} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n = \overline{\frac{a}{2} + m}.\overline{\frac{a}{2} - m}.$$

Ergo ex prima æquatione eruitur

vel $m' = \frac{a}{2} + n$, $n' = \frac{a}{2} - n$

vel $n' = \frac{a}{2} + n$, $m' = \frac{a}{2} - n$:

& ex ſecunda

vel $m' = \frac{a}{2} + m$, $n' = \frac{a}{2} - m$

vel $n' = \frac{a}{2} + m$, $m' = \frac{a}{2} - m$

: atque ex utraque

(A) $m' + n' = \frac{a}{2} + 0n + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} - 0n + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + 0m + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} - 0m + \frac{a}{2}$; ſive ex utraque $m' + n' = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$. Ergo Syſtema integrum lineare $m + n = a$ diviſum fuit in duo Syſtemata partialia, unum

 baſis

baſis datæ, alterum baſis variabilis; ut oſtendimus in Cap. V. Lib. I. *De legitima* &c. fieri oportere, ut quod diviſum eſt legitime uniatur; & variabiles ipſæ homologæ æquantur ſingulæ ſingulis Syſtematibus partialibus, atque earum rectangulum horum Syſtematum partialium productum repræſentat.

§. 21. Colligitur etiam ex prima

vel (1) $m' - n = n' + n = \frac{a}{2}$, vel (2) $n' - n = m' + n = \frac{a}{2}$; ex ſecunda

vel (3) $m' - m = n' + m = \frac{a}{2}$, vel (4) $n' - m = m' + m = \frac{a}{2}$: ergo, poſita n, vel m æquali zero fit

in (1.ª) n minima $= 0$; m' minima $= \frac{a}{2}$ Syſtema partiale baſis variabilis,

& n minima $= 0$; n' maxima $= \frac{a}{2}$ Syſtema partiale baſis datæ:

& in (2.ª) n minima $= 0$; n' minima $= \frac{a}{2}$ Syſtema partiale baſis variabilis,

& n minima $= 0$; m' maxima $= \frac{a}{2}$ Syſtema partiale baſis datæ:

& in (3.ª) m minima $= 0$; m' minima $= \frac{a}{2}$ Syſtema partiale baſis variabilis,

& m minima $= 0$; n' maxima $= \frac{a}{2}$ Syſtema partiale baſis datæ:

& in (4.ª) m minima $= 0$; n' minima $= \frac{a}{2}$ Syſtema partiale baſis variabilis,

& m minima $= 0$; m' maxima $= \frac{a}{2}$ Syſtema partiale baſis datæ.

m' vero, & n' inter ſe ęquales ſunt, hoc eſt Syſtema integrum baſis datę $m + n = a$ in hiſce limitibus dividitur bifariam ab æqualibus m, & n; ſive $m' + n' = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; & $m' = \frac{a}{2}$, $n' = \frac{a}{2}$. Sed cum ex (1.ª) & (2.ª) ſit m' minima in Syſtemate partiali baſis variabilis $= \frac{a}{2}$ (quę quidem m', vel $n' = \frac{a}{2}$ eſt maxima in Syſtemate partiali baſis datæ, & in utroque $n = 0$; quo in caſu m tam in Syſtemate baſis datæ maxima, quam in Syſtemate baſis variabilis minima æqualis eſt ſemper $\frac{a}{2}$; ac viceverſa quando m æquatur zero);

ergo

ergo æquatio (A) §. antecedentis erit

$$(\text{I.}^{a})\; m+n=\frac{a}{2}+o\,n+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}-o\,n+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}-o\,m+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}+o\,m+\frac{a}{2}$$

in caſibus intermediis,

$$(\text{II.}^{a})\; m+n=\frac{a}{2}+o(on)+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}-o(on)+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}-o.\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}+o.\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$$

in limite utroque quando $n=o$ minima; $m=\frac{a}{2}$ maxima in Syſtemate partiali baſis datæ, minima in Syſtemate baſis variabilis.

$$(\text{III.}^{a})\; m+n=\frac{a}{2}+o.\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}-o.\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}-o\,(om)+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}+o(om)+\frac{a}{2},$$

quando $m=o$ minima, & $n=\frac{a}{2}$ maxima, vel minima, prout ſumitur Syſtema partiale.

Ut igitur vere æquentur inter ſe variabiles m, n, ex quarum producto conflantur æquationes ſecundæ dimenſionis ad Syſtema integrum baſis datæ pertinentes, non ſufficit æquatio (I.ª), ſed ad (II.^am^) vel (III.^am^) eſt confugiendum: ut enim vere radices æquentur, n, vel m debet eſſe zero, & $o\,n=o.o\,n=o.o$. At tam in (II.ª), quam in (III.ª) præter radices æquales, quæ dant maximum rectangulum, continentur etiam illæ quę dant minimum, hoc eſt productum variabilis maximę $=a$ ductę in minimam ęqualem zero: ut oſtendimus in Capite antecedenti. Hîc tamen pręſtat, ad ea quæ de Syſtemate baſis variabilis dicenda ſunt, ea quę a Syſtemate baſis datæ eruuntur, utpote nova, in pleniore luce collocare.

§. 22. Sumpta igitur *figura* 3. Capitis antecedentis, ac iiſdem linearum denominationibus retentis, erit ęquatio ſecundę dimenſionis orta a producto variabilium Syſtematis baſis datę ſequens

$$mn=\overline{\frac{a}{2}+n}.\overline{\frac{a}{2}-n}=\overline{\frac{a}{2}-m}.\overline{\frac{a}{2}+m}=\overline{\frac{a}{2}-n}.\overline{\frac{a}{2}+n}=\overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m}=\overline{\frac{a}{2}+o}.\overline{\frac{a}{2}-o}$$

$$=\overline{\frac{a}{2}-o}.\overline{\frac{a}{2}+o}=\overline{\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}.\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}=\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}.\overline{\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}.$$

Atque inſuper variabiles trium æquationum linearium §. antecedentis ſic diſtribui poſſunt;

$$m+n=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right)+n=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m\right)+m=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}$$

$=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-o\right)+o$, quin ullam earum ſumma mutationem patiatur:

ergo erit etiam $mn=\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n=\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m=\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}.\frac{a}{2}$

$= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - o}.o$: quę ſunt omnino ęquationes illę omnes, quas §. 3. Capitis antecedentis recenſuimus, atque in toto eodem Capite tractavimus.

§. 23. Secundus vero modus, quem innui §. 19, ut communi vinculo conſociata rectangula illa, quę ſub una eademque formula comprehenduntur, in unum Syſtema coaleſcant, hic eſt. In data ſcilicet ęquatione Syſtematis baſis datę $mn = \overline{a-n}.n = \overline{a-m}.m =$ (*fig.* 3.) $\overline{AB - n}.n = \overline{BA - m}.m$ ponatur m, vel $n = a$: in quo caſu erit n, vel m ęqualis zero, cum ſit ęquatio linearis $m + n = AD + BD = a$: & $m = AD$, $n = BD$; & ęquatio ſecundę dimenſionis

$mn = \overline{AB - B}.B = \overline{BA - AB}.AB = \overline{a - o}.o = \overline{a - a}.a$; vel $mn = \overline{AB - BA}.BA = \overline{BA - A}.A = \overline{a - a}.a = \overline{a - o}.o$: ergo tam ex prima, quam ex ſecunda $a - o = a$, & $o = a - a$: ſed ex prima $AB - B = AB$; & $BA - AB = a - a = B$; & ex ſecunda $BA - A = BA$; & $AB - BA = a - a = A$: ergo ex prima $mn = AB.B$; ex ſecunda $mn = BA.A$; quę ſunt ęquationes limitis, in quibus variabilium una eſt maxima, altera minima, quas vidimus in hoc Syſtemate exhibere rectangulum minimum, ſive zero. Verum ex demonſtratis in toto anteacto Capite, & in §. ſuperiori hujus, in ea æquatione limitis, quæ dat rectangulum minimum, debet etiam ſimul rectangulum maximum inveniri; ergo, ſimul copulatis maximo & minimo, exurget æquatio $mn + m(on) = mn + n(om)$

$= mn + o = a.a + \overline{a - a}.a =$ (*fig.* 6.) $AB.BA + \overline{BA - AB}.AB$

$=$ (*fig.* 7.) $BA.AB + \overline{AB - BA}.BA$

$= \overline{BA + BA - AB}.AB = \overline{BA + B'A' - A'B'}.A'B'$

$= \overline{AB + AB - BA}.BA = \overline{AB + A'B' - B'A'}.B'A'$;

in quarum prima $A'B'$ eſt variabilis $de = A'd$ facta maxima fluens normaliter a zero A' uſque ad maximam $B'N = A'B'$; conſtans vero $BA + B'A' = BA'$: in ſecunda $B'A'$ eſt variabilis $DE = B'D$ facta maxima fluens normaliter a zero B' uſque ad maximam $BN = B'A'$, & conſtans $AB + A'B' = AB'$. Ergo in prima $m + n = BA + B'A' = BA' = 2a = A'd + Bd$ Syſtema integrum lineare; in ſecunda $m + n = AB + A'B' = AB' = 2a = AD + B'D$. Quibus omnibus docemur æquationes propoſitas $mn = \overline{a - n}.n = \overline{a - m}.m$, nulla facta diviſione conſtantis a, non eſſe ſingulas niſi æquationes ſecundæ dimenſionis partiales, ortas a Syſtemate partiali lineari $m + n = a$ baſis datæ, quæ pertinent ad Syſtema integrum lineare baſis datæ $m + n = 2a$. Porro quoniam demonſtravimus in *Capite* V. *Lib.* I. *De legitima* &c., & in hoc Libro Syſtema quodcumque lineare baſis datæ dividendum eſſe in duo Syſtemata

mata partialia, unum baſis datæ, alterum baſis variabilis, ut legitime conjuncta Syſtema integrum univerſim repræſentare poſſint; patet etiam æquationes propoſitas non niſi unum, vel alterum Syſtema baſis datæ exhibere, neque inter ſe copulari eodem tempore poſſe; ſed quærendum eſſe alterum Syſtema partiale baſis variabilis, ut legitima conjunctio poſſit obtineri. Quare æquatio $mn = \overline{a-n}.n$, vel $mn = \overline{a-m}.m$, niſi a dividatur bifariam, ſemper erit æquatio ſecundæ dimenſionis partialis baſis datæ Syſtematis integri ſecundæ dimenſionis, cujus æquatio eſt $mn = \overline{2a-n}.n = \overline{2a-m}.m$ orta a Syſtemate baſis datæ integro $m+n = 2a$; cui deeſt ſua homologa ſecundæ dimenſionis, quacum copulari debet ad conficiendum Syſtema integrum ſecundæ dimenſionis æquationis $mn = \overline{2a-n}.n = \overline{2a-m}.m$.

§. 24. Et ſane datæ $mn = \overline{a-n}.n$ addatur $\overline{a+n}.n$, & erit æquatio $mn = \overline{a-n}.n + \overline{a+n}.n = \overline{a-n+n+a}.n = \overline{a+a-0n}.n$: ſed in æquatione $m+n=a$, facta $m=a$, eſt $n=0$; ergo $mn = \overline{a+a-0n}.0n$, & in caſibus mediis $mn = \overline{a+a-n}.n = \overline{a+a-m}.m$, æquatio Syſtematis integri: & $mn = \overline{a+m}.\overline{a-m} = \overline{a+n}.\overline{a-n}$; ſive $m+n = a+m-m+a = 2a$, & $mn = \overline{2a-n}.n^n = \overline{2a-m}.m$. Vel, quoniam invenimus §. 23. $mn = \overline{a-0}.0 = \overline{a-a}.a$, erit $0 = a-a$: ergo $mn = \overline{a-0}.0 = \overline{a+a-a}.0$: ſed $m+n=a$, & $n = a-m$; &, facta $m=a$, eſt $0n = a-a$; ergo erit $mn = \overline{a-0}.0 = \overline{a+a-a}.0n$, & $m = a+a-a$, & $n = 0n$: ergo in caſibus intermediis $m = a+a-n$, & $n=n$, ac proinde $mn = \overline{a+a-n}.n$ Syſtema; integrum baſis datæ, quod dat $mn = \overline{a+m}.\overline{a-m}$: igitur $n = a+m$, & $m = a-m$: ac prima multiplicata per m, ſecunda per n, ſe ſe offerunt æquationes $mn = \overline{a+m}.m$, $mn = \overline{a-m}.n$, quæ ſunt partiales homologæ, in quas dividitur æquatio integra $mn = \overline{2a-n}.n$, vel $mn = \overline{2a-m}.m$. Sed de hac re fuſius in Parte II.ª, ubi agetur *De diviſione & conjunctione Syſtematum*, &c. Nunc interim ſtatuatur quamcumque æquationem ſecundæ dimenſionis dividi poſſe vel in duo Syſtemata partialia, ſive in duas æquationes partiales, diviſa bifariam conſtanti a, vel, ſumpta a integra, ipſam vicem gerere partialis æquationis, cui addenda eſt ſua homologa, ut ex earum unione Syſtema integrum ab ipſis conflatum inveniatur. In primo caſu data æquatio Syſtematis baſis datæ dividitur in duo Syſtemata, baſis datæ unum, alterum baſis variabilis; & æquatio Syſtematis partialis baſis variabilis dividitur in duo Syſtemata partialia, quorum utrumque eſt baſis variabilis. In ſecundo caſu, data æquatione partiali Syſtematis baſis datæ, invenienda eſt ſua homologa, quæ debet eſſe baſis variabilis: at datæ æquationi partiali Syſtema-

ſtematis baſis variabilis reſpondet tam homologa æquatio Syſtematis baſis datæ, quam illa baſis variabilis, ut habeatur vel Syſtema integrum baſis datæ, vel Syſtema integrum baſis variabilis, ut infra plenius demonſtrabitur.

§. 25. Sed redeamus ad illud, unde diſceſſimus, Syſtema integrum baſis variabilis, ac revocemus æquationes homologas hujuſce Syſtematis; ſcilicet $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.n = \overline{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m}.m$; & facta $\frac{a}{2} + n = m$, erit $mn = \overline{\frac{a}{2} + m}.\overline{m - \frac{a}{2}} = \overline{-\frac{a}{2} + n}.\overline{\frac{a}{2} + n}$: ac proinde dividuntur ſingulæ in duo Syſtemata partialia unius dimenſionis; primum æquationis

$$m' = \frac{a}{2} + m;\ n' = m - \frac{a}{2} \quad \text{vel } n' = \frac{a}{2} + m;\ m' = m - \frac{a}{2}$$

: ſecundum

$$m' = -\frac{a}{2} + n;\ n' = \frac{a}{2} + n \quad n' = -\frac{a}{2} + n;\ m' = \frac{a}{2} + n.$$

In utraque æquatione ſumma $m' + n' = m + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m = n - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n$ variabilis. At nec in prima m poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$, nec in ſecunda n poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$, ut utrique æquationi Syſtematis linearis baſis variabilis ſatisfaciant. Nam, ſi ponamus in prima $m = 0$, erit $m' = \frac{a}{2}$, & $n' = \frac{a}{2}$; quod fieri nequit: cum in æquatione $n' = m - \frac{a}{2}$, ſive $n' + \frac{a}{2} = m$, minimus valor ipſius n' debeat eſſe zero: in ſecunda vero, facta $n = 0$, eſſet $m' + \frac{a}{2} = n$, in qua tamen m' non poteſt eſſe minor zero. Ergo in prima, quando m minima eſt æqualis $\frac{a}{2}$, erit m' minima $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, & $n' = 0$ item minima; vel viceverſa: in ſecunda, poſita n minima $= \frac{a}{2}$, erit m' minima $= 0$; & item n' minima $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$. Ex hiſce rurſus eruitur vera ratio Analyſtis nondum cognita, cur in æquationibus ſecundæ dimenſionis, quæ oriuntur a producto duarum diverſarum radicum pertinentium ad idem Syſtema, nequeant radices ipſæ ambæ eo-

dem

dem tempore æquales eſſe zero, ac proinde earum rectangulum proprie dictum non niſi in una, vel altera dimenſione minimum reperiri. Nam datum Syſtema vel eſt baſis datæ, vel baſis variabilis: in primo caſu, facta una zero, altera ſit maxima oportet, & viceverſa: in Syſtemate vero baſis variabilis, quando una eſt minima æqualis zero, altera fit quidem minima, ſed non æqualis zero: vidimus enim in Syſtemate baſis variabilis $m = a + n$, facta n minima æquali zero, eſſe m minimam æqualem a. Quod ſi Syſtema integrum in duo Syſtemata partialia dividamus; oſtendimus in *Capite* V. *Lib.* I. *De Legitima* &c. & ſuperius non poſſe hujuſmodi Syſtemata partialia legitime inter ſe conſociari, ut integrum ac vere unum Syſtema producant, quin in Syſtemate baſis datæ unum ex partialibus ſit baſis datæ, baſis variabilis alterum; in Syſtemate vero integro baſis variabilis ambo Syſtemata partialia ſint baſis variabilis, ex quorum producto oritur æquatio ſecundæ dimenſionis Syſtematis integri baſis datæ, vel baſis variabilis. Porro nec in Syſtemate baſis datæ Syſtemata partialia ex. gr. $m' + n' = \frac{a}{2} + n - n + \frac{a}{2}$, nec in Syſtemate baſis variabilis $m' + n' = m + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m$ radices partiales eodem tempore poſſunt eſſe æquales zero; in primo enim ſemper inæquales fiunt, neque æquantur inter ſe, niſi in unico caſu, in quo $m' = n' = \frac{a}{2}$, & $n = 0$, ſive ſingulæ æquales dimidiæ baſi: in Syſtemate vero baſis variabilis numquam, cum data ſemper differentia inter ſe diſtent. Quare dum rectangula variabilium ejuſdem Syſtematis, ſive dum producta duarum diverſarum variabilium ejuſdem Syſtematis, vel producta variabilium diverſarum duorum Syſtematum partialium homologorum, in quæ dividitur Syſtema integrum, ſpectentur; numquam haberi poterunt factores eodem tempore zero æquales. Quid vero contingat quadratis, inferius oſtendemus.

§. 26. Hiſce explicatis, ſumamus iterum æquationes homologas Syſtematis baſis variabilis $mn = \overline{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m} \,.\, m = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n} \,.\, n$, & facta $-\frac{a}{2} + m = n$, ſive $m = n + \frac{a}{2}$, erit m valor minimus $= \frac{a}{2}$, quando n minima eſt æqualis zero: qui ſunt limites minimi Syſtematis baſis variabilis. Iiſdem limitibus præditum eſſe Syſtema baſis datæ æquationis $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m} \,.\, m = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \,.\, n$ ſupra invenimus: hoc tamen diſcrimine, quod zero limes ſit minimus tam Syſtematis baſis variabilis, quam Syſtematis baſis datæ; at alter limes $= \frac{a}{2}$, qui eſt minimus in Syſtemate baſis variabilis, ſit maximus in Syſtemate baſis datæ. Hinc

a Sy-

a Syſtemate baſis datæ interdicitur progreſſus ultra valorem $\frac{a}{2}$, regreſſu conceſſo uſque ad zero: at in Syſtemate baſis variabilis contra progredi licet ab hoc valore $\frac{a}{2}$ minimo uſque ad infinitum, non licet tamen regredi: quo cognito patet etiam valorem m in Syſtemate baſis datæ maximum $= \frac{a}{2}$, minimum in Syſtemate baſis variabilis hinc inde oppoſitis directionibus fluendo minui alterum, alrum augeri poſſe: ac proinde m, vel n unius Syſtematis alteri m, vel n alterius Syſtematis comparata negativa cenſenda eſt. Hinc pro re nata facilis ſe ſe offert tranſitus ab uno ad alterum Syſtema ope horum limitum, qui utrique Syſtemati ſunt communes. Nam, poſita in utroque Syſtemate $n = 0$, fit in utroque $m = \frac{a}{2}$; & æquationes utriuſque limitis minimi in Syſtemate baſis variabilis

$$(1)\; mn = \overline{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}+\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}+0.0 \text{: in Syſtemate baſis datæ maximi,}$$

& minimi

$$(2)\; mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}-\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}-0.0\,.$$

§. 27. Quoniam vero quæ ſuperius diximus viam tandem ſternunt ad haſce limitis æquationes magis intelligendas, atque ad earum uſum penitius cognoſcendum; res hæc, de qua agimus, requirit, ut in hiſce illuſtrandis, quantum per nos fieri poteſt, diligentius immoremur. Itaque ſint æquationes limitis homologæ (ſignis §. 45. *Cap.* V. *Lib.* I. indicatis notatæ)

$$\text{S. Y.} \quad (1)\; mn = \overline{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}+0.0$$

$$\text{S. A.} \quad (2)\; mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}-0.0;$$

quarum quælibet cum ſua homologa comparata licet repugnare videatur, tamen vidimus Capite antecedenti non poſſe in Syſtemate baſis datæ haberi maximum productum $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, quin habeatur minimum, atque ideo & legitimas, & neceſſarias eſſe: inferius autem repugnantiam, quam præſeferunt, penitus tollam, totumque negotium in pleno lumine collocabimus. Nunc ſumamus tantum æquationem limitis

(1) $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 0}.0$ S. Y., atque alteram

(2) $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - 0}.0$ S. A. Hæ, cum æquentur inter ſe, atque utrumque productum fiat zero (ea tamen lege, ut una tantum radix fiat zero, altera finita, ut diximus §. 25.), ſatis aperte declarant quamlibet ad utrumque Syſtema pertinere poſſe. Ut vero in quo inter ſe differant hujuſmodi æquationes inveſtigemus, obſervandum in Syſtemate baſis datæ tunc rectangulum mn eſſe minimum, ſive zero æquale, quando una ex radicibus eſt minima zero æqualis, & altera maxima æqualis a: ideoque cum ſupra $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$ nequeat creſcere baſis rectanguli medii, neceſſe eſt ut rectangula media a zero uſque ad maximum creſcentia baſim a minorem, majorem vero $\frac{a}{2}$ habeant, in quo caſu rectangulum fit maximum. Ergo baſis cujuſcumque rectanguli medii inter minimum & maximum neceſſario erit $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n$, & rectangulum medium $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$. At in Syſtemate baſis variabilis rectangulum minimum $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.n$ tunc erit zero, quando una radix minima eſt æqualis zero, & altera $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, ut in Syſtemate baſis datæ; ſed hîc $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ non eſt maxima ut in Syſtemate baſis datæ, ſed minima, ita ut nequeat ulterius minui: itaque in hoc Syſtemate rectangula media a zero minimo uſque ad maximum, non datum, ut in Syſtemate baſis datæ, ſed infinitum progrediuntur, & baſis $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n$: & $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ minima, $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \infty$ maxima. Rectangula igitur omnia ad Syſtema baſis datæ pertinentia ejuſdem altitudinis cum rectangulis mediis ad Syſtema baſis variabilis pertinentibus erunt ſemper minora iſtis, nec niſi in caſu altitudinis zero inter ſe conveniunt, in quo baſis & altitudo rectanguli utriuſque Syſtematis inter ſe æquales ſunt.

§. 28. Ab hoc igitur communi tamquam vinculo licet ab uno ad alterum Sy-

ſtema tranſitum facere. Dàta enim æquatione limitis baſis datæ (*Tab.* V. *fig.* 3.) (2) $mn = \overline{AC + CB - oBD} . oBD$; erit $(+m).(-n) = \overline{-AC - CB + oBD}.oBD = \overline{BC + CA + oBD}.oBD$: ſed oBD hujuſce Syſtematis baſis datæ $= oAd$ (*fig.* 5.) Syſtematis baſis variabilis; ergo $(+m).(-n) = \overline{-AC-CB+oBD}.oBD = \overline{BC+CA+oAd}.oAd$; & $m.(-n) = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + oAd}.oAd$; & in caſibus intermediis $m.(-n) = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+n}.n = \overline{BC+CA+Ad}.Ad$. Verum n negativum in Syſtemate baſis datæ æquale eſt n poſitivo in Syſtemate baſis variabilis, & viceverſa, ſive $-n = n$: ergo tandem $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+n}.n = \overline{BC+CA+Ad}.Ad$. Ergo a Syſtemate baſis datæ per limitem minimum æqualem zero tranſitum fecimus ad Syſtema baſis variabilis æquationis $mn = \overline{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + o}.o$; & ab hac ad homologam Syſtematis baſis variabilis $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+o}.o$; ac tandem ad æquationem mediam, ſive rectangulum medium $mn = \overline{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+m}.m = \overline{+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+n}.n$. Eodem modo data æquatione limitis Syſtematis baſis variabilis (*fig.* 5.) (1) $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+o}.o = \overline{AC+CB+oBD}.oBD$; erit $m.(-n) = \overline{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}-o}.o = \overline{-AC-CB-oBD}.oBD = \overline{BC+CA-oBD}.oBD$: ſed oBD Syſtem. baſ. variab. $= oAd$ (*fig.* 3.) Syſtema baſis datæ; ergo $m.(-n) = \overline{BC+CA-oAd}.oAd$. Verum n negativa in Syſtemate baſis variabilis æqualis eſt n poſitivæ Syſtematis baſis datæ, & viceverſa, ſive $-n = n$; ergo pro $-n$ negativa, quæ pertinet ad Syſtema baſis variabilis, poſita n poſitiva Syſtematis baſis datæ, erit $mn =$

$= \overline{BC + CA - oAd}.oAd$; & æquatio media

$$mn = \overline{BC + CA - Ad}.Ad = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$$

$= \overline{AC + CB - BD}.BD$ dat rectangulum medium Syſtematis baſis datæ. Hinc ope rectanguli minimi, quod eſt commune tam Syſtemati baſis datæ, quam Syſtemati baſis variabilis, ſive ipſius zero ſubſidio, qui eſt limes communis utrique Syſtemati, nullo negotio ab uno ad alterum Syſtema datur tranſitus. Quare hoc etiam artificio magis magiſque confirmatur quod ſuperius demonſtravimus.

§. 29. Ab hiſce hactenus demonſtratis docemur rectangula limitis minimi utriuſque Syſtematis, licet inter ſe exacte æqualia ſint (ſunt enim utraque æqualia zero), atque ab eadem æquatione indicata cenſeantur, tamen differre inter ſe additione, vel ſubtractione ipſius zero, quod tamen in calculo communi ſemper omittitur. Nam data æquatio $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + o}.o$, ſive $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + o$, ſive m æqualis a plus zero, indicat pertinere ipſam ad Syſtema baſis variabilis, in quo cum ſit tam $n = o$, quam $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ minima, poteſt quidem creſcere, non non vero decreſcere, & fieri in caſibus mediis $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n$, & rectangulum medium $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.n$: at data $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - o}.o$, in qua $n = o$ minima, & $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - o$ maxima; m poteſt decreſcere, non vero creſcere: ideoque rectangulum minimum $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - o}.o$ pertinet ad Syſtema baſis datæ, cujus medium $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$. Quamobrem hiſce animadverſis nullum ſimplicius excogitari poteſt artificium, quo ducaris ab uno ad alterum Syſtema, prout conditiones Problematis propoſitæ requirunt, quam quod exhibent veritates ſuperius demonſtratæ: ſatis enim eſt, data ex. gr. $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.n$, invenire æquationem limitis $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + o}.o$; ac intactis manentibus primo membro & data $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, zero quod erat poſiti-

 vum

vum in negativum mutare, ut ſit æquatio limitis $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - 0.0}$; ex qua deducatur æquatio media $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} - \overline{n.n}$: quo facto ad illud Syſtema deferimur, in quo baſis $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ eſt maxima, ſive ad Syſtema ſecundæ dimenſionis ortum a Syſtemate lineari baſis datæ. Contrario modo te geras oportet, ſi ab hoc baſis datæ ad alterum baſis variabilis Syſtema a propoſitis conditionibus tranſitum facere jubearis: Verbo, ceteris manentibus intactis in æquatione ſecundæ dimenſionis alterutrius Syſtematis, fac in radice $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \pm n$, vel $n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \pm m$, n, vel m in ſecundo membro negativam, ſi erat poſitiva, vel viceverſa, & ſtatim tranſmutationem Syſtematis obtinebis.

§. 30. Sumamus nunc alias duas æquationes in utroque Syſtemate his homologas, quas modo tractavimus, ſcilicet (1) $mn = -\overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m.m}$ in Syſtemate baſis variabilis; (2) $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m.m}$ in Syſtemate baſis datæ: & facta n in homologis æquali zero, ut ſit $m = \frac{a}{2}$, occurrunt æquationes limitis

$$\left.\begin{array}{ll}(1.^a)\; mn = -\overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m.m} = -\overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2}} \\ (2.^a)\; mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m.m} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}}\end{array}\right\}\text{reſpondentes ſuis homologis}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(3.^a)\; mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n.n} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 0.0} \\ (4.^a)\; mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n.n} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - 0.0}\end{array}\right\};$$

ſi more communi $(1.^a)$ & $(2.^a)$ tractentur, exhibent

$$(1.^{am})\; mn = -\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = -\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$$

$(2.^{am})$

(2.^{am}) $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, quæ quantitate æquales inter ſe ſunt, non vero poſitione: (1.^{a}) enim eſt negativa reſpectu (2.^{æ}), quam (2.^{am}) novimus exhibere maximum rectangulum Syſtematis baſis datæ, quando ſua homologa minimum rectangulum præbet. Igitur (1.^{a}) $mn = -\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ pertinet quidem ad Syſtema baſis datæ, & mn eſt maximum rectangulum, ſed negative ſumptum. Novimus enim n poſitivam Syſtematis baſis variabilis æqualem eſſe n negativæ Syſtematis baſis datæ, atque oriri ab æquatione $-(mn) = -\times\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m$ orta ab æquatione lineari $\frac{a}{2} - m = n$, in qua, facta $n = 0$, eſt $m = \frac{a}{2}$, & æquatio limitis $-(mn) = -\times\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2} = -\times\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$; quæ dat rectangulum maximum ex parte oppoſita, ſi *figuram* 3.^{am} Cap. I. hujus Libri ſolitariam ſumamus, ut illic demonſtravimus. Quare non poteſt ſic elata formula $mn = -\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ pertinere ad Syſtema baſis variabilis; tunc enim poſitivum æquale eſſet negativo, & hoc rectangulum mn in Syſtemate baſis variabilis nec maximum, nec minimum repræſentare poteſt; cum minimum ſit zero, maximum infinitum.

§. 31. Non eſt tamen cur nequeat hoc idem rectangulum etiam ad Syſtema baſis variabilis pertinere; ſed alio modo æquatio eſt tractanda, quem nunc tradimus. In *figuræ* 5.^{æ} quadrato l'L inſcriptam concipiamus *figuram* 3.^{am}, ut Syſtema baſis datæ cum Syſtemate baſis variabilis conjungamus. Patet ex dictis Capite antecedenti, & ex ipſa figuræ inſcriptione, quod, poſita (*fig.* 5.) BA $= a$, ſit CD$'' = -a =$ NE$''$, ut ſit Syſtema baſis datæ lineare E$''''$N $= m + n =$ E$'''$L + LN $= -a =$ E$'''$h + Nh, & $m =$ E$'''$h, $n =$ Nh; ex quibus oritur æquatio ſecundæ dimenſionis

$$mn = +\overline{(-a) - m}.m = \overline{NE'''' - E''''h}.E''''h = +\overline{(-a) - n}.n = \overline{E''''N - Nh'}.Nh'$$

$$= +\overline{\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right) - m}.m = \overline{NL + LE'''' - E''''h}.E''''h$$

$$= +\overline{\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right) - n}.n = \overline{E'''L + LN - Nh'}.Nh':$$

& facta n, ſive Nh$' = 0$; erit m, ſive E$''''$h $=$ E$'''$L $= +\left(-\frac{a}{2}\right)$; &

mn

$$mn = +\overline{\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{a}{2}\right)-\left(-\frac{a}{2}\right)}\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) = +\overline{\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{a}{2}\right)-o}.o$$

$$= NL.E''''L \qquad = \overline{E''''L + LN - o}.o.$$

Quamobrem in hoc caſu æquatio mn pertinet ad Syſtema baſis datæ $NE'''' = -a$ reſpectu $BA = a$, & facta $n = o$, rectangulum maximum $NL.E''''L = NL.LB$; rectangulum minimum $mn = o = GB.o$, facta $GB = NN = NE''''$, quemadmodum in Capite antecedenti oſtendi; ac diagonalis deſcripta ab extremitate variabilis $E''''h = m$ eſt ipſa $E''''B$ procedens ab E'''' uſque in B. Sed BE'''' pertinet etiam ad Syſtema baſis variabilis $n = a + m$, & BE procedens ex B uſque ad infinitum (in contraria ſcilicet directione diagonalis $E''''B$ deſcriptæ a rectangulo, quod pertinet ad Syſtema baſis datæ) eſt locus rectilineus, ſive limes rectangulorum $AD''.D''E''''$: ergo ſi hoc rectangulum ad Syſtema baſis variabilis referatur, maximum rectangulum in hoc Syſtemate infinitum mn ſe minuendo a puncto E infinito ſenſim decreſcit, donec in E'''' perveniat, & tunc $DE = m$, quæ erat infinita, fit æqualis $D''E''''$, & $AD = n = \infty$ fit $n = AD''$. Quare in hoc Syſtemate erit $mn = \overline{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+m}.m = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+n}.n$; & poſitis m, n infinitis, ſive $m = \infty'$, $n = \infty$, ut ſit $m - n = \infty' - \infty = a$, erit $mn = \infty.\infty' = \overline{\infty' - a}.\infty' = \overline{\infty + a}.\infty = \overline{\infty' - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}}.\infty' = \overline{\infty + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.\infty$: ex qua æquatione eruitur ∞' decreſcendo non poſſe minus fieri valore a, quin mn fiat negativum, ac proinde quin ad Syſtema baſis datæ tranſitus fiat. Hinc, facto $\infty' = a + n$, erit $\infty' - \infty = m = a + n - \infty = a$, & ∞ decreſcendo æquale n; proindeque $mn = \infty.\infty' = \overline{\infty' - a}.\infty' = \overline{\infty + a}.\infty = \overline{a+n}.n = \overline{m-a}.m$: in quibus æquationibus, facta $m = a$ valore minimo, fit $n = o$ minima, & æquatio $mn = \overline{a-a}.a$.

§. 32. At ſi a concipiatur diviſa bifariam, & æquatio ſic efferatur (1.ª) $mn = \overline{m - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}}.m = \overline{n + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.n$, & fiat $m - \frac{a}{2} = n$; facta ſubſtitutione, erit (2.ª) $mn = \overline{n - \frac{a}{2}}.\overline{n + \frac{a}{2}} = \overline{m + \frac{a}{2}}.\overline{m - \frac{a}{2}}$; in quarum utraque rectangulum mn remanet ſemper poſitivum, dummodo tam n in (1.ª), quam

quam m in (2.ª) non fiat minor $\frac{a}{2}$. Igitur, facta n minima $= \frac{a}{2}$, erit $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, & æquatio

$$mn = \overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}}.\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}} = 0.\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} = 3\frac{a}{2}.\frac{a}{2}:$$

qua ęquatione docemur nec n, nec m fieri poſſe zero, ut mn poſitivum ſemper perſeveret. Quare nihil mirum ſi in ęquatione $m - \frac{a}{2} = n$, poſitis $n = 0$, & $m = \frac{a}{2}$ ambabus minimis, oriatur

$$mn = \overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2} = \overline{0 - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2} = \overline{0 + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.0 = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.0;$$

ideoque in §. antecedenti ſtatuimus in formula $mn = \overline{m - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}}.m$, ſumendam eſſe $-\frac{a}{2} = +\left(-\frac{a}{2}\right)$, ſive poſitivam, & $mn = n \times \overline{m - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}}$ $= \overline{m + \left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}}.n$ referendam eſſe ad diagonalem B E‴, factis $m =$ B D″, $n =$ A D″, ſive facta variabilium permutatione. Sed de hac methodo ope infinitarum diagonalium, quæ ſingulę ſunt quidem ęquales N B, non autem identicę, ſed poſitione diverſę, ſive ſubſidio infinitarum ęquationum ſecundę dimenſionis baſis datę, quę ſingulę oriuntur ab una ęquatione limitis baſis datę $m + n = a$ infinities repetita, ac continuo fluxu loco mota (ut innuimus §. antecedenti) in *Parte* II. fuſius agemus. Ceterum ſubſtitutione a me ſuperius adhibita rectangulum $mn = \overline{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m}.m$ in Syſtemate baſis variabilis ſemper continetur, vitaturque ęquatio poſitivi ęqualis negativo, ſive non fit tranſitus ab uno ad alterum Syſtema. Nam cum oſtenderimus in §. 25. in ęquatione $mn = \overline{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m}.m = \overline{-\frac{a}{2} + n}.\overline{\frac{a}{2} + n}$, non poſſe n eſſe minorem $\frac{a}{2}$; ſemper vitatur negativum: ratio autem eſt, quia facta $-\frac{a}{2} + m = n$, erit $-\frac{a}{2} + \left\{-\frac{a}{2} + m\right\} = -\frac{a}{2} + n$: &, facta iterum $-\frac{a}{2} + n = m'$, erit $-\frac{a}{2} + \left\{-\frac{a}{2} + m\right\} = m'$, & $\left\{-\frac{a}{2} + m\right\} = m' + \frac{a}{2}$,

in

in qua cum valor minimus m' ſit zero, $-\frac{a}{2} + m$ non poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$: ergo valor minimus $-\frac{a}{2} + m = \frac{a}{2}$, & $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ ſaltem. Hac igitur methodo omnia remanent poſitiva, ſive vitatur tranſitus ab uno ad alterum Syſtema, qui indicatur ab æquatione $1 = -1$: quemadmodum fuſius in Capite III. hujuſce Libri explicabimus.

§. 33. Memoria revocatis quæ in toto Libro I. demonſtrata in Capite VII. recenſuimus, facile erit cognoſcere æquationem (1.am) $mn = \overline{m - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}}.m = \overline{n + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.n$, quæ donec ſic effertur dat rectangulum (*fig.* 5.) $mn = \text{AD.BD}$, vel $mn = \text{Bd.Ad}$ (omiſſis nunc ceteris combinationibus ad alteram diametrum), ſi ope æquationis linearis baſis variabilis $m - \frac{a}{2} = n$ fiat ſubſtitutio, in hanc converti (2.am) $mn = \overline{n - \frac{a}{2}}.\overline{n + \frac{a}{2}} = \overline{m + \frac{a}{2}}.\overline{m - \frac{a}{2}}$. In (1.a) variabiles $m + n = m - a + m = \text{BD} + \text{AD} = n + a + n = \text{AD} + \text{BD}$; & differentia $m - n = a = \text{AB}$ data, ſive $n + m = \text{Bd} + \text{Ad} = m + a + m = n - a + m$; & differentia $n - m = a = \text{BA}$ data. At ſi ſumamus variabiles a ſecunda formula exhibitas; erunt

$$m + n = m + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m = \text{DA} + \text{AD} = \text{dD}$$

$$n + m = n + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n = \text{dA} + \text{Ad} = \text{Dd}: \text{ ergo}$$

$m + n = m + m = \text{dD}$, & $m + n = 2m = \text{dD}$, & $\frac{m+n}{2} = m = \frac{\text{dD}}{2}$: item $n + m = n + n = \text{Dd}$, & $m + n = 2n = \text{Dd}$, & $\frac{n+m}{2} = n = \frac{\text{Dd}}{2}$: ex quibus oriuntur

$$\frac{m+n}{2} = m = \frac{\text{dD}}{2} = \text{dC}$$

$$\frac{n+m}{2} = n = \frac{\text{Dd}}{2} = \text{DC};$$

quo facto variabiles æquales ſunt quidem inter ſe, ſed non ſunt identicæ, cum ha-

habeant originis puncta diverſa, ac ſibi obviam occurrentes eodem tamen ſigno poſitivo afficiuntur, dabuntque ſimul additæ $m + n = \frac{m+n}{2} + \frac{n+m}{2}$ $= dC + DC$. Nunc huic æquationi addatur, ac ab eadem ſubtrahatur quantitas eadem $CB - CB = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$, vel $- CB + CB = - AC + AC$ $= - \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; & erit

$$(3.^a)\ m+n = \frac{m+n}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{n+m}{2} = dC + CB - CB + DC = dB + DB$$

$$(4.^a)\ m+n = \frac{m+n}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{n+m}{2} = dC - AC + AC + DC = dA + DA;$$

& ($3.^a$) dat rectangulum $mn = dB.DB$, ($4.^a$) $mn = dA.DA$:

$$\text{ſed} \left\{ \begin{array}{l} dB = DA;\ DB = dA \\ dA = BD;\ DA = AD \\ dB = Bd;\ DB = Ad \end{array} \right\},\ \text{ergo } mn = dB.DB = dA.DA$$

$= BD.AD = Bd.Ad$: quæ quidem rectangula ſunt æqualia inter ſe, ſed poſitione, directione, ac origine variabilium prorſus diverſa: variabiles enim homologæ, quas exhibet æquatio ($1.^a$), originem ducunt a punctis A & B, vel a B & A datis fluentes ambæ verſus eamdem partem D, vel d, ideoque ſemper differunt inter ſe data $a = AB = BA$. Variabiles vero homologæ erutæ ab æquatione ($2.^a$) ex punctis d, D variabilibus & dato tantum C centro, obviam ſibi invicem occurrunt, & poſſunt inter ſe æquari, quando ſcilicet (uti vidimus) rectangulum mn eſt maximum, ſive quando a æqualis eſt zero: in ceteris caſibus, cum neutra poſſit eſſe minor $\frac{a}{2}$, ſemper differunt inter ſe eadem quantitate data $a = AB = BA$, cum ſit $n - m = CB + CB$ $= AC + AC = AB = BA = a$.

§. 34. Cum vero hujuſmodi rectangula æqualia inter ſe promiſcue in calculo uſurpari poſſint, atque debeant, maxime ſane erraret qui affectiones unius rectanguli inconſulto applicaret alteri rectangulo æquali quidem primo, ſed poſitione, & origine variabilium diverſo, niſi prius intelligat hac ſubſtitutione a primum concepto rectangulo ad alterum, cui conveniunt tranſitum feciſſe. Hoc numquam animadverſo in Analyſi, membra hinc inde a ſigno æqualitatis in utraque æquatione tamquam identica ſemper ſuppoſuerunt ponuntque, me fruſtra in meis Opuſculis reclamante; atque hinc Analyſim ipſam mirum quantum per vim a veritate abduxerunt! Quod ut ſenſim demonſtretur, ſumatur æquatio §.

ſuperioris (*fig.* 5.) $mn = dB.DB = dA.AD = BD.AD = Bd.Ad$, quæ quidem æqualia ſunt, ſed inter ſe diverſa: inter hæc igitur rectangula æqualia eligatur rectangulum $mn = dB.DB = \overline{dC + CB}.\overline{-CB + DC}$ $= \overline{dC - CA}.\overline{DC + CA} = \overline{\frac{m+n}{2}+\frac{a}{2}}.\overline{\frac{m+n}{2}-\frac{a}{2}} = \overline{\frac{m+n}{2}-\frac{a}{2}}.\overline{\frac{m+n}{2}+\frac{a}{2}}$; in quo puncta extrema d, D variabilia ſumpta tamquam prima exhibent $m = dB$, $n = DB$; vel $m = dA$, $n = DA$, quæ ſibi invicem obviam occurrunt, & repræſentant Syſtema baſis datæ $dD = \frac{m+n}{2} + \frac{m+n}{2}$, quæ licet incognita ſit, tamen ut determinata eſt concipienda, cum non fluat in eadem operatione, fixis manentibus punctis d, D, ut fit in Syſtemate baſis datæ. Eſt igitur indeterminata d D, hoc eſt ſumi poteſt cujuſcumque magnitudinis majoris a, ſed ad libitum determinata, eadem perſeverat: ut vere dicenda ſit *indeterminata*, ſed non *fluens*. Tractata igitur hac æquatione eodem modo quo æquatio ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis datæ; erit $mn = dB.DB$ $= \overline{\frac{m+n}{2} + \frac{m+n}{2} - DB}.DB$: ſed $DB = \frac{m+n}{2} - \frac{a}{2}$, & $\frac{a}{2} = \frac{m-n}{2}$; ergo $DB = \frac{m+n}{2} - \left\{\frac{m-n}{2}\right\} = n$, ergo $dB.DB$ $= mn = \overline{\frac{m+n}{2} + \frac{m+n}{2} - n}.n$: verum ex demonſtratis $dB.BD$ $= AD.BD = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.n$; igitur $mn = \overline{\frac{m+n}{2} + \frac{m+n}{2} - n}.n$ $= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.n$: at $\frac{m+n}{2} = CD = CB + DB = \frac{a}{2} + n$; ergo tandem $mn = \overline{\frac{m+n}{2} + \frac{m+n}{2} - n}.n = \overline{\left\{\frac{a}{2} + n\right\} + \left\{\frac{a}{2} + n\right\} - n}.n$ $= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.n$. Nunc ut conſtruamus primum rectangulum (quoniam ſecundum jam conſtructum vides in *figura* 5.ª), ex punctis d, D (*fig.* 8.) ducantur ad angulum ſemirectum dN, DN, quæ ſibi occurrent in N, & dC $= CN = DC$; ideoque dN, DN erunt diagonales quadrati $(dC)^2$ $=$

$= \left\{\frac{m+n}{2}\right\}^2$, $(DC)^2 = \left\{\frac{m+n}{2}\right\}^2$, atque D N erit locus geometricus rectanguli d E″ uſque ad maximum $dC.DC = dN$, & diagonalis d N locus geometricus omnium rectangulorum D e″ uſque ad maximum $DC.dC = DN$: ideoque Syſtema hoc vicem gerit Syſtematis baſis datæ, & eo modo tractandum, ipſiſque affectionibus eſt obnoxium, quibus rectangula Syſtematis ſecundæ dimenſionis baſis datæ Capite antecedenti obnoxia eſſe demonſtravimus.

§. 35. Erit igitur (*fig. ead.* 8.) $mn = dB.DB = \overline{n + \frac{a}{2} + n + \frac{a}{2} - n}.n$ $= AD.BD = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.n$; quæ tamen rectangula, poſita d D fixa, non æquantur inter ſe, niſi in punctis e, e″, E″, E, ducta linea e E ex punctis e, E, in quibus quatuor hæc rectangula, ſcilicet d E″, A E, D e″, B e ſunt invicem æqualia: primum, ac tertium $mn = dE'' = De'' = \overline{\left\{n + \frac{a}{2}\right\} + \left\{n + \frac{a}{2}\right\} - n}.n$ pertinent ad Syſtema baſis indeterminatæ, ſed fixæ: cetera duo $mn = AE$ $= Be = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.n$ ad Syſtema baſis variabilis.

Sed poſita baſi d D conſtanti, tunc mn rectangulum fit maximum, quando $(-n)$ æquatur $n + \frac{a}{2}$; in quo caſu $mn = dC.NC$

$= \overline{\left\{n + \frac{a}{2}\right\} + \left\{n + \frac{a}{2}\right\} - \left\{n + \frac{a}{2}\right\}}.\overline{n + \frac{a}{2}} = \overline{n + \frac{a}{2}}.\overline{n + \frac{a}{2}}$: at mn $= AD.BD$ fit $= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.\overline{\frac{a}{2} + n}$, quæ rectangula non amplius æqualia ſunt inter ſe, ſed maximo $mn = dC.NC$ reſpondet rectangulum (*Tab.* V. *fig.* 9.) $AD'.D'E = \overline{AC + CB + BD'}.BD'$ $= \overline{AC + CB + BD'}.D'E = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.\overline{\frac{a}{2} + n}$, facta DD' $= \frac{a}{2}$, ut ſit $BD' = n + \frac{a}{2}$. Sed tamen obſervandum in æquatione (*fig.* 8.) $mn = dC.NC = \left\{n + \frac{a}{2}\right\}.\left\{n + \frac{a}{2}\right\}$ maximi rectanguli baſis d D, in

qua n eſt non variabilis; ſi ponamus n non ſolum indeterminatam, ſed etiam fluentem, cum n a zero minima uſque ad infinitum maxima procedat, erit facta $n = 0$ minimus valor hujuſce rectanguli maximi $dC.NC = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, ſive puncta d, D recidunt in puncta A, B, & $CN = AC$; eritque $AC.CN = mn$

$$= \overline{\left\{n+\frac{a}{2}\right\} + \left\{n+\frac{a}{2}\right\} - \left\{n+\frac{a}{2}\right\}}.\left\{n+\frac{a}{2}\right\} = \overline{\frac{a}{2} \pm 0}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2},$$

cui reſpondet in Syſtemate baſis variabilis (*fig.* 9.) $mn = AD'.BD'$

$$= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.\overline{\frac{a}{2} + n}, \text{ ſive } mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.\frac{a}{2} = AN + NB + BE.$$

Hinc deducitur dupla quædam veluti communicatio Syſtematis ſecundæ dimenſionis baſis datæ cum Syſtemate baſis variabilis. Nam rectangulo minimo, ſive zero Syſtematis baſis datæ reſpondet rectangulum idem minimum, ſive zero in Syſtemate baſis variabilis. Sed quoniam in Syſtemate baſis datæ rectangulo minimo reſpondet rectangulum maximum, ſive quadratum dimidiæ baſis; in Syſtemate baſis variabilis huic rectangulo maximo Syſtematis baſis datæ reſpondet triplum quadratum ejuſdem dimidiæ baſis, quod eſt minimum omnium rectangulorum, quæ reſpondent maximis rectangulis baſis determinatæ, ſed incognitæ (*fig.* 8.) $dC.NC = \left\{n+\frac{a}{2}\right\}.\left\{n+\frac{a}{2}\right\}$ æquationis generalis mn

$$= \overline{\left\{n+\frac{a}{2}\right\} + \left\{n+\frac{a}{2}\right\} - \left\{n+\frac{a}{2}\right\}}.\left\{n+\frac{a}{2}\right\} = \left\{n+\frac{a}{2}\right\}.\left\{n+\frac{a}{2}\right\}$$

$= dC.NC$; & (*fig.* 9.) $AD'.BD' = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.\overline{\frac{a}{2} + n}$; in qua æquatione minimum rectangulum maximorum eſt quando $n = 0$, ideoque (*fig.* 8.) $dC.NC = AC.NC = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$; & minimum (*fig.* 9.) $AD.DB = 3.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$: hæc vero ſimul ſumpta totum quadratum a^2 adæquant. Hæc nunc animadvertiſſe ad ea, quæ dicenda ſunt, multum conferre impoſterum ſenties.

§. 36. Sed ut totum hoc myſterium e tenebris erutum in ampliſſima luce collocetur, & cognoſcatur quantum conferant diverſæ ſubſtitutiones æqualium quantitatum pro æqualibus ad æquationem propoſitam in diverſam naturam, ac valorem diverſum transformandam, revocentur æquationes homologæ Syſtematis baſis variabilis $mn = -am + mm = an + nn$. Sumpta prima $mn = -am + mm$, & facta $n = 0$, erit $m(0n) = -\overline{a+m}.m$, & $0n = -a + m$, & $m = a + 0n$: hoc

hoc eſt minimæ $n = o$ reſpondet minima $m = a$: & $(on)^2$ quadratum minimum $= (o)^2$, & quadratum minimum $(m)^2 = a^2$. Quod ſi fiat $m = o$, æquatio erit $(om).n = \overline{-a+om}.om$, & $n = -a+om$, ſive poſitivum æquale negativo. Hæc conſecutio tolli nequit, niſi duobus hiſce modis. Fiat primo modo & ipſa n negativa, in quo quidem caſu a Syſtemate baſis variabilis ad Syſtema baſis datæ fit tranſitus ; erit enim æquatio limitis $-n = -a + om$, & $a = n + om$, aut $a = n + m$ æquatio intermedia. Poſita igitur $n = o$ minima in hoc Syſtemate, minimus valor m non poteſt eſſe minor quantitate a, ut ſit æquatio $m(on) = -aa + aa$, ſive rectangulum minimum

$$m(on) = \left\{\begin{matrix} -am + mm \\ -a.a + a.a \\ (-a+a).a \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} an + nn \\ a(on) + (on)(on) \\ on.(a) \end{matrix}\right.$$

at quadratum minimum $(on)^2 = (o)^2$; & $(m)^2 = (a)^2$: hoc eſt rectangula minima ſunt ambo zero æqualia. Notandum tamen (quod inferius advertiſſe juvabit) baſim rectanguli $m(on) = -aa + aa$ poſſe eſſe duplam baſis ſecundi, cum $m(on)$ ſit etiam $= \overline{a+a}.\pm oa$. At quadratorum minimorum unum æquale eſt zero, ſive $(on)^2 = (o)^2$, alterum vero eſt $(m)^2 = (a)^2$; & limites minimi tam variabilium, quam rectangulorum & quadratorum hujuſce Syſtematis erunt

$$n = o;\ m = a;\ m.(on) = -aa + aa = a(on) + (on).(on)$$
$$(n)^2 = (o)^2 \quad ; \quad (m)^2 = (a)^2$$

§. 37. Sed cum oſtenderimus hoc Syſtema aliis duobus limitibus maximis, ſive infinitis gaudere, alter modus erit, ſi fiat $n = \infty$: nam tunc $m(\infty n) = \overline{-a+m}.m$, & $\infty n = -a + m$, & $m = \infty n + a$: igitur m & n in limite maximo ambæ infinitæ, differunt tamen ſemper inter ſe quantitate data a. Poſita vero $m = \infty$, erit $(\infty m) n = \overline{-a+\infty m}.\infty m$, & $n = \infty m - a$: ergo in extremis limitibus erunt variabiles maximæ $n = \infty n$; $m = \infty n + a$; & in caſibus mediis $m = n + a$, eadem æquatione lineari, & eodem Syſtemate variabili manente: rectangula vero maxima erunt $m(\infty n) = -am + mm = -a(n\infty + a) + (n\infty + a)^2 = an + nn = a(\infty n) + (\infty n)^2$; & quadrata item maxima $(n)^2 = (\infty n)^2$; $m^2 = (n\infty + a)^2$: variabiles licet infinitæ differunt quantitate a : rectangula infinita æqualia ſunt inter ſe ; eſt enim $-a(n\infty + a) + (n\infty + a)^2 = -a(n\infty) - a^2 + (n\infty)^2 + 2(n\infty)a + a^2 = a(\infty n) + (\infty n)^2$. Quadrata vero differunt inter ſe quantitate infinita $2(\infty n)a + a^2$; eſt enim $m^2 - n^2 = 2(\infty n)a + a^2 = \overline{2\infty n + a}.a$

=

$= \infty n + \frac{a}{2} . 2a$: & in caſibus mediis $n^2 = n^2$; $m^2 = (n+a)^2$, ac differentia $m^2 - n^2 = (n+a)^2 - n^2 = 2an + a^2$: & facta $n = 0$, ſive in limite minimo, $n^2 = (0)^2$, $m^2 = a^2$, ut ſupra. Quamobrem quodlibet Syſtema variabile ſecundæ dimenſionis a quatuor limitibus ſemper circumſcribitur, duobus maximis, duobus minimis; ita tamen ut minimi, vel maximi aut ſimul ambo creſcant, aut ſimul decreſcant modo prorſus ei contrario, quem Syſtema baſis datæ requirit, in quo minimus limes ſemper cum maximo conſociatur.

§. 38. Sumamus nunc alteram æquationem homologam Syſtematis baſis variabilis $mn = an + nn$, & facta $n = 0$, erit $m(0n) = a(0n) + (0n).(0n)$, & $m = a + 0n$, ſive in caſu n minimæ æqualis zero, eſt m minima æqualis a, ut ſupra: at ſi fiat $m = 0$, erit $(0m)n = \overline{a+n}.n$, & $0m = a+n$; atque iterum incidimus in poſitivum æquale negativo, niſi ea artificia a me ſupra tradita adhibeantur, quibus fit variabilium permutatio, & ab uno ad alterum Syſtema deferimur, quemadmodum vidimus. Verum ſi in Syſtemate baſis variabilis primo ſumpto contineri velimus, ad alios duos limites maximos confugiendum eſt (quoniam jam prima ſuppoſitione duo limites minimi, qui unice dantur, inventi fuerunt); & facta $m = \infty$, erit $\infty m = a + n$, & facta $n = \infty$, $m = a + \infty n$, & $m - n = a$, ſive infinitum unum m majus altero infinito n quantitate data a. Quamobrem iterum eruitur duobus modis vitari poſſe æquationem limitis $m = -a$ poſitivi æqualis negativo; vel ſubſtitutione m negativæ pro m poſitiva, ut ſit $-m = -a \pm 0n$, ex qua oritur vel $m = a - 0n$, vel $m = a + 0n$, primum Syſtema baſis datæ, ſecundum Syſtema baſis variabilis: vel $m = -a \pm \infty n$, ex prima $m = -a + \infty n$, ſive $m + a = \infty n$, ex ſecunda $a = m - \infty n$; & facto m infinito, $a = \infty m - \infty n$, & $a + \infty n = \infty m$ æquatio limitis infiniti, ex qua oritur æquatio media $a + n = m$: quo modo, eodem Syſtemate variabili ſervato, permutatione variabilium a puncto B (*fig.* 5.) verſus D ad punctum A verſus d in noſtra *figura* tranſlati fuimus.

§. 36. Quamobrem (præſtat enim veritatem hanc, cujus ignorationi quicquid impervii, quicquid abſoni patitur Analyſis communis tribuat oportet, pluribus modis demonſtrare, ac ſæpius inculcare) quoties in æquationibus limitum impingitur in poſitivum æquale negativo, univerſim ſtatuendum eſt æquationem propoſitam non pertinere ad limites minimos Syſtematis baſis variabilis, ſed ad limites maximos, ſive infinitos, præponendumque quantitati negativæ non zero, ſed infinitum, hoc eſt non ſubintelligendum eſſe zero, quemadmodum ſemper vulgo fit, ſed Infinitum illud, cujus *Cap. VI. Lib. I.* primas dedimus notiones, & licet votis omnibus damnatum jure primum, meo quidem judicio, in calculum invehere conamur. Itaque data æquatione limitis $m = -a$, ex qua neceſſario communis doctrina eruit poſitivum æquale negativo (ſupponit enim ſemper, vel

vel ſubintelligit zero additum $- a$, ut ſit $m = 0 - a$), ſi fiat $m = \infty n - a$, erit $m + a = \infty n$, ſive æquatio pertinens ad limites infinitos $m = \infty n - a$, $n = \infty m + a$, ſive $\infty n - \infty m = a$, ideoque m in limite minimo fieri nequit minor zero, neque minor a; proindeque $m + a$ non poteſt eſſe æqualis zero (ut ſemper in ſimili caſu vulgo fit), ſed $m + a = \infty$. Quo docemur quantitates *vere & abſolute tranſcendentes* eſſe revera 0, & ∞, quæ inter ſe neceſſario vinculo colligantur ita, ut una ab altera nequeat ſeparari: ideoque una ſublata, altera cum tota Analyſi corruat neceſſe eſt.

§. 40. Porro tria genera limitum diſtinguenda ſunt in unoquoque Syſtemate ſecundæ dimenſionis tam baſis variabilis, quam baſis datæ: limites ſcilicet *lineares*, qui dant maximos, vel minimos valores variabilium Syſtema lineare conſtituentium: limites *ſecundæ dimenſionis*, qui dividuntur in limites, quos dicam *rectangulos*, qui dant maxima, vel minima rectangula: & limites, quos appellabo *quadraticos*, qui dant maxima, vel minima quadrata. Qui quomodo inter ſe comparentur, diligentius eſt inquirendum. Sumpto igitur primum Syſtemate lineari baſis datæ $m + n = a = AB$ (*fig.* 3.), in quo limes minimus cum maximo conjungitur, & facta una variabilium maxima, erit altera homologa minima, & æquationes limitis

$$m + (0n) = a + 0 = AB + B : m = AB = a ; n = 0 = B$$
$$0m + n = 0 + a = A + BA : m = A = 0 ; n = a = BA.$$

Si harum æquationum limitum quadrata ſumamus; erit

$$m^2 + 2m(0n) + (0n)^2 = a^2 = (AB)^2 + 2AB.B + B^2$$
$$(0m)^2 + 2n(0m) + n^2 = a^2 = A^2 + 2BA.A + (BA)^2$$

: in quibus æquationibus ut poſitæ uni variabili $= 0$ reſpondet altera maxima $= a$; ita poſito quadrato zero, ſive minimo, alterum homologum maximum $= (a)^2$ exurgit: at rectangula in utroque limite ſemper æqualia ſunt zero, cum conſtent ex producto unius maximæ in alteram minimam, ſintque $2AB.B = 2a.0$, vel $2BA.A = 2a.0$, uti vidimus: æquationes autem limitis in caſibus intermediis

$$\left.\begin{array}{l} m^2 + 2m(0n) + (0n)^2 = (AB)^2 + 2AB.B + B^2 = a^2 \\ (0m)^2 + 2n(0m) + (n)^2 = A^2 + 2BA.A + (BA)^2 = a^2 \end{array}\right.$$

in ſequentes tranſmutantur,

$$\left.\begin{array}{l} m^2 + 2m.n + n^2 \\ m^2 + 2m.n + n^2 \end{array}\right\} = (AD)^2 + 2AD.BD + (BD)^2 = a^2$$

: quæ æquationes mediæ, donec nullum punctum datum in AB determinetur, ſemper erunt indeterminatæ, nec niſi limitis æquationes datas eruere licet, ſive niſi maximum, vel minimum quadratum, rectangulis ſemper zero æqualibus. Ex iſtis tamen conſecutiones maxime utiles deducuntur. Ac primum ſi invicem hujuſmodi æquationes limitis comparentur, erit $m^2 = (AB)^2 = (n)^2 = (BA)^2$; unumquodque enim æquatur a^2: ergo quoniam $AB = - BA$, & $BA = - AB$, erit

$$m^2 = (AB)^2 = (a)^2 = (-AB)^2 = (-a)^2, \text{ vel}$$
$$m^2 = (-AB)^2 = (-a)^2 = (BA)^2 = (a)^2;$$

quæ tamen quadrata ſemper $+ (a)^2$ poſitivo æqualia ſunt, quacumque ex parte ſurſum, vel deorſum erigantur, & ab una A B, vel ab altera B A oriantur. At vera ratio cur $(+a)^2 = (-a)^2$, ſive cur quadratum quantitatis negativæ æquale ſit quadrato ejuſdem poſitivæ, eſt quia tam A B, quam B A in æquatione lineari limitis $m + n = a$ eodem ſigno poſitivo effertur (vidimus enim *Cap.* III. *Lib.* I. & alibi tam $m + on = AB = a$, quam $om + n = BA = a$): ita ut ſi B A ſumi nequeat poſitiva, nec quadratum B A poſitivum ſumi poſſet. At B A reſpectu A B, vel A B reſpectu B A ſumitur negativa; ergo eadem ratione ne dicam potiori jure tam quadratum B A reſpectu A B, quam A B reſpectu B A negativum ſumi poteſt, cum liberum ſemper ſit unumquodque quadratum ſurſum, vel deorſum collocare. Hoc magis magiſque confirmat regulas, quas tradidimus circa ſigna quantitatibus præfigenda.

§. 41. Item conſequitur ſuperiores æquationes limitis diſpertiri poſſe in ſequentes (*fig.* 3.)

(1) $m^2 + (on)^2 = (AB)^2 + (B)^2 = a^2$; (3) $2m.(on) = 2AB.B$

(2) $(om)^2 + (n)^2 = (A)^2 + (BA)^2 = a^2$; (4) $2n.(om) = 2BA.A$:

ac ſic ordinatæ (1.ª) & (2.ª) dant æquationes medias

$$m^2 + n^2 = \overline{AB}^2 = a^2$$
$$m^2 + n^2 = \overline{BA}^2 = a^2$$

: in utroque caſu tam A B, quam B A ſunt diagonales, & m, n repræſentant latera cujuſcumque trianguli rectanguli ex infinitis, quæ ſuper baſi A B hinc, vel inde a puncto C efformari poſſunt: ideoque ſola ſubtractione zero, ſive rectangulorum $2m(on)$, vel $2n(om)$, variabiles m & n, quarum ſumma datam A B æquabat, in latera trianguli rectanguli ejuſdem baſis A B convertuntur. Ergo iterum magis magiſque confirmatur quod diximus de introductione, aut ablatione zero, ſive puncti in æquationibus; hic enim additione, vel ſubtractione $2AB.B$, vel $2BA.A = 0$ ab æquationibus limitis, æquationes intermediæ, valores variabilium, & natura productorum mutantur.

§. 42. Illud etiam tertio conſequitur in æquationibus intermediis ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis datæ, quæ oriuntur ab æquationibus limitum, rectangula $2mn = 2AB.B$, & $2mn = 2BA.A = 2a.o$, quæ dant duplum productum maximæ variabilis in minimam, in caſibus mediis converti in $2mn = 2AD.BD = 2BD.AB$, ideoque fluente minima zero a puncto B, vel A verſus A, vel B, decreſcit A B, vel B A, quæ erat altera facta maxima: ac proinde quantitas a in hoc caſu non eſt ut conſtans ſemper accipienda, ſed ut fluens, quæ ad maximam magnitudinem in limite perducta, licet augeri amplius non poſſit, decreſcere tamen fluendo poteſt uſque ad zero. Hoc autem quanti momenti ſit in tota Analyſi vidimus Capite ſuperiori, in quo oſtendimus §. 25. rectangulum mn revera in utraque dimenſione debere fluere, atque inferius magis magiſque conſtabit. Illud unum hic dico, fieri non poſſe quin

Ana-

Analyſis communis in gravia, ac multiplicia impedimenta identidem offendat, quippe quæ ſemper in calculis tamquam conſtantem aſſumit eam quantitatem, quæ ſemel dato alicui valori æqualem ſe ſe offert; cum tamen naturam fluentis vere univerſim referat, ac in eo tantum caſu, in quo ſe ſe offert facta maxima vel minima, naturam conſtantis aſſumat. Quamobrem donec in Syſtemate lineari $m + n = a$, a integra concipitur, nulloque puncto dato medio diſtincta, datis limitibus linearibus uno maximo, altero minimo, ſive data una ex variabilibus maxima, & altera zero, habentur maxima & minima quadrata; ſive limites quadratici, maximus æqualis quadrato maximæ variabilis a^2, & minimus $= (0)^2$ æqualis quadrato minimæ m, vel n æqualis A, vel B: & limites rectanguli ſemper æquales ſunt zero: hinc in caſibus intermediis omnia fiunt variabilia, ſcilicet tam lineares valores, quam rectangula, & quadrata; proindeque æquatio intermedia in infinitas æquationes ſecundæ dimenſionis reſolvi poteſt, atque infinitis radicibus binis & binis ſumptis conſtare.

§. 43. Cum igitur in æquatione propoſita ſecundæ dimenſionis rectangula in utroque limite facta zero infinitæ indeterminationi in caſibus intermediis obnoxia ſint; ut valores variabilium intra anguſtiores terminos contineantur, confugiendum eſt ad rectangula maxima, atque conſiderandum quæ conſecutiones oriantur a rectanguli maximi poſitione. Itaque cum Capite ſuperiori demonſtraverimus rectangulum $mn = \overline{a-m}.m = \overline{a-n}.n$ tunc fieri maximum, cum variabiles inter ſe æquales ſunt, ſive $m = n = \frac{a}{2}$ dimidiæ baſi; patet lineam datam, ſive baſim A′B′ (*Tab. VI. fig.* 10.) hac ſuppoſitione bifariam dividi in C: atque inſuper, facta $m = n = \frac{a}{2}$, cum ſit $mn = \overline{BA-m}.m = \overline{BA-\frac{a}{2}}.\frac{a}{2}$ $= \overline{AB-n}.n = \overline{AB-\frac{a}{2}}.\frac{a}{2} = BC.AC = AC.BC = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$: patet etiam hac ſuppoſitione lineam AB non amplius eſſe baſim quadrati A′B′ integri, quemadmodum erat quando ſumpſimus in primo caſu integram $A'B' = a$, ſive integrum Syſtema, ſed per mediam quadrati diagonalem in C tranſeundo in quatuor æquales partes, duo nempe quadrata, ac duo rectangula æqualia totum quadratum integrum $(a)^2$ dividere, eamque *figuram* 3.[am] exhibere, quam Capite antecedenti deſcripſimus. Hac igitur A′B′ diviſione bifariam facta determinantur ac in loco medio C quadrati ſtabiles fiunt AB, C′N ſe ad normam decuſſantes in centro C, ut axes, ſive diametri jure appellari poſſint, quæ ante hanc diviſionem per totam altitudinem C′N, vel A′B′ quadrati ſemper ſibi ipſis æquales ac parallelæ excurrebant. Hinc æquatio

$$mn = \frac{\overline{A'B'-n}.n}{\overline{A'B'-B'D'}.B'D'} = \frac{\overline{B'A'-m}.m}{\overline{B'A'-A'd'}.A''d'}$$

, a qua donec A′B′ con-

cipitur integra, non niſi limites rectangulorum minimi, ſive zero erui poſſunt; facta hac diviſione fit $mn = \dfrac{\overline{AC+CB-BD}.BD}{\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n} = \dfrac{\overline{BC+CA-Ad}.Ad}{\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m}$; ex quo eruuntur tam limites maximi, quam minimi rectangulorum. In limite tamen maximo variabilis n originem ſumens a puncto B fluit verſus C, & fit maxima $= \frac{a}{2} =$ BC in puncto C; & variabilis m fluit ab A uſque ad C, in quo fit maxima $=$ AC $= \frac{a}{2}$: in limite vero minimo n eſt zero in B, & AB $= m$ maxima $=$ AC $+$ CB $= a$; m vero eſt zero in puncto A, & n fit maxima $=$ BA. Hoc modo Syſtema integrum baſis datæ diviſum fuit a limite maximo in duo partialia Syſtemata, in quibus m, & n nequeunt fieri majores $\frac{a}{2}$, & in quo rectangula maxima non majora $\frac{a^2}{4}$ conſtituunt quadrata maxima m^2, vel $n^2 = \frac{a^2}{4}$, & minima æqualia $(on)^2$, vel $(om)^2$: ac totum Syſtema $(a)^2$ in quatuor Syſtemata $\frac{a^2}{4}$ diſpertiunt.

§. 44. Hiſce igitur præparatis, quoniam valor maximus m, vel n non poteſt ſuperare $\frac{a}{2}$, ponatur $\frac{a}{2} - n = m$ poſitivæ, ut ſit $n = \frac{a}{2} - m$; & facta ſubſtitutione in formula ſuperiori, erit (*fig.* 3.)

$$mn = \frac{\overline{AC+CB-BD}.BD}{\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n} = \frac{\overline{BC+CA-Ad}.Ad}{\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m}$$

$$= \frac{\overline{AC+CD}.\overline{BC-CD}}{\overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m}} = \frac{\overline{BC+Cd}.\overline{AC-Cd}}{\overline{\frac{a}{2}+n}.\overline{\frac{a}{2}-n}};$$

qua ſubſtitutione æquatio integra linearis $m + n = a$ Syſtematis baſis datæ diviſa fuit in duo partialia Syſtemata, baſis datæ unum, alterum baſis variabilis, ſive

$m =$

$m = \frac{a}{2} + m$; $n = \frac{a}{2} - m$: vel $m = \frac{a}{2} + n$; $n = \frac{a}{2} - n$

$m = AD = AC + CD$; $n = BD = BC - CD$: $m = Bd = BC + Cd$; $n = Ad = AC - Cd$:

quæ partialia Syſtemata homologa conflantur ex datis $\frac{a}{2}$ æqualibus, ſed diverſis, identicis m vel n variabilibus, & habent ſummam variabilium primi membri $m + n = AC + oCD + BC = a$, vel $m + n = BC + oCd + AC = a$; quemadmodum fieri debere oſtendimus in *Capite* V. *Lib.* I. *De legitima* &c. Porro hac ſubſtitutione fluens n vel m non amplius ab extremo puncto B, vel A verſus centrum C procedit, ſed originem ſumens a centro C hinc inde fluere poteſt verſus A, vel verſus B; neque refert utrum ab una, vel ab altera parte dicatur poſitiva, vel negativa, cum a ſe ipſa prout identica ſemper ſubtrahitur; eſt enim communis & identica tam in uno, quam in altero partiali Syſtemate.

§. 45. Illud etiam ex hac formula $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - mm = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - nn$ artificiis ſuperioribus ſic transformata utilitatis conſequitur, quod ſemper tam in limite maximo, quam in minimo, & in caſibus mediis mn tam naturam rectanguli, quam naturam quadrati referre poteſt: hoc eſt mn in omnibus caſibus tam quadratum, quam rectangulum eſſe poteſt. Nam quando eſt maximum, erit m, vel $n = o$, ideoque $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, qui notandi modus, ut vidimus Cap. ſuper. ſignificat tam productum duorum factorum æqualium quidem, ſed diverſorum, quam productum ejuſdem numero radicis in ſe ipſam ductæ: in primo caſu $m.n = AC.BC$ rectangulum; in ſecundo $m^2 = n^2 = (AC)^2 = (BC)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ quadratum, ut diximus eodem loco. Quando vero formula dat minimum, erit $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.\overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}}$, ſive productum duorum factorum $m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, $n = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$; vel viceverſa; hoc eſt rectangulum nullum a maxima variabili in minimam ducta genitum: vel poteſt eſſe æquale differentiæ duorum quadratorum æqualium, & tunc $mn = m^2 = n^2 = \overline{(om)^2} = (on)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$: & tandem in caſibus mediis $mn = \overline{\frac{a}{2} + m}.\overline{\frac{a}{2} - m}$

$= \overline{\frac{a}{2}+n}\,.\,\overline{\frac{a}{2}-n}$; ſive $\begin{matrix} m = \frac{a}{2} + n \,;\, n = \frac{a}{2} - n \\ m = \frac{a}{2} + m \,;\, n = \frac{a}{2} - m \end{matrix}$; rectangulum genitum a duobus factoribus inæqualibus & diverſis : vel $mn = (n)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - (m)^2$, vel $(m)^2 = \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 - (n)^2$; quod Syſtema quadraticum baſis datæ in Capite ſuperiori appellavimus. Quare ſola diviſione baſis a in duas æquales partes dividitur Syſtema lineare baſis datæ in duo Syſtemata partialia linearia baſis datæ, & baſis variabilis; e quibus oriuntur quatuor Syſtemata partialia ſecundæ dimenſionis rectangula, vel quadratica, cum promiſcue tam unam, quam alteram formam induere poſſint.

§. 46. Formula itaque generalis omnes hoſce caſus univerſim complectens ſequens erit (*fig.* 3.)

$$mn = \frac{\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}\,.\,m}{\overline{BC+Cd}\,.\,Ad} = \frac{\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n}{\overline{AC+CD}\,.\,BD} = \frac{\overline{\frac{a}{2}+m}\,.\,\overline{\frac{a}{2}-m}}{\overline{AC+CD}\,.\,\overline{BC-CD}}$$

$$= \frac{\overline{\frac{a}{2}+n}\,.\,\overline{\frac{a}{2}-n}}{\overline{BC+Cd}\,.\,\overline{AC-Cd}} = \frac{\left\{\frac{a}{2}\right\}^2 - m^2}{(AC)^2 - m^2} = \frac{\left\{\frac{a}{2}\right\}^2 - n^2}{(BC)^2 - n^2}$$; ex qua

eruuntur tam maximæ & minimæ variabiles Syſtematis linearis integri baſis datæ $m + n = a$, quam maxima & minima rectangula atque quadrata, & illa quæ intra hoſce limites continentur. Si ſingulæ hujuſmodi æquationes ſolitariæ ſumantur, & fiant maximæ, ſive $m = \frac{a}{2} = n$ in duabus primis, $m = n = 0$ in ceteris; erit

$$mn = BC.AC = AC.BC = AC.BC = BC.AC = (AC)^2 = (BC)^2 = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \left\{\frac{a}{2}\right\}^2:$$

quæ ſingulæ æquales ſunt inter ſe, ſi valorem ſpectes, non vero ſi naturam quantitatis conſideres: quatuor enim primæ ſunt rectangula maxima, quæ a diverſis & inæqualibus factoribus oriuntur, qui in hoc tantum limite maximo fiunt æquales, ſed ſemper diverſi: in duobus tamen ultimis m, & n ad habendum maximum æquales zero ſint oportet, dum in duobus primis æquales ſunt inter ſe, & fiunt maximi $= \frac{a}{2}$: quia m & n in primis originem ducunt a punctis diverſis A & B verſus centrum ſibi obviam occurrentes, & diverſæ ſunt: in duobus ſe-

ſecundis vero quælibet ab uno & eodem centro C conſtanti ortæ hinc inde ab hoc puncto procedunt, & ſingulæ debent eſſe zero, ut rectangula fiant maxima. Duæ vero ultimæ repræſentant quadrata æqualia ſed diverſa, ſive æqualis ſed diverſæ radicis; quæ omnia caute & in limite ſunt diſtinguenda. Rectangula enim diverſam ac quadrata originem & generationem habent, &, ut diximus, diverſo modo ad nihilum rediguntur, atque in caſibus intermediis diverſo modo fluere cenſenda ſunt. Quare licet hæc quatuor producta in extremo limite quantitate æqualia ſint, totumque Syſtema, ſive quadratum $(a)^2$ hoc artificio in quatuor æquales partes dividatur; tamen duæ ex iſtis naturam quadraticam, aliæ duæ rectanguli naturam referunt; atque ordine diſpoſitæ, & ſimul ſumptæ dant (*fig. ead.* 10.)

$$\begin{matrix} m^2+mn+n^2 = \frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}.\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4} = (AC)^2+AC.BC+(BC)^2 = \text{qu.}Cl+\text{rect.}CL+\text{qu.}CB' \\ +nm \qquad\qquad +\frac{a}{2}.\frac{a}{2} \qquad\qquad\qquad +BC.AC \qquad\qquad\qquad +\text{rect. } CA' \end{matrix}$$

vel $= \text{qu. } CA' + \text{rect. } CB' + \text{qu. } CL$: hoc eſt permutari poſſunt inter ſe,
$\qquad + \text{rect. } Cl$

& quæ erant quadrata ſumi poſſunt ut rectangula; & viceverſa: quæ tamen omnia ſi ad integrum quadratum redigantur, & fiat

$$\begin{matrix} m^2+mn+n^2 = \\ +nm \end{matrix} \begin{matrix} \frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}.\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4} \\ +\frac{a}{2}.\frac{a}{2} \end{matrix} = (a)^2; \text{ erit } m^2+2mn+n^2 = (\pm A'B')^2,$$

$$\text{vel} = (\pm B'L)^2 = (\pm Ll)^2 = (\pm LA')^2 = a^2;$$

hoc eſt iterum in unum, vel alterum latus integrum quadrati recidit integra m, vel n, in quo caſu altera variabilis fit zero, puncto C non amplius fixo, ſed decurrente per totam diagonalem lB, vel A'L, ac recidente in uno ex quatuor punctis A', vel L, vel B', vel l, fitque

$$\begin{matrix} m^2 + m(on) + (on)^2 = (om)^2 + (om)n + (n)^2 = a^2 = m^2 = n^2. \\ +(on)m \qquad\qquad\qquad\qquad +n(om) \end{matrix}$$

§. 47. In caſibus vero intermediis erit

$$\begin{matrix} m^2+mn+n^2 = \\ +nm \end{matrix} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - n^2 \begin{matrix} +\overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m} \\ \overline{\qquad\qquad}\;\overline{\qquad\qquad} \\ +\frac{a}{2}+n.\frac{a}{2}-n \end{matrix} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2, \text{ ſive}$$

$$\begin{matrix} m^2+mn+n^2 = \\ +nm \end{matrix} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - n^2 \begin{matrix} +\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - mm \\ +\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - nn \end{matrix} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2 \text{: in hac}$$

æqua-

æquatione ſi fiat $n^2 = m^2 = mm = nn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, æquatio dabit

$$m^2 + mn + n^2 + nm = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$$

, quæ quidem fit zero, ſive omnia in limite minimo tam quadrata, quam rectangula zero æqualia. Sed notandum æquationem ſuperiorem in ſuas partes diſtributam dare

$$(1.^{am})\ m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - n^2;\quad \begin{matrix}(2.^{am})\ mn = \frac{a}{2} + m.\frac{a}{2} - m \\ \hline (3.^{am})\ nm = \frac{a}{2} + n.\frac{a}{2} - n\end{matrix};\quad (4.^{am})\ n^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2:$$

quare in $(1.^a)$ m^2 non poteſt fieri zero, niſi fiat n^2 maxima $= \frac{a^2}{4}$; in $(2.^a)$ non poteſt m eſſe æqualis $\frac{a}{2}$, niſi n ſit zero, & $(3.^a)$ fiat $nm = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$; contra vero in $(3.^a)$ non poteſt n æqualis eſſe $\frac{a}{2}$, niſi fiat $m = 0$, & $(2^a.)$ ſit $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$; ac tandem in $(4.^a)$ non poteſt n^2 æqualis eſſe $0 \left(\frac{a}{2}\right)^2$, niſi fiat m^2 maximum $= \left(\frac{a}{2}\right)^2$: ergo in limite

$$m^2 + mn + n^2 + nm = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - 0 \quad + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2} \quad + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - 0 \quad + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= (AC)^2 - (AC)^2 + AB.B + (BC)^2 - (BC)^2 = 0 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

$$(BC)^2 \quad + BC.AC + BA.A + AC.BC \quad + (AC)^2 \quad + \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$$

hoc

hoc eſt non poteſt dari minimum, niſi maximum neceſſario reperiatur: quæ veritas aliena prorſus a communi opinione quantum conferat in tota Analyſi, pro re nata oſtendemus: nunc ſatis ſit confirmare veritatem æquationum tam in hoc Capite, quam in ſuperiori deſcriptarum; ſcilicet in Syſtemate baſis datæ eſſe

$$mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}\,.\,m = \overline{\frac{a}{2} + m}\,.\,\overline{\frac{a}{2} - m} = \overline{\frac{a}{2} + n}\,.\,\overline{\frac{a}{2} - n}$$

$$= n^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - n^2 = m^2,$$

in qua ſi ponatur $n = 0$, habetur $m = \frac{a}{2}$, & æquatio

$$mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}\,.\,0 = \frac{a}{2}\,.\,\frac{a}{2} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}\,.\,\overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{a}{2}\,.\,\frac{a}{2} = (n)^2$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = m^2:$$

contra ſi ponatur $m = 0$, eſt $n = \frac{a}{2}$, &

$$mn = \frac{a}{2}\,.\,\frac{a}{2} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}\,.\,0 = \frac{a}{2}\,.\,\frac{a}{2} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}\,.\,\overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}}$$

$$= (n)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - (0)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = m^2;$$

quæ ut ab ea repugnantiæ ſpecie liberentur, quam communibus notionibus imbutis præſeferre videntur, præter ea quæ diximus in Capite I. hujuſce Libri §§. 32., & ſeqq., ſatis erit ad modo dicta diligenter animum attendere.

§. 48. Nam quoniam ex citato Capite non datur maximum ſine minimo, nec minimum ſine maximo; ac demonſtravimus §§. iiſdem rectangulo minimo reſpondere quadratum maximum, & viceverſa, dummodo hæc communi vinculo conſociata concipiantur, ſumantur ex æquatione ſuperiori $m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - n^2$, $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n$; atque hæc ſimul addantur; erit $m^2 + mn = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - n^2 + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n$; quæ æquatio componitur ex quadrato & ex rectangulo: in hac facta $n = 0$ minima, erit $m = \frac{a}{2}$ maxima, eritque rectangulum $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - 0}\,.\,0 = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}\,.\,0$ minimum, & $m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ maxi-

maximum quadratum: at viceverſa, facta n maxima $= \frac{a}{2}$, & m minima $= o$, erit rectangulum maximum $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, & $m^2 = (o)^2$ quadratum minimum. Addantur ſimul hæc maxima & minima; & æquatio erit

$$\left\{\begin{matrix} m^2 + m\,o\,n \\ (o)^2 + mn \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - o.o} \\ (o)^2 + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}} \end{matrix}$$

, quæ dat quadratum maximum, & rectangulum maximum $m^2 + mn = \left(\frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, ſive æquale dimidio quadrato (*fig.* 10.) $\frac{a^2}{2} = $ I B vel A B′, vel I C′ vel N B′. Hæc tamen æquatio ſic ordinari poteſt

$$m^2 + mn + o\,m\,n + (o)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - o}.o + (o)^2,$$

ſive $= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - o} + o.o$. Verum oſtendimus, & facile unuſquiſque videt, quando primus terminus $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ vicem gerit quadrati, non poſſe variari quadratum, quin radix ipſa mutetur; at in rectangulis ſuperioris formæ non niſi maxima negativa $\frac{a}{2}$ decreſcendo, & minima $-$ o creſcendo cum altero ſolitario factore $\frac{a}{2}$, vel o mutari: ergo in noſtra æquatione ſi ab hiſce maximis ac minimis tranſitus fiat ad media, erit

$$m^2 + mn + nm + n^2 = m + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} + n.n$$

$$= m^2 + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n + n^2;$$

& cum ſit $\overline{\frac{a}{2} - m} = n$, facta hac ſubſtitutione, erit

$$m^2 + 2mn + n^2 = m^2 + \overline{\frac{a}{2} + n}.\overline{\frac{a}{2} - n} + \overline{\frac{a}{2} + m}.\overline{\frac{a}{2} - m} + n^2$$

$$= m^2 + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - n^2 + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - mm + n^2:$$

ſed

ſed facto $n^2 = (0)^2$, eſt $m^2 = \left\{\frac{a}{2}\right\}^2$ quadrato maximo; & facto $(m)^2 = (0)^2$, $n^2 = \left\{\frac{a}{2}\right\}^2$: ergo factis maximis tam quadratis, quam rectangulis, erit $m^2 + 2mn + n^2 = \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 = \frac{4a^2}{4} = a^2$. In caſibus intermediis facta $m = n$, erit $m^2 + 2mn + n^2 =$ rectangulo gGG'g' (*fig. ead.* 10.): nam $m^2 =$ gd; $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m = \overline{\frac{a}{2} + n}.\overline{\frac{a}{2} - n}$ = BH: $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n = \overline{\frac{a}{2} + m}.\overline{\frac{a}{2} - m}$ = Bh; & $n^2 =$ g'd: & in maximo limite = quadr. Cl + rectang. CL + rect. CA' + qu. CB'; vel = quadr. CL + rectang. Cl + rectang. CB' + quadr. CA'. At facta $\frac{4a^2}{4} = a^2$, erit $(m+n)^2 = (A'B')^2$, vel $= (B'A')^2$, vel = quadrato aliorum laterum: &, poſita $m = 0$, $n^2 = (B'A')^2$: at, facta $n = 0$, $m^2 = (A'B')^2$: ac denuo $+a.+a = -a.-a$; vel $-a.-a = +a.+a$. Atque hîc iterum in conſecutionem illam novam, & prorſus admirabilem incidimus, qua docemur in æquationibus etiam ſecundæ dimenſionis, ut accidere vidimus in æquationibus linearibus, ab addita aut non addita terminis æquationum ciphra zero pendere diverſitatem valoris naturæ æquationum, & quantitatum, quæ in unaquaque æquatione continentur. Sed de hoc plura in *Parte* II.ª, cum *de legitima Syſtematum conjunctione* agemus.

§. 49. Hæc omnia, quæ modo eruimus nova quidem, & apprime neceſſaria, utpote prima Analyſeos fundamenta, conſequuntur ab una diviſione baſis linearis a bifariam facta Syſtematis linearis integri baſis datæ $m + n = a$: nunc leviter attingam quid accidat eidem æquationi $mn = \overline{a - n}.n = \overline{a - m}.m$ = (*Tab.* VI. *fig.* 11.) $\overline{AB - BD}.BD = \overline{BA - AD}.AD$, poſita baſi integra $a = AB = BA$. In hac facta $BD = 0 = n$ minima, eſt $AD = a = m = AB$ maxima; & poſita $AD = 0 = m$ minima, eſt $BD = BA = a = n$ maxima: & conſequenter in primo caſu
$mn = a.0 = AB.B = \overline{a - a}.a = \overline{BA - AB}.AB = B.AB$: in ſecundo
$mn = \overline{a - a}.a = \overline{AB - BA}.BA = A.BA = a.0 = BA.A$: quæ ſingula ſunt rectangula minima. Ut inveniamus vero rectangula maxima, quæ neceſſario invenienda eſſe oſtendimus, ut limites intra quos æquatio continetur habeantur, duplici methodo uti poſſumus: prima, quam ſuperius adhibuimus, in eo ſita eſt ut dividatur bifariam $AB = a$ in C; qua methodo ſupponimus inte-

 grum

grum ac totale Syſtema baſis datæ eſſe $m + n = a =$ A B , poſita A B ſolitaria prima , & integra tam ab una , quam ab altera parte ; proindeque maximum ad quod aſſurgere poteſt quadratum eſſe $(m+n)^2 = a^2$: totumque negotium intra hoc quadratum peragi eo modo , quo ſuperius oſtendimus . Sed quoniam in æquatione rectangulum minimum eſt

$$mn = \overline{a-a}.a = \overline{AB-B}A.BA = A.BA = aa-aa = \overline{a+a}.\overline{a-a} = \overline{AB+BA'}.A'$$

$$mn = \overline{a-a}.a = \overline{BA-AB}.AB = B.AB = aa-aa = \overline{a+a}.\overline{a-a} = \overline{BA+AB'}.B'$$

rectangulum minimum in hoc ſecundo caſu pertinebit ad Syſtema lineare baſis datæ $m + n =$ A A′, vel = B B′, in quo m minimæ reſpondet A A′ maxima , & viceverſa ; proindeque maximum rectangulum A B . A′B $= a.a$. Quare ex dictis erit rectangulum medium $mn = \overline{a+a-n}.n = \overline{a+a-m}.m$; & facta $a - n = m$, in qua æquatione n maxima $= a$, m minima $= 0$, erit $mn = \overline{a+a-a}.a = \overline{a+a-0}.0 = a.a =$ B l maximum , minimum = A A′ . A′ &c, ut oſtendimus ſuperius . Quamobrem in hoc caſu quadratum $(m+n)^2 = a^2$ non eſt amplius Syſtema integrum ſecundæ dimenſionis , ſed eſt partiale Syſtema ortum a diviſione in quatuor æquales partes Syſtematis

$$(m+n)^2 = a^2 \begin{matrix} +a.a \\ +a.a \end{matrix} + a^2 = \text{qu. Bl} \begin{matrix} +\text{rect. BL} \\ +\text{rect. Bl}' \end{matrix} + \text{qu. BL}' \text{ vel}$$

$$= \text{qu. BL} \begin{matrix} +\text{rect. Bl} \\ +\text{rect. BL}' \end{matrix} + \text{qu. Bl}'$$

, quod proinde ſumptum ſolitarium vicem gerit Syſtematis partialis a toto quadrato ($4a^2$) revulſum . Huic ſi addatur zero, ut ſit $mn + 0 = a.a + \overline{a+a-0}.0$, hac zero additione oſtenditur in eadem æquatione rectangulum maximum cum minimo conſociari, cum rectangulum $2a.0 =$ A A′ . 0 doceat revera exiſtere baſim , ſive lineam A A′ primæ duplam ductam in altitudinem zero , ac proinde A B non eſſe ſolitariam & unam, ſed eſſe dimidiam totius baſis A A′, quæ ducta per centrum B parallela baſi quadrati integri , totum quadratum $4a^2$ in duas æquales partes dividit . Sed hæc hactenus: de quibus fuſius in Parte II.ª

CAPUT III.

Alia methodo quæ ſuperius de limitibus rectilineis demonſtravimus confirmantur.

§. 1. SAtis pro re, de qua agimus, a §. 40. uſque ad finem Capitis ſuperioris novis artificiis explorata natura limitum rectilineorum æquationis Syſtematis baſis datæ tam in limite minimo, quam in maximo variabilium linearium, earumque quadratorum, ac rectangulorum, quæ ex earum producto oriuntur ad conſtituendum Syſtema quadraticum & rectangulum Syſtematis baſis datæ; nunc rurſus, præter ea quæ diximus Cap. II. hujus Libri, ad explorandos limites rectilineos Syſtematis baſis variabilis accedamus: in quibus excutiendis licet veſtigiis Syſtematis baſis datæ inſiſtendo analogæ conſecutiones invenirentur; tamen ut veritates novæ eruantur, aliam intereſt inire viam. Cum æquatio linearis Syſtematis baſis variabilis ſit (*Tab.* V. *fig.* 5.) $m = \mathrm{AD} = a + n$, & $n = \mathrm{BD} = -a + m$; erit quadratum

$$m^2 = (a+n)^2 = a^2 + 2an + n^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + 2\,\mathrm{AB}.\mathrm{BD} + \overline{\mathrm{BD}}^2 : \text{ \& quadratum}$$

$$n^2 = (m-a)^2 = m^2 - 2.\overline{m-a}.a - (a)^2 = (\mathrm{AD})^2 - 2.\overline{\mathrm{AD}-\mathrm{AB}}.\mathrm{AB} - (\mathrm{AB})^2 :$$

(inferius §. 15, & ſeqq. oſtendam, cur, cum $m^2 - 2.\overline{m-a}.a - (a)^2$ videatur eſſe idem ac $m^2 - 2ma + a^2$, primam potius formam tribuerim quadrato $(n)^2$ quam alteram, quæ una a communi methodo ſemper uſurpatur). In hoc Syſtemate novimus vel ſimul conſociari valores duos minimos, vel ſimul conſociari maximos; contrario prorſus modo, quo res ſe habet in Syſtemate baſis datæ. Poſita itaque $n = 0 = \mathrm{B}$ minima, erit $m = a = \mathrm{AB}$ minima: rectangula vero $mn = a.0 = \overline{\mathrm{AB} + \mathrm{B}}.\mathrm{B} = \mathrm{AB}.\mathrm{B} = \overline{-a+a}.a = \overline{\mathrm{AB}-\mathrm{AB}}.\mathrm{AB} = 0.\mathrm{AB}$ minima: &

$$(1)\ (m)^2 = a^2 + 2a.0n + (0n)^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + 2\,\mathrm{AB}.\mathrm{B} + \mathrm{B}^2 = a^2 \text{ quadratum minimum;}$$

$$(2)\ n^2 = (a')^2 - 2.\overline{(a')-a}.a - (a)^2 = \overline{(\mathrm{AB})'}^2 - 2.\overline{(\mathrm{AB})'-\mathrm{AB}}.\mathrm{AB} - (\mathrm{AB})^2 = (0)^2$$

quadratum minimum: (lineolam ſuffigo quantitatibus illis, quæ natura ſua variabiles, factæ maximæ vel minimæ æquales fiunt alicui datæ, ut ab hiſce datis diſtinguam illas, quæ ſemper conſtantes in æquatione perſeverant).

§. 2. Ex dictis §. 41. *Cap.* ſuperioris hujuſmodi æquationes limitis in ſequentes æquationes diſpertiri poſſunt (*fig. ead.* 5.)

$(3)\ m^2 = a^2 + (o)^2 = \overline{AB}^2 + B^2 :\ (5)\ 2a.on = 2AB.B$

$(4)\ n^2 = (a')^2 - a^2 = \overline{(AB)'}^2 - \overline{AB}^2 :\ (6)\ 2.\overline{a'-a}.a = 2.\overline{(AB)'-AB}.AB.$

Ita diviſis ac diſtributis æquationibus, ſi ab earum limite minimo ad medium valorem ſine mutatione Syſtematis tranſitum facere velis, eas tantum datas tamquam variabiles in limite minimo accipias oportet, quæ lineola ſignantur; ideoque in caſibus intermediis fluxu poſitivo creſcentes, fieri variabiles concipias neceſſe eſt. In noſtro igitur caſu valores medii erunt in

$(3.^a)\ m^2 = a^2 + n^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$; in $(4.^a)\ n^2 = m^2 - a^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2$: in $(3.^a)$ enim primum quadratum conſtans eſt, ſecundum vero $= (o)^2$ minimum augetur a zero uſque ad infinitum: at in $(4.^a)$ primum quadratum $(a)^2$ repræſentat valorem minimum quadrati variabilis m factæ minimæ $= a$, quæ ſupra a indefinite creſcendo quadratum conſtituit indefinite majus ipſo $(a)^2$: at in hac ſecundum quadratum negativum conſtans eſt: $(5.^a)$ dat in caſibus mediis $2a.n = 2AB.BD$, AB ſemper immutabili ac data: $(6.^a)\ 2.\overline{m-a}.a = 2.\overline{AD-AB}.AB$, fluente tantum, ac creſcente prima $(AB)'$. Quare $(3.^a)\ m^2 = a^2 + n^2$, & $(4.^a)\ n^2 = m^2 - a^2$ ita inter ſe ſunt comparatæ, ut n^2 nequeat eſſe minus quadrato $(o)^2$; at quadratum $(m)^2$ nequeat eſſe minus quadrato a^2: creſcere tamen poteſt utrumque uſque ad infinitum, ea quidem lege, ut horum quadratorum differentia ſemper ſit æqualis quadrato dato $(a)^2$, quemadmodum differentia linearium variabilium æqualis eſt datæ a, ſive radici quadrati: contrario prorſus modo, quo procedit Syſtema lineare, & quadraticum baſis datæ, in quo vidimus ſummam variabilium æqualem eſſe a, ſummamque quadratorum æqualem a^2. Itaque quemadmodum in ſuperiori Capite appellavi *Syſtema quadraticum baſis datæ* illud, in quo ſumma quadratorum variabilium æqualis eſt dato quadrato a^2; ita in hoc illud Syſtema, in quo differentia quadratorum æqualis eſt quadrato dato a^2, *Syſtema quadraticum baſis variabilis* nuncupabo.

§. 3. Æquatione vero limitis $(5.^a)\ a.on = AB.B$ (*fig. ead.* 5.) facta media, invenimus $an = AB.n$; & $(6.^a)$ limitis $\overline{a'-a}.a = \overline{(AB)'-AB}.AB$ dat $\overline{m-a}.a = \overline{m-AB}.AB = \overline{AD-AB}.AB$. Si hæ limitis æquationes, quæ oriuntur a rectangulis ſuperiorum quadratorum conferantur cum æquationibus limitis ſuperioris rectanguli ſolitarii $mn = \overline{a+n}.n = \overline{-a+m}.m = \overline{m-a}.m$, quæ ſunt $mn = m.on = \overline{a+o}.o = AB.B$; $mn = \overline{a'-a}.a'$: patebit primam $mn = AB.B$ æqualem eſſe æquationi limitis $an = a.on = AB.B$; ſecundam $mn = \overline{a'-a}.a'$ æqualem eſſe $(6.^a)\ \overline{m'-a}.a = \overline{(AB)'-AB}.AB$, facta $m = a$ minima. Ergo tam rectangula prima, quam ſecunda in hoc limite prorſus æqualia ſunt, licet in caſibus intermediis numquam invenies æquationem mediam utriſque communem. Nam æquationes li-

limitis, & mediæ tam rectanguli mn, quam aliorum rectangulorum erunt ſequentes

$(1.^a)\ mn = \overline{a+o}.o = \overline{AB+B}.B$; media $(2.^a)\ mn = \overline{a+n}.n = \overline{AB+BD}.BD$;

$(3.^a)\ mn = \overline{a'-a}.a' = \overline{(AB)'-AB}.(AB)'$; media $(4.^a)\ mn = \overline{m-a}.m = BD.AD$;

$(5.^a)\ an = a.on = AB.B$; media $(6.^a)\ an = AB.BD$;

$(7.^a)\ \overline{a'-a}.a = \overline{(AB)'-AB}.AB$; media $(8.^a)\ \overline{m-a}.a = \overline{AD-AB}.AB$.

Æquatio $(1.^a)$ limitis æqualis eſt $(5.^a)$, & in utraque $AB = a$ eſt conſtans; in hoc autem $1.^a$ differt a $(5.^a)$, quod in $(1.^a)$ eſt $a+o$, quæ æqualis eſt minimo valori $m = a+n = AB+BD$; at in $(5.^a)$ a eſt ſemper conſtans æqualis AB; & in utraque $o = oBD = on$, & $n = BD$. $(3.^a)$ in limite $= \overline{a'-a}.a' = \overline{(AB)'-AB}.(AB)'$ æqualis eſt $(7.^a)$ limitis $= \overline{a'-a}.a = \overline{(AB)'-AB}.AB$: ſed in hoc differunt, quod in $(3.^a)$ duæ a' repræſentant variabilem m minimam; in $(7.^a)$ vero una tantum, & prima a' repræſentat m. Omnes igitur hujuſmodi æquationes per zero diviſæ invicem æquales ſunt: ſingulæ enim ſunt æquales $AB = a$: ſed in $(1.^a)$ $AB+o = a+o$, in $(3.^a)$ $(AB)' = a'$; in $(5.^a)$ $AB = a$; in $(7.^a)$ $AB = a$: ergo in $(1.^a)$ fluit zero, in $(3.^a)$ fluit ipſa $(AB)'$; in $(5.^a)$ & $(7.^a)$ ſemper $AB = a$ conſtans perſeverat.

§. 4. Sed antequam progrediamur, atque æquationes ſecundæ dimenſionis utriuſque Syſtematis inter ſe comparemus, multum refert in re difficili ac nova æquationes utriuſque Syſtematis univerſim ac ſeorſim determinare. Ut vero hoc tuto, & eleganter fiat, utamur neceſſe eſt artificio illo, quod, maximo Analyſeos malo ignotum hactenus, §. 1. primum adhibuimus, cujus utilitas ac neceſſitas ex dicendis aperte cognoſcetur. Cum itaque invenerimus §. 40. *Cap. ſup.* in æquatione $\overline{m+n}^2 = m^2 + 2mn + n^2 =$ (*fig.* 3.) $\overline{AD}^2 + 2AD.BD + \overline{BD}^2$, facta $n = o$ minima, ut ſit $m = a$ maxima, eſſe

$(1.^{am})\ m^2 = m^2 + 2m(on) + (on)^2 = \overline{(AB)'}^2 + 2(AB)'.B + B^2 = (a')^2 + 2a'B + (B)^2$:

& viceverſa facta $m = o$,

$(2.^{am})\ n^2 = n^2 + 2n(om) + (om)^2 = \overline{(BA)'}^2 + 2(BA)'.A + A^2 = (a')^2 + 2a'A + (A)^2$:

patet in ſingulis hiſce contineri maximos, & minimos valores quadratorum variabilium, ac tantum rectangula minima, ſive zero facta. Diviſa igitur in duas utraque æquatione, habentur æquationes

$(3.^a)\ m^2 = \overline{(AB)'}^2 + B^2 = (a')^2 + (o)^2$

$(4.^a)\ n^2 = \overline{(BA)'}^2 + A^2 = (a') + (o)^2$

; rectangulis ab utraque parte factis nullis, de quibus infra. In harum tam $(3.^a)$, quam $(4.^a)$ continentur ambo variabilium quadrata, quorum unum maximum, alterum minimum alternis vicibus reperitur: in hoc enim Syſtemate dato maximo ſemper minimum reſpondeat neceſ-

ceſſe eſt. Item quoniam $\begin{matrix} m = a - n, \\ m = AB - BD, \end{matrix}$ & $\begin{matrix} n = a - m \\ n = BA - AD \end{matrix}$; erunt adhibita methodo §. I.

$$(5.^a)\; m^2 = \overline{a-n}^2 = a^2 - 2.\overline{a-n}.n - n^2 = \overline{AB}^2 - 2.\overline{AB - BD}.BD - \overline{BD}^2$$

$$(6.^a)\; n^2 = \overline{a-m}^2 = a^2 - 2.\overline{a-m}.m - m^2 = \overline{BA}^2 - 2.\overline{BA - AD}.AD - \overline{AD}^2:$$

in $(5.^a)$ facta n maxima $= a$, & in $(6.^a)$ m maxima $= a$, ſe offerunt æquationes

$$(7.^a)\; m^2 = a^2 - 2.\overline{a - a'}.a' - (a')^2 = \overline{AB}^2 - 2.\overline{AB - (BA)'}.(BA)' - \overline{(BA)'}^2;$$

$$(8.^a)\; n^2 = a^2 - 2.\overline{a - a'}.a' - (a')^2 = \overline{BA}^2 - 2.\overline{BA - (AB)'}.(AB)' - \overline{(AB)'}^2:$$

& omiſſis nunc rectangulis zero factis, habentur

$$(9.^a)\; m^2 = a^2 - (a')^2 = \overline{AB}^2 - \overline{(BA)'}^2$$

$$(10.^a)\; n^2 = a^2 - (a')^2 = \overline{BA}^2 - \overline{(AB)'}^2$$

; ac tandem factis in $(9.^a)$ n minima, in $(10.^a)$ m minima $= 0$, oriuntur

$$(11.^a)\; m^2 = a^2 - (0)^2 = \overline{AB}^2 - B^2$$

$$(12.^a)\; n^2 = a^2 - (0)^2 = \overline{BA}^2 - A^2.$$

§. 5. Si hujuſmodi æquationes diligentius excutiantur, patebit in $(3.^a)$ & $(4.^a)$ primum terminum ſecundi membri vicem gerere, fluentis quadrati facti maximi, cui reſpondet ſecundus terminus variabilis quadrati, ſed facti minimi: ac proinde in caſibus mediis utraque eſſe variabilia, eſſeque revera $\begin{matrix} m^2 = m^2 + n^2 \\ n^2 = n^2 + m^2 \end{matrix}$ $= \begin{matrix} \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \\ \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \end{matrix}$ quadrata indeterminata nulla conſtanti quantitate, vel dato limite definita: quæ nihil aliud ſignificant (ſi m^2, vel n^2 ſolitarium quadratum ſumatur), niſi quadratum diagonalis cujuſcumque æquale eſſe duobus quadratis oppoſitis, proindeque A D, B D angulum rectum conſtituere. In hoc tamen Capite cum ſermo erit de hujuſmodi æquationibus quadraticis ſolitariis, earum quadrata, quæ ſimul ſumpta ad diagonalem referuntur, iiſdem lineis in directum poſitis deſignabo, quas exhibent *figuræ* $3.^a$, & $5.^a$; ne Schematum multitudine, aut confuſione implicemur: hîc enim tantum indicantur quæ Capitibus ſequentibus erunt conſtruenda. Cum vero in propoſito Syſtemate ſummam quadratorum ſumpſerimus datam, data erit & diagonalis pertinens ad Syſtema baſis datæ. At $(9.^a)$ & $(10.^a)$ dant differentiam quadratorum ea lege, ut quadrata negativa in ſecundo membro habeant radicem variabilem in hoc uno caſu factam maximam, cui reſpondet in primo membro m^2, vel n^2 minimum, ſive zero; (in $(11.^a)$ & in $(12.^a)$ omnia contrario prorſus modo): ac proinde in iſtis m^2, vel n^2 in primo membro non am-

amplius diagonalem, ſed latus quadrati repræſentat, licet eodem ſymbolo notetur; ac tam (3.ª) & (4.ª), quam (5.ª) & (6.ª) diverſam poſitionem, nec non diverſum ſitum tam variabilium, quam diagonalium, earumque quadratorum ſignificant, quin ulla in ſignis fiat mutatio: quo magis magiſque evincitur quicquid de ſignis in *Lib.* I. monuimus.

§. *6.* Igitur ſimul additæ hujuſmodi æquationes limitis erunt (*fig.* 3.) $m^2 = (a')^2 + (o)^2 = \overline{(AB)'}^2 + B^2 = \overline{(BA)'}^2 + A^2 = a^2 - (o)^2 = \overline{AB}^2 - B^2 = \overline{BA}^2 - A^2 = \overline{AB}^2 - \overline{(BA)'}^2 = A^2 = \overline{BA}^2 - \overline{(AB)'}^2 = B^2$; quia, facta una zero, altera fiat maxima neceſſe eſt: ergo non poteſt inveniri, nec haberi maximum, quin minimum, ſive zero habeatur. Porro ſi ab hiſce limitum æquationibus ad æquationes medias tranſitus fiat, ſervatis cujuſcumque æquationis conditionibus, erit

$$m^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{AD}^2$$
$$= m^2 + n^2 = n^2 + m^2 = m^2 - n^2 = n^2 - m^2;$$

quibus docemur tantum abeſſe ut ſigno hoc $=$ male nuncupato *ſignum æqualitatis* ſemper identitas ſignificetur; quin imo plerumque neque æqualitas inter utraque membra æquationis intercedit, ſed tantum eo ſigno indicatur illa, quam ſæpius inculcavi, membri unius in alterum *transformatio*. Et ſane nonne $m^2 = a^2$ etiam $m^2 = a^2 + (o)^2 = a^2 - (o)^2$ æquatur? at in primo caſu, ut vidimus, $m^2 = \overline{AB}^2 = \overline{BA}^2 = n^2$; in ſecundo $m^2 = (a')^2 + (o)^2$, vel $m^2 = a^2 - (o)^2$: ergo hoc idem m^2 poteſt eſſe ſemper quadratum datum in quacumque tamen poſitione, vel poteſt eſſe in caſibus mediis variabile, & æquale duobus quadratis laterum trianguli rectanguli ſive quadratum diagonalis, vel tandem poteſt eſſe æquale differentiæ quadratorum, ſive idem eſſe ac quadratum unius, vel alterius lateris: ut omittam hîc alias combinationes, quas ex rectangulis erui poſſe ſuperius innuimus.

§. 7. Illud etiam notandum, æquationem (3.ᵐ) & (4.ᵐ) limitis eſſe $\begin{matrix} m^2 = (a')^2 + (o)^2 \\ n^2 = (a')^2 + (o)^2 \end{matrix}$: (11.ᵐ) vero, ac (12.ᵐ) $\begin{matrix} m^2 = a^2 - (o)^2 \\ n^2 = a^2 - (o)^2 \end{matrix}$: ſed in primis a^2, & o^2 quadrata habent radices fluentes, ita ut decreſcente maxima a creſcat altera zero: at in ſecundis a^2 eſt quadratum baſis conſtantis & datæ, ac tantum o fluere poteſt verſus maximam. Verum ſi ponas in primis a^2 conſtantem, & o^2 fluentem; & in ſecundis a^2 & $-(o)^2$ ambo fluentia, primæ dabunt in caſibus mediis $\begin{matrix} m^2 = a^2 + n^2 = \overline{AB}^2 + n^2 \\ n^2 = a^2 + m^2 = \overline{BA}^2 + m^2 \end{matrix}$: ſecundæ $\begin{matrix} m^2 = m^2 - n^2 \\ n^2 = n^2 - m^2 \end{matrix}$: at hac facta poſitione a Syſtemate quadratico baſis datæ ad Syſtema baſis variabilis quadraticum transferimur. Nam quemadmodum in Syſtemate quadratico baſis datæ ſumma quadratorum eſt data $= a^2$; differentia vero variabilis: ita, facta hac mutatione, æquationes primæ mutantur in $\begin{matrix} m^2 - n^2 = a^2 = \overline{AB}^2 \\ n^2 - m^2 = a^2 = \overline{BA}^2 \end{matrix}$; & ſecun-

dæ

dæ in $\begin{matrix} m^2 + n^2 = m^2 \\ n^2 + m^2 = n^2 \end{matrix}$: ſive differentia, quæ erat variabilis fit data, & contra ſumma, quæ erat data fit variabilis; ideoque a Syſtemate quadratico baſis datæ ad Syſtema quadraticum baſis variabilis hac ſuppoſitione delati fuimus. Ut igitur ſemper in eodem Syſtemate quadratico baſis datæ contineamur, neceſſe eſt ut quadrato, quod datum volumus, ſemper ſubintelligatur additum quadratum $-(o)^2$ negativum; & contra quadratum $+(o)^2$ poſitivum quadrato variabili: vel fiat tranſmutatio variabilis in datam, & viceverſa, uti docuimus in *Lib.* I. Itaque ſi in primis fiat tranſpoſitio quadrati $(o)^2$ ad alteram æquationis partem, mutato ſigno ut methodus communis docet; erit $\begin{matrix} m^2 - (o)^2 = a^2 \\ n^2 - (o)^2 = a^2 \end{matrix}$: at hac communi methodo ab uno ad alterum Syſtema tranſitus fit. Quare, ut in eodem Syſtemate perſiſtamus, fiat oportet vel $-(o)^2 = (o^2)$, vel $m^2 = a^2$, ut æquationes limitis ſint $\begin{matrix} m^2 + (o)^2 = a^2 \\ n^2 + (o)^2 = a^2 \end{matrix}$ & mediæ $\begin{matrix} m^2 + n^2 = a^2 \\ n^2 + m^2 = a^2 \end{matrix}$; vel $\begin{matrix} a^2 - (o)^2 = m^2 \\ a^2 - (o)^2 = n^2 \end{matrix}$, ac denuo $\begin{matrix} a^2 = n^2 + m^2 \\ a^2 = m^2 + n^2 \end{matrix}$: aliter inſcii ab uno ad aliud Syſtema, facta mutatione ſignorum in terminis hinc inde a ſigno æqualitatis transferendis, deducimur. Quamobrem & hîc magis magiſque confirmatur doctrina circa ſigna quantitatibus præfigenda, quam & in *Lib.* I., & in Capite antecedenti ſtatuimus.

§. 8. Nunc ut facilius conferantur inter ſe æquationes tam quadraticæ, quam rectangulæ Syſtematis baſis datæ cum æquationibus tam quadraticis, quam rectangulis Syſtematis baſis variabilis; opportunum exiſtimo iſtas æquationes utriuſque Syſtematis hac methodo inventas ſimul omnes in annexa *Tabula* ordine deſcribere, & in ſuas claſſes diſtribuere.

§. 9.

TABULA

Æquationes integræ Syſtematis baſis datæ (fig. 3.)	*Quadraticæ*	*Rectangulæ*
(1.) $\overline{m+n}^2 = m^2 + 2mn + n^2 = \overline{AD}^2 + 2AD.BD + \overline{BD}^2 = a^2 = \overline{AB}^2$; limitis poſita $n = o$	(1.) $m^2 + n^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$;	(1.) $2mn = 2AD.BD$:
(2.) $\overline{m+o}^2 = m^2 + 2mo + (o)^2 = \overline{(AB)'}^2 + 2(AB)'.B + B^2 = a^2 = \overline{AB}^2$;	(2.) $m^2 + (o)^2 = (a')^2 = \overline{(AB)'}^2 + B^2$;	(2.) $2mo = 2(AB)'.B$:
(3.) $\overline{n+m}^2 = n^2 + 2nm + m^2 = \overline{BD}^2 + 2BD.AD + \overline{AD}^2 = a^2 = \overline{BA}^2$; limitis poſita $m = o$	(3.) $n^2 + m^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$;	(3.) $2nm = 2BD.AD$
(4.) $n^2 = n^2 + 2no + (o)^2 = \overline{(BA)'}^2 + 2(BA)'.A + A^2 = a^2 = \overline{BA}^2$;	(4.) $n^2 + (o)^2 = (a')^2 = \overline{(BA)'}^2 + A^2$;	(4.) $2no = 2(BA)'.A$
(5.) $m^2 = \overline{a-n}^2 = a^2 - 2.\overline{a-n}.n - (n)^2 = \overline{AB}^2 - 2.\overline{AB-BD}.BD - \overline{BD}^2$; limitis poſita $n = o$	(5.) $m^2 = a^2 - n^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$;	(5.) $-2.\overline{a-n}.n = -2.\overline{AB-BD}.BD$:
(6.) $m^2 = a^2 = a^2 - 2.a.o - (o)^2 = \overline{AB}^2 - 2.\overline{AB-B}.B - B^2$; limitis poſita $n = a$	(6.) $m^2 = a^2 - (o)^2 = \overline{AB}^2 - B^2$;	(6.) $-2a.o = -2.\overline{AB-B}.B$
(7.) $m^2 = a^2 - 2.\overline{a-a'}.a' - (a')^2 = \overline{AB}^2 - 2.\overline{AB-(BA)'}.(BA)' - \overline{BA}^2$;	(7.) $m^2 = a^2 - (a')^2 = \overline{AB}^2 - \overline{(BA)'}^2$;	(7.) $-2.\overline{a-a'}.a' = -2.\overline{AB-(BA)'}.(BA)'$:
(8.) $n^2 = \overline{a-m}^2 = a^2 - 2.\overline{a-m}.m - m^2 = \overline{BA}^2 - 2.\overline{BA-AD}.AD - \overline{AD}^2$; limitis poſita $m = o$	(8.) $n^2 = a^2 - m^2 = \overline{BA}^2 - \overline{AD}^2$;	(8.) $-2.\overline{a-m}.m = -2.\overline{BA-AD}.AD$:
(9.) $n^2 = a^2 = a^2 - 2.\overline{a-o}.o - (o)^2 = \overline{BA}^2 - 2.\overline{BA-A}.A - A^2$; limitis poſita $m = a$	(9.) $n^2 = a^2 - (o)^2 = \overline{BA}^2 - A^2$;	(9.) $-2.\overline{a-o}.o = -2.\overline{BA-A}.A$:
(10.) $n^2 = \overline{a-a'}^2 = a^2 - 2.\overline{a-a'}.a' - (a')^2 = \overline{BA}^2 - 2.\overline{BA-(AB)'}.(AB)' - \overline{(AB)'}^2$;	(10.) $n^2 = a^2 - (a')^2 = \overline{BA}^2 - \overline{(AB)'}^2$;	(10.) $-2.\overline{a-a'}.a' = -2.\overline{BA-(AB)'}.(AB)'$:

Æquationes integræ Syſtematis baſis variabilis (fig. 5.)	*Quadraticæ.*	*Rectangulæ*
(I.) $m^2 = \overline{a+n}^2 = a^2 + 2an + n^2 = \overline{AB}^2 + 2AB.BD + \overline{BD}^2$; limitis minimi $n = o$	(I.) $m^2 = a^2 + n^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$;	(I.) $2an = 2AB.BD$
(II.) $m^2 = a^2 = a^2 + 2ao + (o)^2 = \overline{AB}^2 + 2AB.B + B^2$;	(II.) $m^2 = a^2 + (o)^2 = \overline{AB}^2 + B^2$;	(II.) $2ao = 2AB.B$
(III.) $n^2 = \overline{m-a}^2 = m^2 - 2.\overline{m-a}.a - a^2 = \overline{AD}^2 - 2.\overline{AD-AB}.AB - \overline{AB}^2$; limitis minimi $m = a$	(III.) $n^2 = m^2 - a^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2$;	(III.) $-2.\overline{m-a}.a = 2.\overline{AD-AB}.AB$:
(IV.) $n^2 = \overline{a'-a}^2 = (a')^2 - 2.\overline{a'-a}.a - a^2 = \overline{(AB)'}^2 - 2.\overline{(AB)'-AB}.AB - \overline{AB}^2$;	(IV.) $n^2 = (a')^2 - a^2 = \overline{(AB)'}^2 - \overline{AB}^2$;	(IV.) $-2.\overline{a'-a}.a = -2.\overline{(AB)'-AB}.AB$:
(V.) $\overline{m-n}^2 = a^2 = m^2 - 2.\overline{m-n}.n - n^2 = \overline{AD}^2 - 2.\overline{AD-BD}.BD - \overline{BD}^2$; limitis minimi $n = o$	(V.) $m^2 - n^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$;	(V.) $-2.\overline{m-n}.n = -2.\overline{AD-BD}.BD$:
(VI.) $m^2 = a^2 = (a')^2 - 2.\overline{a'-o}.o - o^2 = \overline{(AB)'}^2 - 2.\overline{(AB')-B}.B - B^2$;	(VI.) $m^2 = (a')^2 - o^2 = \overline{(AB)'}^2 - B^2$;	(VI.) $-2.\overline{a'-o}.o = -2.\overline{(AB)'-B}.B$:
(VII.) $\overline{n-m}^2 = (-a)^2 = n^2 - 2.\overline{n-m}.m - m^2 = \overline{BD}^2 - 2.\overline{BD--AD}.AD - \overline{AD}^2$; limitis minimi $m = o$	(VII.) $n^2 - m^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$;	(VII.) $-2.\overline{n-m}.m = -2.\overline{BD-AD}.AD$:
(VIII.) $n^2 = (-a)^2 = (a')^2 - 2.\overline{a'-o}.o - o^2 = \overline{(BA)'}^2 - 2.\overline{(BA)'-A}.A - A^2$;	(VIII.) $n^2 = (a')^2 - o^2 = \overline{(BA)'}^2 - A^2$;	(VIII.) $-2.\overline{a'-o}.o = -2.\overline{(BA)'-A}.A$:
(IX.) $m^2 = \overline{n-a}^2 = n^2 - 2.\overline{n-a}.a - a^2 = \overline{Bd}^2 - 2.\overline{Bd-BA}.BA - \overline{BA}^2$; limitis minimi $n = a$	(IX.) $m^2 = n^2 - a^2 = \overline{Bd}^2 - \overline{BA}^2$;	(IX.) $-2.\overline{n-a}.a = -2.\overline{Bd-BA}.BA$;
(X.) $m^2 = \overline{a'-a}^2 = (a')^2 - 2.\overline{a'-a}.a - a^2 = \overline{(BA)'}^2 - 2.\overline{(BA)'-BA}.BA - \overline{BA}^2$;	(X.) $m^2 = (a')^2 - a^2 = \overline{(BA)'}^2 - \overline{BA}^2$;	(X.) $-2.\overline{a'-a}.a = -2.\overline{(BA)'-BA}.BA$:

§. *9*. Quoniam in (VII.ª) $n - m = a$, ſcilicet differentia variabilium eſt data, ac conſtans, unuſquiſque videt (*fig.* 5.) $\overline{BD}^2$ minimum fieri æquale $a^2 = (-AB)^2$, & conſequenter $a = -AB = BA$: ergo n in limite minimo nequit eſſe minor a ſive AB, facta $m = 0$: hac igitur ſuppoſitione tranſitum fecimus a puncto A ad punctum B, & $n = BA + Ad$, $m = Ad$: hoc eſt m in hoc caſu fit minor n, & differentia $n - m = BA = a$ poſitiva, ideoque variabili m competit in hoc caſu æquatio (IX.ª) & (X.ª); licet, ſi variabiles ad primam poſitionem referantur, negativas ſe exhibeant. Hoc etiam ſequenti modo demonſtrari poteſt; ſcilicet ſi animadvertatur eſſe $m^2 = a^2 + 2an + n^2 = n^2 - 2.\overline{-n-a}.a - a^2$: ſecundum enim membrum, facta reductione, fit primum, & primum ſecundum: at, ex dictis, ſublato rectangulo $-2.\overline{-n-a}.a$ remanet $m^2 = n^2 - a^2$; ergo $n^2 = m^2 + a^2$: ergo facta fuit variabilium permutatio, ut quæ erat m facta fuerit n; & viceverſa: ſive variabiles a poſitione $m = AD$, $n = BD$, ad poſitionem contrariam $n = Bd$, $m = Ad$ tranſlatæ fuerunt, & quæ erat major fit minor, ſed differunt ſemper data $a = BA$, quando in primo caſu erat AB. Et ſane in æquatione præcedenti $m^2 = n^2 - 2.\overline{-n-a}.a - a^2$, facta $-n = m$, erit $(-n)^2 = n^2 = (-m)^2 - 2.\overline{m-a}.a - a^2 = m^2 - 2.\overline{m-a}.a - a^2 = m^2 - 2am + a^2$: ergo, ſi methodum communem ſequamur, $n = m - a$, & $n + a = m$, & $m - n = a$: (vide tamen §§. 15, & ſeqq. quomodo hæc intelligenda ſint). Hanc demonſtrationem ex nova hac efferendi formulam ratione addere volui, ut uſus hujuſce methodi (quæ in progreſſu a me evidenter demonſtrata multum utilitatis afferet) familiaris reddatur, utque magis magiſque intelligatur ea tranſmutatio, quam tum in valore, cum in natura quantitatum diverſæ legitimæ ſubſtitutiones inducunt.

§. 10. Primum quod ex demonſtratis conſequitur Corollarium, inter ſe comparando ſuperiores æquationes, illud eſt, quod in Syſtemate baſis datæ tam in limite maximo, quam in minimo, & in Syſtemate baſis variabilis in limite tantum minimo rectangula nulla fiunt, in quo caſu æquationes utriuſque Syſtematis & quoad formam, & quoad valorem prorſus inter ſe conveniunt. Sunt enim

Æquationes integræ

$$\left.\begin{array}{l}(7.^{a})\ m^2 = \overline{AB}^2 - 2.\overline{AB-(BA)'}.(BA)' - \overline{(BA)'}^2 \\ \qquad = a^2 - 2.\overline{a-a'}.a' - (a')^2 \\ (IV.^{a})\ n^2 = \overline{(AB)'}^2 - 2.\overline{(AB)'-AB}.AB - \overline{AB}^2 \\ \qquad = (a')^2 - 2.\overline{a'-a}.a - a^2\end{array}\right\} = a^2 - 2.\overline{a-a}.a - a^2:$$

Quadraticæ

$$\left.\begin{aligned}(7.^{a})\ m^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{(BA)'}^2 = a^2 - (a')^2 \\ (IV.^{a})\ n^2 &= \overline{(AB)'}^2 - \overline{AB}^2 = (a')^2 - a^2\end{aligned}\right\} = a^2 - a^2 :$$

Rectangulæ

$$\left.\begin{aligned}-2mn &= -2.\overline{AB-(BA)'}.(BA)' = -2.\overline{a-a'}.a' \\ -2na &= -2.\overline{(AB)'-AB}.AB = -2.\overline{a'-a}.a\end{aligned}\right\} = -2.\overline{a-a}.a$$

Nam in rectangulis eſt $AB-(BA)' = a-n = m$ in Syſtemate baſis datæ: ergo $\overline{a-n}.n = \overline{AB-(BA)'}.(BA)' = mn$: at in Syſtemate baſis variabilis $(AB)' - AB = m-a = n$; ergo $\overline{(AB)' - AB}.AB = \overline{m - a}.a = n.a$:

Æquationes integræ

$$\left.\begin{aligned}(6.^{a})\ m^2 &= \overline{AB}^2 - 2.\overline{AB - B}.B - B^2 \\ &= a^2 - 2.\overline{a - B}.B - B^2 \\ (VI.^{a})\ m^2 &= \overline{(AB)'}^2 - 2.\overline{(AB)' - B}.B - B^2 \\ &= (a')^2 - 2.\overline{a' - B}.B - B^2\end{aligned}\right\} = a^2 - 2.\overline{a - 0}.0 - (0)^2:$$

Quadraticæ

$$\left.\begin{aligned}(6.^{a})\ m^2 &= \overline{AB}^2 - B^2 = a^2 - B^2 \\ (VI.^{a})\ m^2 &= \overline{(AB)'}^2 - B^2 = (a')^2 - B^2\end{aligned}\right\} = a^2 - (0)^2 :$$

Rectangulæ

$$\left.\begin{aligned}-2an &= -2.\overline{AB - B}.B = -2.\overline{a - B}.B \\ -2mn &= -2.\overline{(AB)' - B}.B = -2.\overline{a' - B}.B\end{aligned}\right\} = -2.\overline{a - 0}.0 :$$

hic enim eſt $\overline{AB - B}.B = \overline{a - 0n}.0n = m.(0n)$, & $\overline{(AB)' - B}.B = \overline{m - n}.n = an$:

Æqua-

Æquationes integræ

$$\left.\begin{aligned}(10.^a)\ n^2 &= \overline{BA}^2 - 2.\overline{BA-(AB)'}.(AB)' - \overline{(AB)'}^2\\ &= a^2 - 2.\overline{a-a'}.a' - (a')^2\\ (X.^a)\ m^2 &= \overline{(BA)'}^2 - 2.\overline{(BA)'-BA}.BA - \overline{BA}^2\\ &= (a')^2 - 2.\overline{a'-a}.a - a^2\end{aligned}\right\} = a^2 - 2.\overline{a-a}.a - a^2;$$

Quadraticæ

$$\left.\begin{aligned}(10.^a)\ n^2 &= \overline{BA}^2 - \overline{(AB)'}^2 = a^2 - (a')^2\\ (X.^a)\ m^2 &= \overline{(BA)'}^2 - \overline{BA}^2 = (a')^2 - a^2\end{aligned}\right\} = a^2 - a^2;$$

Rectangulæ

$$\left.\begin{aligned}-2n.m &= -2.\overline{BA-(AB)'}.(AB)' = -2.\overline{a-a'}.a'\\ -2m.a &= -2.\overline{(BA)'-BA}.BA = -2.\overline{a'-a}.a\end{aligned}\right\} = -2.\overline{a-a}.a:$$

nam hîc in Syſtemate baſis datæ $\overline{BA-(AB)'}.\overline{(AB)'} = \overline{a-n}.n = mn$; at in Syſtemate baſis variabilis $\overline{(BA)'-BA}.BA = \overline{n-a}.a = ma$, cum ſit $n-a = m$:

Æquationes integræ

$$\left.\begin{aligned}(9.^a)\ n^2 &= \overline{BA}^2 - 2.\overline{BA-A}.A - A^2\\ &= a^2 - 2.\overline{a-A}.A - A^2\\ (VIII.^a)\ n^2 &= \overline{(BA)'}^2 - 2.\overline{(BA)'-A}.A - A^2\\ &= (a')^2 - 2.\overline{a'-A}.A - A^2\end{aligned}\right\} = a^2 - 2.\overline{a-0}.0 - (0)^2$$

Quadraticæ

$$\left.\begin{aligned}(9.^a)\ n^2 &= \overline{BA}^2 - A^2 = a^2 - A^2\\ (VIII.^a)\ n^2 &= \overline{(BA)'}^2 - A^2 = (a')^2 - A^2\end{aligned}\right\} = a^2 - (0)^2$$

Rectangulæ

$$\left.\begin{array}{l} -2a\,.\,m = -2\,.\,\overline{\mathrm{BA}-\mathrm{A}}\,.\,\mathrm{A} = -2\,.\,\overline{a-\mathrm{A}}\,.\,\mathrm{A} \\ -2n\,.\,m = -2\,.\,\overline{(\mathrm{BA})'-\mathrm{A}}\,.\,\mathrm{A} = -2\,.\,\overline{a'-\mathrm{A}}\,.\,\mathrm{A} \end{array}\right\} = -2\,.\,\overline{a-\mathrm{o}}\,.\,\mathrm{o}:$$

in Syſtemate enim baſis datæ $\overline{\mathrm{BA}-\mathrm{A}}\,.\,\mathrm{A} = \overline{\mathrm{BA}-\mathrm{AD}}\,.\,\mathrm{AD} = \overline{a-m}\,.\,m = n\,m$;

in Syſtemate baſis variabilis $\overline{(\mathrm{BA})'-\mathrm{A}}\,.\,\mathrm{A} = \overline{\mathrm{Bd}-\mathrm{Ad}}\,.\,\mathrm{Ad} = \overline{n-m}\,.\,m = a\,m$.

Quæ quidem æquationes licet in utriuſque Syſtematis limite æquales ſint, differentia tamen maxima inter utraſque intercedit. In Syſtemate enim quadratico baſis datæ quadratum negativum eſt variabile, fluitque vel a maximo uſque ad minimum, ut in *figura* 3.ª, quo in caſu æquatio fit (6.ª); vel viceverſa: poſitivum vero ſemper eſt conſtans & datum: contra vero in Syſtemate baſis variabilis in æquatione (IV.ª) vel (X.ª) quadratum poſitivum fluit vel creſcendo ab a^2 minimo uſque ad maximum infinitum, vel ab hoc decreſcendo uſque ad valorem minimum $\overline{(\mathrm{AB})'}^2 = a\,a$, quadrato negativo ſemper conſtanti.

§. 11. Verum diligenter conſiderandæ ſunt æquationes Syſtematis baſis variabilis (IV.ª), & (X.ª), (VI.ª), ac (VIII.ª), in quibus variabiles ambæ factæ minimæ ſimul creſcere quidem poſſunt, ſed non amplius decreſcere, atque in omnibus quadratum poſitivum tantum fluit. (IV.ª) autem, & (X.ª) ſymbolo n^2, & m^2 quadratum minoris variabilis exhibet, quæ ab altera ſemper differt quantitate a: in æquationibus vero (VI.ª) & (VIII.ª) (*fig.* 5.) tam $\overline{(\mathrm{AB})'}^2 - \mathrm{B}^2$, quam $\overline{(\mathrm{BA})'}^2 - \mathrm{A}^2$ eſt differentia quadratorum variabilium, quarum utraque jam facta fuerit minima. Sed cum hujuſmodi differentia ſemper ſit conſtans, & æqualis a^2; m^2 & n^2 tam ſumi poſſunt ut quadrata ſemper data $= a^2$, quam ut quadrata variabilium facta minima. In primo caſu erit $m^2 = a^2 = \overline{(\mathrm{AB})'}^2 - \mathrm{B}^2$, $n^2 = a^2 = \overline{(\mathrm{BA})'}^2 - \mathrm{A}^2$; & in caſibus intermediis $a^2 = m^2 - n^2$, $a^2 = n^2 - m^2$, ſive $a^2 + n^2 = m^2$, $a^2 + m^2 = n^2$: in quibus permutantur variabiles, ut m, quæ erat major in prima, fiat minor in ſecunda. Quod ſi m, n ſumantur variabiles, æquationes fiunt identicæ, ſunt enim $m^2 = m^2 - (\mathrm{o}n)^2$, $n^2 = n^2 - (\mathrm{o}m)^2$, & ſignificant in utraque jam quadrata facta eſſe minima, quæ tamen æqualia ſunt alicui quadrato dato, ac ſemper eidem, ſed indeterminato: ergo (poſita H conſtanti, ſed indeterminata) $m^2 = m^2 - \mathrm{o}^2 = \mathrm{H}^2$ in limite minimo, & $m^2 = m^2 - n^2 = \mathrm{H}^2$ in caſibus intermediis; ac proinde variabili m^2 ſemper addendum eſt quadratum $\pm(\mathrm{o})^2$. Si præfigatur $+(\mathrm{o}n)^2$, æquatio erit $m^2 + n^2 = a^2$, atque hoc modo fit Syſtema quadraticum baſis datæ; ſi præfigatur $-(\mathrm{o}n)^2$, tunc in Syſtemate quadratico variabili perſiſtimus. Sed in æquatione $m^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 - \mathrm{B}^2$ ſi tranſpoſitione B^2 a parte incognitæ mutetur more communi ſignum, erit $m^2 + \mathrm{B}^2 = m^2$, ſive Syſtema quadraticum baſis datæ: & quoniam $m^2 = m^2 - \mathrm{B}^2 = a^2$, erit $m^2 + \mathrm{B}^2 = m^2 = a^2 + \mathrm{B}^2$, & in caſibus mediis $m^2 + n^2 = m^2 = a^2 + n^2$; quæ eſt legiti-

gitima æquatio, oſtenditque $m^2 = a^2$ tam pertinere ad Syſtema quadraticum baſis datæ, quam ad Syſtema quadraticum baſis variabilis: in primo caſu $m^2 + n^2 = m^2$ indicat ſummam quadratorum baſis variabilis eſſe quidem indeterminatam, quæ æquari poteſt cuicumque quadrato indeterminato, ſed conſtanti: in ſecundo differentiam quadratorum datam eſſe, ſive $m^2 - n^2 = a^2$. Contrario prorſus modo accidit in Syſtemate baſis datæ, in quo §. 7. invenimus $m^2 = (a')^2 + (on)^2$, facto m^2 quadrato maximo, ut ſit $m^2 = (a')^2 + (on)^2 = a^2$; ac facta termini $(on)^2$ translatione in alterum membrum, erit $m^2 - (on)^2 = (a')^2 = a^2 - (on)^2$; & in caſibus intermediis $m^2 - n^2 = m^2 = a^2 - n^2$, in quo differentia eſt indeterminata, ſumma quadratorum ſemper æqualis a^2.

§. 12. Quoniam vero in Syſtemate baſis datæ habentur æquationes limitis maximi quadrati $\begin{matrix} m^2 = (a')^2 + (o)^2 \\ m^2 = a^2 - (o)^2 \end{matrix}$; in Syſtemate baſis variabilis limitis minimi $\begin{matrix} m^2 = a^2 + (on)^2 \\ m^2 = (a')^2 - (o)^2 \end{matrix}$, quæ ſunt eædem ſi earum valores tantum ſpectemus; quiſque videt datam limitis æquationem $m^2 = a^2$ ſola additione $\pm (o)^2$ pertinere poſſe ad alterutrum Syſtema baſis datæ, vel baſis variabilis. Nam $(o)^2$ addito ad quadratum conſtans, vel ab eodem detracto, exurgit Syſtema quadraticum baſis variabilis, vel baſis datæ: contra vero addito ad quadratum variabile, vel ab eodem detracto exurgit Syſtema baſis datæ, vel variabilis. Sed quoniam idem omnino accidit, ſi fiat in iſtis æquationibus permutatio quadrati variabilis in datum, & viceverſa; quiſque videt hujuſmodi transformationem Syſtematis obtineri poſſe ſola permutatione variabilis in datam, ac datæ in variabilem, quin ulla fiat terminorum cum ſigno contrario ab uno ad alterum æquationis membrum tranſpoſitio. Hoc congruit cum iis quæ diximus *Libro* I. *de æquationibus linearibus*: nam, data æquatione limitis $a^2 - n^2 = 0$, ſi more communi primum membrum ad ſecundum mutatis ſignis transferatur, erit $0 = -a^2 + n^2$: idem vero habetur ſi fiat $n^2 = a^2$, & $a^2 = n^2$, ſive permutatio variabilis in datam, & datæ in variabilem; erit enim $n^2 - a^2 = 0$; ex quibus $a^2 - n^2 = n^2 - a^2$: ſed primum membrum dat Syſtema quadraticum baſis datæ, in quo n fieri nequit major a; ſecundum dat Syſtema quadraticum baſis variabilis, in quo n nequit eſſe minor a: ergo in caſibus mediis eſt $m^2 = a^2 - n^2$, $m^2 = n^2 - a^2$; qua animadverſione facta ſemper vitari poſſe imaginarium perſpicuum eſt, quemadmodum in fine *Capp.* III., & IV. *Lib.* I. innui, & in *Parte* II.ª ex compoſito agam.

§. 13. Nunc plurimum intereſt diligentiſſime inveſtigare æquationes illas quadraticas utriuſque Syſtematis quadratici, quas *homologas* appellavi, quia ſimul concurrunt ad unum Syſtema quadraticum conſtituendum. Cum enim oſtenderimus in Syſtemate baſis datæ quadratico ſemper minimum maximo reſpondere, ideoque in caſibus intermediis creſcente quadrato uno, alterum ea lege decreſcat neceſſe eſſe, ut ſemper eorum ſumma conſtans ſit & data $= a^2$; contra vero cum in Syſtemate baſis variabilis aut ſimul creſcere, aut ſimul decreſcere, ſervata ſemper dif-

differentia quadratorum data $= a^2$; æquationes illæ homologæ cenſendæ ſunt, atque inter ſe copulandæ quæ conditionem ſui Syſtematis exacte ſervant. Itaque in Syſtemate baſis datæ (ut ab hac initium ſumamus), ſumpta ex. gr. æquatione (7.ª) §. 8., quæ dat $m^2 = \overline{AB}^2 - \overline{(BA)'}^2$ (*Tab.* V. *fig.* 3.) limitis, ſive quadratum m^2 minimum zero æquale, ſumenda eſt ut homologa (9.ª), $n^2 = \overline{BA}^2 - A^2$, quæ dat quadratum maximum $n^2 = a^2 = \overline{BA}^2$: nequit enim in eodem Syſtemate (7.ª) fieri zero, quin (9.ª) fiat maxima $= (a')^2$. Itaque ſi in hoc Syſtemate ſumatur una tantum æquatio $m^2 = (o)^2$, hæc debet eſſe æquatio limitis duorum quadratorum, quorum unum poſitivum ſemper datum ſit, altero negativo fluente uſque ad valorem dati & poſitivi: ergo $m^2 = (o)^2 = H^2 - n^2$ in caſibus mediis: quare ſumpta hac æquatione in incerto relinquitur quadratum datum H^2, quod ut determinetur confugiendum eſt ad alteram æquationem limitis maximi. Sumpta igitur (9.ª) $n^2 = \overline{BA}^2 - A^2$, hæc determinat valorem & poſitionem quadrati H^2; facta enim BA minima, erit quidem m^2 maximum $= H^2$, quod in eodem Syſtemate debet eſſe valore æquale quadrato $\overline{BA}^2$, ſed ejus radix inverſe ſumenda, proindeque $m^2 = \overline{AB}^2 = \overline{BA}^2$ in limite, & $AB = BA$; & in caſibus mediis $m^2 + n^2 = \overline{AB}^2 = a^2$, vel $m^2 + n^2 = \overline{BA}^2 = a^2$, qua ultima fit variabilium permutatio. Additione igitur æquationum $m^2 = \overline{AB}^2 - \overline{(AB)'}^2 = \overline{BA}^2 - A^2 = a^2 - n^2 = a^2 - (om)^2$ habetur caſus uterque neceſſarius; eſt enim univerſim $m^2 = a^2 - n^2 = a^2 - m^2$: ſed facta n maxima $= a$, altera neceſſario eſt m minima $= o$; ergo in limitibus

$$\begin{aligned} m^2 &= a^2 - (o)^2 = a^2 - (a')^2 \\ &= a^2 - (a')^2 = a^2 - (o)^2 \end{aligned}$$; quo artificio uno eodemque tempore habentur æquationes homologæ & neceſſariæ, & valores dati utriuſque variabilis in limite. Vide igitur denuo evidentiſſime demonſtratum verum munus ſigni $=$, quod male hactenus pro ſigno æqualitatis, ac ipſius etiam identitatis uſurpatum fuit; cum revera non ſit niſi vinculum illud, quo æquationes homologæ conjungendæ ſint. Videndum tamen ne hoc ſigno male uniantur illæ, quæ nullo affinitatis vinculo continentur: ſignum enim hoc natura ſua non reddit rectum quod male inſtitutum fuit; poteſt vero ipſum inter duo æquationis membra male appoſitum, artificiorum ope quæ Analyſis recte explorata docet, uno vel altero membro in opportunam formam converſo, ad normam redigi, & legitime utraque membra copulare.

§. 14. In Syſtemate vero baſis variabilis erunt æquationes quadraticæ homologæ illæ, in quarum una quadratum variabilis minimum ſit $(o)^2$; in altera quadratum alterius variabilis item minimum æquale ſit $(a')^2$: æquatio enim quadratica baſis variabilis eſt $m^2 = a^2 + n^2$: & $n^2 = m^2 - a^2$; ergo facta $n^2 = (a')^2 - a^2$, altera ſit oportet $m^2 = a^2 + o^2$. Porro ſi æquationes (IV.^{am}), (VI.^{am})

(VI.am), (VIII.am), ac (X.am) conſulas, invenies quidem duas æquationes limitis (IV.am), ac (X.am), ſcilicet $n^2 = \overline{(AB)'}^2 - \overline{(AB)}^2 = (a')^2 - a^2 = m^2 = \overline{(BA)'}^2 - \overline{BA}^2 = (a')^2 - a^2$, ſed non reperies illas, quæ hiſce ſunt homologæ. Nam vidimus §. 11. hujus Capitis (VI.am) ac (VIII.am) vere ac proprie ſumptas non eſſe niſi æquationes indeterminatas limitis, quæ in caſibus intermediis dant $m^2 = m^2 - n^2$, $n^2 = n^2 - m^2$. Confugiendum igitur eſt ad (II.am) quadraticam $m^2 = a^2 + (0)^2 = \overline{AB}^2 + (0)^2$, $n^2 = \overline{BA}^2 + (0)^2$, & in caſibus mediis $m^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$; vel $n^2 = \overline{BA}^2 + \overline{Ad}^2$. Ergo æquationes homologæ erunt (IV.a) & (II.a), ſcilicet $m^2 = (a')^2 - a^2 = (a')^2 + a^2$; ſive in caſibus intermediis $m^2 = m^2 + a^2 = n^2 - a^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{Bd}^2 + \overline{BA}^2 = \overline{Ad}^2 - \overline{BA}^2$. Æquationes igitur numeris (IV.) & (X.) indicatæ non niſi eam variabilem deſignant, quæ a zero uſque ad infinitum procedit, eſtque variabilis minor, ſive $n = m - a$, quæ differt ab m majori quantitate a: & numquam invenies majorem n; tamen ſi ex. gr. aſſumas (X.am)

$m^2 = \overline{(AB)'}^2 - 2.\overline{(AB)' - AB.AB} - \overline{AB}^2$, ac communi methodo reducatur, erit

$$m^2 = \overline{(AB)'}^2 - 2(AB)'.AB + 2\overline{AB}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{(AB)'}^2 - 2(AB)'.AB + \overline{AB}^2:$$

& quoniam $-(AB)' = (BA)'$; erit

$$m^2 = \overline{(AB)'}^2 - 2.\overline{(AB)' - AB.AB} - \overline{AB}^2 = \overline{(AB)'}^2 - 2.(AB)'.AB + \overline{AB}^2$$
$$= \overline{(-BA)'}^2 + 2(BA)'.AB + \overline{AB}^2 = \overline{(BA)'}^2 + 2(BA)'.AB + \overline{AB}^2$$

in limite; & in caſibus intermediis

$m^2 = \overline{BD}^2 + 2BD.AB + \overline{AB}^2 = n^2 + 2na + a^2$: atque extracta radice $m = BD + AB = a + n$, ſive ea ipſa m, quæ in æquatione hujus formæ $m^2 = \overline{(AB)'}^2 - 2.\overline{(AB)' - AB.AB} - \overline{AB}^2$ facta minima erat zero, ac proinde vicem gerebat variabilis minoris æquationis $m = n - a$; mutata forma æquatur variabili majori, & eſt $m = a + n$. Verum, inquies, quomodo fieri poteſt, ut una & eadem formula varie diſpoſita diverſum valorem exhibeat, aut quænam ex iſtis ut vera amplectenda, aut repudianda tamquam falſa? Solutio hujuſce tam graviſſimæ difficultatis, quæ communibus præceptis imbutis inſolubilis videtur, tanti eſt momenti, ut ab ea & veritas inaudita prorſus, ac opinioni communi oppoſita eruatur, & error ſane graviſſimus aliorum origo & cauſſa jam in Analyſi communi omnium conſenſu confirmatus, ac tuto deliteſcens tandem detegatur, & evellatur. Maxime igitur intereſt in hac pro dignitate ſolvenda immorari.

§. 15.

§. 15. Dico itaque veros eſſe, ac neceſſarios utriuſque formulæ vario modo diſpoſitæ diverſos valores, eamque repugnantiam, quam præſeferunt, repetendam eſſe a falſa omnium conſenſu firmata opinione, qua, ut ſæpe dixi, creditur ſignum æqualitatis æquationem propoſitam $a^2 - 2.\overline{a-n}.n - n^2 = a^2 - 2an + n^2$ in duo membra ita dividere, ut inter hæc, quocumque diverſo modo modificentur ſingula, perfecta identitas, aut ſaltem æqualitas ſemper intercedat; fierique non poſſe, ut hac diverſa formulæ mutatione mutetur etiam revera valor: quin imo Analyſis communis hac falſa præoccupata opinione ad conciliandam formulis ſimplicitatem ſemper primam formulam ad ſecundam reducendam eſſe, nemine diſſentiente, hactenus docuerit. Verum vide quam longe ab ea, quam communi conſenſu veritatem ſequi arbitraris, te abducas, ut reipſa cognoſcas quam caute incedendum ſit in hac ſalebroſa, ac ſentibus adhuc oppleta Analyſeos provincia, ne initio ſtatim a recta ſemita deflectens eo magis aberres, quo ulterius progrederis. Nam tantum abeſt ut inter hæc duo membra æquationis $a^2 - 2.\overline{a-n}.n - n^2 = a^2 - 2an + n^2$ illa, quam ſemper ineſſe contendunt, perfecta æqualitas intercedat, ut ab hac ipſa eæ omnes, quas typis edidi, quaſque in toto hoc Opere ſæpius inculcavi conſecutiones, quas negant, ſponte fluant, ac præcipue illa tantopere exagitata æquatio $a - a = 2a = -2a$ neceſſario a communi hac una recepta methodo arguatur.

§. 16. Quod ut evidentiſſime demonſtrem, ſumo in *figura* 12. $CB = a$; & facta $CA = m$, $BA = n$, erit $m + n = CA + BA = a$, & $CA = CB - BA = a - n$; ac facto quadrato $CD = a^2$, erit rectangulum $CI = CA.AI = CA.BA = \overline{a-n}.n$; rectangulum $ID = GI.IH = \overline{a-n}.n$, & quadratum $IE = \overline{a-n}^2 = m^2$: quare erit

$$m^2 = \overline{CB}^2 \begin{matrix} - CI \\ - ID \end{matrix} - IB = a^2 - 2.\overline{a-n}.n - n^2.$$

Quare, ſic elata formula, ſtatim patet m^2 ſive IE minus ſemper eſſe a^2 rectangulis CI, ID una cum quadrato IB. Patet etiam punctum I fluere per diagonalem EB, atque augeri quadratum $m^2 = IE$, decreſcente BA; donec facta $BA = n = 0$ minima, quadratum IE fiat $= a^2$, quod quadratum, puncto I in B pervento, eſt maximus valor, quem habere poteſt quadratum $IE = m^2$. At creſcente BA minuitur quadratum IE, donec facta $BA = BC = a$, & puncto I in E recidente, fiat $m^2 = a^2 - 2.\overline{a-a}.a - a^2 = (0)^2 = E^2 = \overline{CB}^2 - \overline{BC}^2 = a^2 - a^2$. Non poteſt igitur in hac conſtructione quadratum $m^2 = IE$ majus eſſe quadrato a^2; ideoque in caſibus mediis ſemper minus ſit neceſſe eſt. At cum ſit omnium conſenſu $a^2 - 2.\overline{a-n}.n - n^2 = a^2 - 2an + n^2$, conſtruamus hanc ſecundam formulam $m^2 = a^2 - 2an + n^2$, quam unuſquiſque videt a *figura* 13. repræſentari; in qua oculis ipſis videre eſt quadratum m^2 æqua-

æquale eſſe ſummæ quadratorum $IE + IB = a^2 + n^2$, ac duobus rectangulis $IC + ID = -an - an$, atque eſſe punctum I ſemper fixum ac ſtabile, fluente puncto B, oppoſito prorſus modo, quo res ſe habet in ſuperiori *figura*: & facta n minima $= 0$, punctum B recidit in I, ultra quod verſus E non amplius procedere poteſt; proindeque m^2 quadratum minimum æquale eſt non amplius quadrato E^2, ſed quadrato dato $IE = a^2$. Creſcente vero n ſupra zero, punctum B magis divergit ab I dato, fiuntque tam rectangula $-an, -an$, quam quadratum n^2 ſemper majora ad infinitum; ac proinde quadratum m^2, quod erat minimum $= a^2$, facta $n = 0$, fit creſcente n ſemper majus; ac tandem in limite maximo infinitum. Quadratum igitur m^2 hac conſtructione non poteſt ad nihilum redigi, ac rectangula negativa non indicant ſubtractionem a quadratis, ſed additionem: ita ut, facta $n = a$, tantum abeſt ut quadratum $m^2 = a^2 - 2an + n^2$ ſit zero (ut falſo creditur), quin imo quadruplum quadratum a^2 contineat.

§. 17. Videndum igitur quid in hac conſtructione ſignificet ſignum negativum rectangulis præfixum. Sumamus igitur primam conſtructionem, ac primam formulam $m^2 = a^2 - 2 . \overline{a - n} . n - n^2 =$ (*Tab. VI. fig.* 12.) $\overline{CB}^2 - 2 . \overline{CB - (BA)'} . (BA)' - \overline{(BA)'}^2$, ac $a^2 - 2an + n^2 =$ (*fig.* 13.) $\overline{CB}^2 - 2 . CB \times (BA)' + \overline{(BA)'}^2$: & quoniam $-(BA)' = (AB)'$, & $(BA)' = -(AB)'$; ſubſtitutis in formula (*fig.* 13.) $(AB)'$ pro $-(BA)'$, & $-(AB)'$ pro $(BA)'$, erit

$$m^2 = \overline{CB}^2 - 2CB . (BA)' + \overline{(BA)'}^2 = \overline{CB}^2 + 2CB . (AB)' + \overline{(-AB)'}^2$$
$$= \overline{CB}^2 + 2CB . (AB)' + \overline{(AB)'}^2;$$

ac facta $(BA)' = 0$, $m^2 = a^2$, & creſcente $(BA)' = n$,

$m^2 = \overline{CB}^2 + 2CB . n + n^2$; & $m = CB + n = CA + AB$ in *figura* 13: quo indicatur valorem negativum in primo caſu præfixum quantitati $(BA)'$ non ſignificare ſubtractionem, ſed inverſionem lineæ BA fluentis *fig.* 12. in AB fluentem contraria directione in *figura* 13.ª, & m, quæ in prima formula ſignificabat ſubtractionem, ſive $m = a - n = CB - BA = CA$, in hac ſecunda ſignificare additionem, ſive *fig.* 13. $m = CA + AB = a + n$. In primo caſu m pertinet ad Syſtema lineare baſis datæ $m + n = a$, in quo facta m minima $= 0$, eſt n maxima $= a$; & facta m maxima $= a$, eſt n minima $= 0$: ideoque m nec poteſt eſſe minor zero, nec major a. In ſecundo caſu pertinet m ad Syſtema baſis variabilis æquationis $m = a + n = CA + AB$ (*fig.* 13.), in quo m minima $= a$, m maxima prorſus infinita. Quare hac ſecunda formulæ reductione, ac conſtructione, quam ſemper Analyſtæ ſequuntur, non ſubtractionem, ſed additionem ſignificari evidentiſſime demonſtraſſe arbitror. Hinc (mirabile dictu!), facta $n = a$, erit ſemper $m = a - a = 2a = -2a$,

 num-

numquam zero, idque jubente & cogente communi methodo, cum doceat eſſe ſemper $\overline{a-n}^2 = a^2 - 2an + n^2$. Atque ideo abſurditas hujuſce æquationis $a - a = 2a$, quæ mihi exprobratur, & ob quam unam (me fruſtra reclamante) quicquid edidi indicta cauſſa proſcriptum fuit, non ſolum eſt conſecutio neceſſaria calculi hucuſque unanimi conſenſu recepti, ſed (quod etiam abſurdius eſt) ſola atque una, quæ cum calculo vulgari poſſit conciliari, cui aperte repugnat altera ſubtractionis notio, quam ſemper & unam ſigno negativo affigendam eſſe contendunt. In Capite poſtremo mala præcipua, quæ ex hoc errore ſane graviſſimo in totam Analyſim redundarunt, recenſenda relinquimus.

§. 18. Ex hiſce explicatis (ut in viam a qua divertimus redeamus) colligitur æquationes homologas in Syſtemate quadratico baſis variabilis eſſe ſequentes $m^2 = a^2 + n^2$, $n^2 = m^2 - a^2$; in quibus facta $n = 0$ minima, eſt item minima $m = a$, ut quadrato $n^2 = (0)^2$ minimo reſpondeat quadratum $m^2 = a^2$ item minimum. Itaque æquationes homologæ, quæ quadrata continent, erunt ſequentes $m^2 = a^2 + n^2 = m^2 - a^2$, quæ ideo neceſſario conjungendæ ſunt, quia data una neceſſario conſequitur altera, & facto $n^2 = (0)^2$ minimo eſt $m^2 = a^2$; ac proinde $m^2 = a^2 + n^2 = m^2 - a^2 = a^2 + (0)^2 = a^2 - a^2$, in quibus quadratum unum minimum æquatur a^2, altero minimo facto zero. Quare quemadmodum in Syſtemate baſis datæ vidimus ſimul ea quadrata eſſe conjungenda, quæ proficiſcuntur ab æquationibus integris ejuſdem formæ (*Tab. V. fig. 3.*)

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \overline{AB}^2 - 2.\overline{AB - BD}.BD - \overline{BD}^2 \\ n^2 &= \overline{BA}^2 - 2.\overline{BA - AD}.AD - \overline{AD}^2 \end{aligned}\right\},$$

ut æquationes homologæ in hoc Syſtemate ſint

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = a^2 - n^2 \\ n^2 &= \overline{BA}^2 - \overline{AD}^2 = a^2 - m^2 \end{aligned}\right\},$$

ſive $m^2 = a^2 - n^2 = a^2 - m^2$; in quibus, data una, determinatur altera: ita in hoc Syſtemate quadratico baſis variabilis ea quadrata ſimul ſunt copulanda, quæ oriuntur ab æquationibus integris formæ diverſæ; ſcilicet (*fig. 5.*)

$$\left.\begin{aligned} (1)\ m^2 &= \overline{AB}^2 + 2AB.BD + \overline{BD}^2 \\ (2)\ n^2 &= \overline{AD}^2 - 2\overline{AD - AB}.AB - \overline{AB}^2 \end{aligned}\right\},$$

in quibus facta $BD = n = 0$, fit $m = AD = a$: & ſublatis rectangulis zero factis, ut ad æquationes quadraticas ad diagonalem referendas tranſeamus,

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \overline{AB}^2 + (B)^2 \\ n^2 &= (\overline{AB})'^2 - \overline{AB}^2 \end{aligned}\right\} : \text{ \& in caſibus mediis } \left.\begin{aligned} m^2 &= a^2 + n^2 \\ n^2 &= m^2 - a^2 \end{aligned}\right\};$$

& univerſim ſum-

ptis

ptis æquationibus integris $m = AB + BD = AD$, $n = AD - AB = BD$. Sed quoniam

$$m^2 = \overline{AB}^2 + 2AB.BD + \overline{BD}^2, \; \& \; \begin{matrix} BD = -Bd \\ -BD = Bd \end{matrix}; \text{ erit}$$

$m^2 = \overline{AB}^2 - 2AB.Bd + (-Bd)^2$, ex qua eruitur altera

(3.ª) $m^2 = (Bd)^2 - 2.\overline{Bd - AB}.AB - \overline{AB}^2$, quæ dat $m = Bd - AB = Ad$, & ſecunda

$$n^2 = \overline{AD}^2 - 2.\overline{AD - AB}.AB - \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 - 2AD.AB + \overline{AB}^2; \text{ ſed } \begin{matrix} AD = -Ad, \\ -AD = Ad \end{matrix};$$

ergo, facta hac ſubſtitutione, erit $n^2 = \overline{AD}^2 - 2AD.AB + \overline{AB}^2 =$

(4.ª) $\overline{(-Ad)}^2 + 2Ad.AB + \overline{AB}^2 = \overline{Ad + AB}^2$; ergo $n = Ad + AB = Bd$; quo artificio m quæ erat major variabilis $= AD$, cui reſpondebat minor $n = BD$, fit minor $= Ad$, cui reſpondet n major $= Bd$: quo facto & permutantur variabiles, & ab una ad oppoſitam plagam deferimur. Hic animadvertamus velim in (1.ª) $m = AB + BD$ eſſe revera ſummam; quia AB, BD in neutra parte invicem ſuperimponuntur, ſed continuam lineam AD conſtituunt: contra vero in (2.ª) $n = AD - AB$ eſſe revera ſubtractionem, quia lineæ AD ſuperimponitur $AB = a$, quæ per totum ſpatium AB identica eſt cum AD: rurſus in (3.ª) $m = Bd - AB$ eſt revera ſubtractio, quia AB communis eſt cum Bd, & contra in (4.ª) $n = -Ad + AB$ revera eſt ſumma $= BA + Ad$, quia BA, Ad ſunt diverſæ, nec habent ullam partem identicam, ſive communem. Quo mirifice confirmantur Canones a me *Libro* I. *Cap.* V. §. 44. ſtatuti circa diverſam notionem, quam habent ſigna +, — quantitatibus præfixa.

§. 19. Hinc ſemper magis evincitur veritas æquationis $m^2 = a^2 + n^2 = m^2 - a^2$, ac vera & legitima ſigni = notio, ejuſque proprium munus. Nam ex varia ratione, qua una eademque formula m^2, n^2 tractari poſſe docuimus, oritur m poſſe repræſentare ſummam, vel differentiam duarum linearum, ſive poſſe vel repræſentare variabilem majorem Syſtematis baſis variabilis, hoc eſt $m = a + n$, vel poſſe vicem gerere minoris n, & m permutari in $n = m + a$: atque ideo ab una formula integra $m^2 = a^2 + 2an + n^2 = n^2 - 2.\overline{a - a}.a - a^2$ erui debent quadrata $m^2 = a^2 + n^2 = m^2 - a^2$, vel $m^2 = a^2 - m^2 = n^2 + a^2$: quarum æquationum complexu ab uno ad alterum axem, ab una ad alteram directionem, ab uno ad alterum limitem tranſitus fieri eleganter poteſt. Hinc luce clarius patet quæ & quanta adhuc deſint Analyſi communi artificia, quibus ab impedimentis ſe expedire, atque erroribus expurgata vires ſuas tuto exerere tandem poſſit: ut minime mirum videri debeat, ſi infans adhuc extiterit.

§. 20. Revocatis æquationibus homologis Syſtematis baſis variabilis quadratici, nempe $m^2 = n^2 + a^2 = m^2 - a^2$; quoniam $m^2 - a^2 = n^2$, & $m^2 = n^2 + a^2$, ſi lo-

ſi loco m^2, n^2 ponantur hujuſmodi valores, æquatio ſuperior in ſequentem convertitur $m^2 = m^2 - a^2 + a^2 = n^2 + a^2 - a^2$; ſive (1.^{am}) $m^2 = (m^2 + a^2) - a^2 = (n^2 + a^2) - a^2$; in quibus tam $m^2 + a^2 = n^2$, quam $n^2 + a^2 = m^2$, ac poſitis in prima $n^2 + a^2$ pro m^2, in ſecunda $m^2 + a^2$ pro n^2; æquatio iterum erit (2.^{a}) $m^2 = (n^2 + a^2 + a^2) - a^2 = (m^2 + a^2 + a^2) - a^2$, & ſic progredi poteſt ad infinitum. Hoc modo diſpoſitæ æquationes reducuntur ad diagonalem, cujus quadratum in (1.^{a}) eſt $m^2 + a^2$, & $n^2 + a^2$; in quibus cum neque n, neque m poſſit eſſe minor a, minimus valor, quem obtinere poteſt hæc diagonalis erit a, ideoque minimum quadratum diagonalis æquale erit quadrato a^2. In (2.^{a}) vero quadratum diagonalis erit $n^2 + a^2 + a^2$, & minimus ejus valor $a^2 + a^2$, & ſic ad infinitum. Quare hoc artificio ſemper quadratum diagonalis augetur additione quadratorum æqualium uſque ad infinitum, nec poteſt eſſe minus quadrato a^2. Hoc nunc animadvertiſſe multum conferet ad ea, quæ dicenda ſunt.

§. 21. Hîc vero antequam progrediamur diligentiſſime eſt obſervanda differentia, quæ intercedit inter hanc Methodum, quæ a quadratis variabilium initium ſumit, ut ad rectangula ope quadratorum invenienda procedat, & inter Methodum Capite ſuperiori expoſitam, quæ inverſo modo a rectangulis ad quadrata viam ſibi ſternit. Ex noſtra conſtructione patet æquationem ſub hac forma $m^2 = a^2 - 2\cdot\overline{a-n}\cdot n - n^2$ neceſſario ſupponere quadratum $a^2 = AD$ (*fig.* 14.) majus n^2: ab hoc enim quadrato a^2 ſubducenda ſunt dupla rectangula $2\cdot\overline{a-n}\cdot n$ una cum quadrato n^2, ut habeatur quadratum $m^2 = \overline{a-n}^2 = \overline{FH}^2$: ideoque a ſemper major n, quæ a limite zero minimo uſque ad valorem $a = BA$ maximum procedere poteſt: ergo quadrato n^2 a $(B)^2$ minimo uſque ad $BE = \overline{BA}^2 = a^2$ quadratum maximum progrediente, m^2 inverſo modo a maximo $a^2 = \overline{AB}^2$ uſque ad minimum quadratum E^2 procedit: & æquatio linearis Syſtematis baſis datæ $m = a - n$. At ſi formula ſuperior communi methodo tractetur, ut ſit $m^2 = a^2 - 2an + n^2 = \overline{AB}^2 - 2AB.BC + \overline{BC}^2$, $-$BC *figuræ* 14. erit æqualis BC *figuræ* 15. atque ſubſtituta una pro altera, æquatio fit $m^2 = a^2 - 2an + n^2 =$ (*fig.* 15.) $\overline{AB}^2 + 2.AB.BC + \overline{(-BC)}^2 = \overline{AB}^2 + 2AB.BC + \overline{BC}^2$: qua docemur non poſſe hujuſmodi æquationem cum veritate conciliari, niſi ponatur $m^2 = FD = \overline{a+n}^2$, ſive non æquale quadrato differentiæ $a - n$, ſed ſummæ $a + n$. Porro cum n in prima formula nequeat excedere valorem a, & cum hujuſmodi æquationibus, ut ſint inter ſe homologæ, idem valor n tribuendus ſit, fiat

$$m^2 = a^2 - 2\cdot\overline{a-n}\cdot n - n^2 = a^2 + 2an + n^2$$

$$= \overline{AB}^2 - 2\cdot\overline{AB-BC}\cdot BC - \overline{BC}^2 \textit{ figuræ } 14. = AH + FB + BD + IC \textit{ fig.}^{a}\ 15.$$

$= \overline{FG}^2 = \overline{FI+IG}^2 = \overline{AB+BC}^2$. Itaque facta n maxima $= a$, erit in pri-

prima formula n^2 maximum $=$ B E, & $m^2 = E^2$ *figuræ* 14. $= a^2 + aa + aa + a^2$ $=$ qu. A H + rect. F B + rect. B D + qua. I C *fig.*ª 15: poſita vero n minima $= 0$, quadrata m^2 æquantur ſingula quadrato A B: ſed in primo caſu punctum I mobile concurrit in B fixum; in ſecundo punctum G mobile contrario prorſus modo concurrit in B datum, & fixum. Itaque creſcente n a minima uſque ad maximam in utraque formula, quadratum $m^2 = a^2$ primæ formulæ procedit a maximo uſque ad minimum; quadratum vero m^2 minimum ſecundæ formulæ $= a^2$ progreditur a minimo uſque ad maximum $= 4a^2$: & viceverſa decreſcente n a maxima $= a$ uſque ad minimam $= 0$, creſcit quadratum m^2 primæ formulæ a minimo $= (0)^2$ uſque ad maximum $= a^2$; at m^2 ſecundæ formulæ a maximo $= 4a^2$ uſque ad minimum $= a^2$ minuitur. Ergo licet in ſecunda formula n a zero uſque ad infinitum progredi poſſit; tamen, ut in utraque formula valor communis habeatur, n non poteſt excedere valorem a: quo facto radix una $m = a - n$ pertinet ad Syſtema baſis datæ, altera $m = a + n$ ad Syſtema baſis variabilis; ideoque recte conjunctæ ſunt æquationes lineares inter ſe diviſæ, iis conditionibus præditæ, quas neceſſarias eſſe *Cap.* V. ſuperioris Libri docuimus ad legitimam duarum æquationum partialium unionem obtinendam. Verum cum earum ſumma, facta identica a, ſit $m + m = a + a$, ſive per idem Caput $m = 2a$; conſtat Syſtema lineare primo ſumptum ſive totale, in quod dividuntur partialia Syſtemata, non eſſe baſis integræ $a =$ A B, ſed duplæ $2a$. Ut igitur Syſtema integrum ſit illud, quod nobis propoſuimus, ſcilicet $m + n = a$, dividenda eſt a in duas æquales partes, nempe $m + n$

$\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; hoc eſt $(m + n) + (m + n) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, ſive $m + m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$;

& $m + n' = \frac{a}{2} - n + \frac{a}{2} + n$, ac tandem $m = \frac{a}{2} - n$, $n' = \frac{a}{2} + n$.

Quare ſumenda erit æquatio $m = \frac{a}{2} - n = \frac{a}{2} + n$, & quadratum m^2

$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 . \overline{\frac{a}{2} - n} . n - n^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 . \frac{a}{2} n + n^2$, ut extracta ra-

dice habeantur homologæ variabiles Syſtematis baſis datæ $m = \frac{a}{2} - n = \frac{a}{2} + n$,

ex quarum producto oriatur Syſtema ſecundæ dimenſionis baſis datæ. Quæ mirifice congruunt cum iis, quæ diximus Capite ſuperiori, in quo, ad habenda rectangula maxima docuimus baſim Syſtematis linearis baſis datæ in rectangulo

$\overline{a - n} . n$ neceſſario dividendam eſſe bifariam, ut ſit $\overline{a - n} . n = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} . n$:

quo facto n nequit ſuperare valorem $\frac{a}{2}$, in quo caſu habetur maximum rectan-

gulum

gulum $= \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, cui recte reſpondet $m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \overline{\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}} \cdot \frac{a'}{2} - \left(\frac{a'}{2}\right)^2$ $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a'}{2}\right)^2 = (o)^2$: vidimus enim quadratum dimidiæ $\frac{a}{2} =$ AC tunc fieri nullum, quando rectangulum fit maximum: totum vero Syſtema concluditur

a quadrato maximo $m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \begin{matrix} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \\ + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \end{matrix} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$; eſt enim m^2

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \overline{\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}} \cdot \frac{a'}{2} - \left(\frac{a'}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \begin{matrix} - \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2} \\ - \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2} \end{matrix} + 2\left(\frac{a'}{2}\right)^2 - \left(\frac{a'}{2}\right)^2$$

$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \begin{matrix} - \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2} \\ - \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2} \end{matrix} + \left(\frac{a'}{2}\right)^2 = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}}^2 = a^2$; quod eſt quadratum maximum, ad quod pervenire poteſt m in Syſtemate baſis datæ $(m + n)^2 = a^2$, quando fit $n = o$, vel viceverſa; atque adeo recidimus in formulas Capitis ſuperioris §§. 46, & 47., manente ſemper dato ac fixo centro C, in quo normaliter ſe dividunt axes in medio quadrati a^2, quod eſt proinde limes rectilineus maximus, intra quem omnia peraguntur, ut & in *Capite* I. hujus Libri (*figura* 3.ª) oſtendimus.

§. 22. Ponamus nunc n majorem a, in qua hypotheſi facta (*fig.* 16.) CB $= n$, AB $= a$, erit $m^2 = n^2 - 2 \cdot \overline{n - a} \cdot a - a^2 = \overline{CB}^2 - 2 \cdot \overline{CB - BA} \cdot BA - \overline{BA}^2$ $= n^2 - 2na + a^2 = \overline{CB}^2 - 2 CB \cdot BA + \overline{BA}^2$: ſed poſita BA data poſitione, & valore mutari non poteſt; ergo facta CB (*fig.* 16.) $= -$ BC (*fig.* 17.) erit æquatio

$m^2 = (-BC)^2 + 2 BC \cdot BA + (BA)^2 = \overline{BC}^2 + 2 BC \cdot BA + \overline{BA}^2$, ut in *fig.* 17.

Erunt igitur æquationes $m^2 = n^2 - 2 \cdot \overline{n - a} \cdot a - a^2 = n^2 - 2na + a^2 = n^2 + 2na + a^2$.

Sed in harum prima n nequit eſſe minor a, quin terminus $- 2 \cdot \overline{n - a} \cdot a$ fiat poſitivus, ergo erit valor n minimus $= a$, & maximus infinitus: ergo, facta $n = a$ minima, quadratum m^2 minimum æquale eſt $(o)^2$, creſcitque ad infinitum, creſcente n ad infinitum: in ſecunda vero valor minimus quadrati m^2 æqualis eſt

$4 a^2$,

$4a^2$, creſcitque ad infinitum: itaque in utroque caſu æquationes pertinent ad Syſtema baſis variabilis, ſed in prima $m = n - a$, in ſecunda $m = n + a$; ſive in prima $m + a = n$, & $n - m = a$; in ſecunda $m - n = a$, videlicet in prima (*fig.* 16.) $CB - CA = AB = a$, in ſecunda (*fig.* 17.) $CA - CB = BA = a$. Verum in hoc etiam caſu, ſi ſumantur hujuſmodi partialia Syſtemata variabilia, conſtituunt Syſtema variabile compoſitum ex dupla a, cum ſit $n - m + m - n = AB + BA = a + a = 2a$, quæ non eſt zero, ſed eſt differentia data variabilium dupla, ſive $m - n = 2a$: ergo ſi habeatur Syſtema integrum lineare baſis variabilis $m - n = a$, dividi debet in duo Syſtemata partialia $m - n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, ut ſit $m - n = \frac{a}{2}$; $n - m = \frac{a}{2}$; & $m^2 = n^2 - 2 . \overline{n - \frac{a}{2}} . \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} = n^2 - 2n\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} = n^2 + \frac{2na}{2} + \frac{a^2}{4}$; in qua, poſita n minima $= \frac{a}{2}$, fit quadratum minimum m^2

$$= \left(\frac{a'}{2}\right)^2 - 2 . \overline{\frac{a'}{2} - \frac{a}{2}} . \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} = (0)^2 = F^2 (\textit{fig. 16.}), \ \& \ m^2 = \left(\frac{a'}{2}\right)^2 - 2 . \frac{a'}{2} . \frac{a}{2} + 2 . \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$= \left(\frac{a'}{2}\right)^2 - 2 . \frac{a'}{2} . \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} = \left(\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 = \overline{CB + BA}^2 = \overline{CA}^2 (\textit{fig. 17.}).$$

In primo caſu m^2 vicem gerit minoris variabilis Syſtematis baſis variabilis $n = \frac{a}{2} + m$; in ſecundo majoris variabilis $m = \frac{a}{2} + n$ ejuſdem Syſtematis: ſive in primo caſu vicem gerit minoris variabilis, quæ altera minor eſt quantitate data $\frac{a}{2}$; in ſecundo majoris, quæ altera eſt major eadem quantitate data $\frac{a}{2}$. Atque hic etiam, ut diximus Capite antecedenti, dividenda eſt bifariam conſtans a ad conſtituendum rectangulum $\overline{-a + m} . m = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m . m$.

§. 23. Methodus hæc altera evidentiſſimam rationem reddit hujuſmodi diviſionis datæ a in duas partes, quæ ratio cum iis, quæ Capite ſuperiori alia methodo eruimus, lucem plurimam conferat, nova hæc quæ trado mutuis harum Methodorum officiis confirmantur magis, atque in tuto collocantur. Nam ex §§.[is] ſuperioribus collegimus rectangula $\overline{a - n} . n$, $\overline{a - m} . m$, vel $\overline{-a + m} . m$, $\overline{a + n} . n$ (quorum duo prima ad Syſtema baſis datæ, altera duo ad Syſtema baſis variabilis pertinere demonſtravimus) oriri a Syſtemate lineari duplæ baſis, vel datæ $m + n = 2a$, vel $m = 2a + n$ baſis variabilis, ut habeatur maximum

aut

aut minimum rectangulum $= a^2$ quarta pars totius quadrati $4a^2$: ac proinde, ut in eadem primo poſita æquatione lineari baſis datæ a perſiſtamus, dividenda eſt a bifariam, ut rectangulum $\overline{a-n}.n$ æquetur $\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n$, qua diviſione n nequit ſuperare valorem $\frac{a}{2}$ in Syſtemate baſis datæ; nequit vero eſſe minor $\frac{a}{2}$ in rectangulo Syſtematis baſis variabilis $\overline{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+n}.n$. Porro ex mutua comparatione horum rectangulorum utriuſque Syſtematis quædam notatu digna atque admiranda deſcendunt, quæ nullo modo omittenda ſunt. Hujuſmodi vero comparatio inſtitui poteſt vel inter hujuſmodi rectangula in ſuo proprio ſingula Syſtemate ſumpta, vel relata ad unum, vel ad alterum Syſtema tantum. Primo modo, facto $\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n = \overline{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+n}.n$, erit $\overline{a-n}.n = \overline{-a+n}.n$; ſed in Syſtemate baſis datæ $a-n=m$, in Syſtemate baſis variabilis $-a+n=m$: ergo erit $mn = mn$, ſive $mn = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n = \overline{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+n}.n$, & $mn = \overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m} = \overline{m+\frac{a}{2}}.\overline{m-\frac{a}{2}}$, hoc eſt rectangulum mn ſemper poſitivum, ſi in proprio Syſtemate ſumatur, quod ſymbolis §. 45. *Cap.* V. *Lib. I.* ſic efferam

(1) $mn = \overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m}$ S. A. $= \overline{m+\frac{a}{2}}.\overline{m-\frac{a}{2}}$ S. Y.; primum poſita $\frac{a}{2}$ majori m; ſecundum poſita m majori $\frac{a}{2}$: hæc vero, quæ ſunt ambo poſitiva relata ad ſuum proprium Syſtema, erunt ambo negativa, ſi ad non ſuum, ſive ad improprium Syſtema referantur; eritque

(2) $-mn = \overline{\frac{a}{2}+m}.\overline{\frac{a}{2}-m}$ S. Y. $= \overline{m+\frac{a}{2}}.\overline{m-\frac{a}{2}}$ S. A.; hoc eſt, poſita in (1.ª) $\frac{a}{2}$ minori m in Syſtemate baſis datæ, rectangulum in hoc Syſtemate fit negativum, quemadmodum fit negativum in ſecundo membro ejuſdem (1.ª), poſita m minori $\frac{a}{2}$ in Syſtemate baſis variabilis. Quod ſi conditio neceſſa-

ria

ria unius Syſtematis alteri tribuatur, erit

$$(3)\ mn = \overline{\tfrac{a}{2} + m} \cdot \overline{\tfrac{a}{2} - m}\ \text{S. A.} = \overline{m + \tfrac{a}{2}} \cdot \overline{m - \tfrac{a}{2}}\ \text{S. Y.} = -mn,\ \text{vel}$$

$$(4) - mn = \overline{\tfrac{a}{2} + m} \cdot \overline{\tfrac{a}{2} - m}\ \text{S. A.} = \overline{m + \tfrac{a}{2}} \cdot \overline{m - \tfrac{a}{2}}\ \text{S. Y.} = mn:$$

hoc eſt ſi ponatur in primo caſu Syſtematis baſis datæ (3) $\frac{a}{2}$ major m, atque hanc eamdem conditionem velimus in Syſtemate baſis variabilis, primum mn erit poſitivum, ſecundum mn negativum; & viceverſa in (4.ª) æquatione. Hinc ex æquatione (1.ª) eruitur $mn = mn$; ex (2.ª) $- mn = - mn$; ex (3.ª) $mn = - mn$; ex (4.ª) $- mn = mn$. Quod ſi fiat (ut vulgo fit) $mn = mn$, erit ex (1.ª) $1 = 1$; ex (2.ª) $- 1 = - 1$; ex (3.ª) $1 = - 1$; ac tandem ex (4.ª) $- 1 = 1$.

§. 24. Notandum tamen hujuſmodi rectangula iiſdem ſignis affecta in una eademque conſtructione inter ſe æqualia eſſe non poſſe: quæ vero diverſo ſigno afficiuntur tantum abeſſe ut inter ſe æqualia ſint, ut unum in ſuo proprio Syſtemate nequeat exiſtere, & eſſe aliquid, niſi alterum fiat zero. Nam (*Tab.* V. *fig.* 5.) æquatio

$$(1)\ mn = \overline{\tfrac{a}{2} + m} \cdot \overline{\tfrac{a}{2} - m}\ \text{S. A.} = \overline{m + \tfrac{a}{2}} \cdot \overline{m - \tfrac{a}{2}}\ \text{S. Y.}$$ docet ſumendum eſſe mn in Syſtemate baſis datæ, quando $\frac{a}{2} > m$, in Syſtemate vero baſis variabilis, quando $m > \frac{a}{2}$: ergo in Syſtemate baſis datæ mn maximum $= \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, quando $m = 0$; quando vero m eſt maxima $= \frac{a}{2}$, $mn = 0 \cdot a$: in Syſtemate autem baſis variabilis, quando m minima $= \frac{a}{2}$, mn minimum $= a \cdot 0$; & creſcente m ſupra $\frac{a}{2}$, mn ſemper majus $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$. Ergo in hoc uno caſu, quando m eſt maxima $= \frac{a}{2}$ in Syſtemate baſis datæ, minima in Syſtemate baſis variabilis rectangula fiunt zero, ideoque æqualia; in ceteris caſibus intermediis fluente m a maxima $\frac{a}{2}$ ad minimam zero in Syſtemate baſis datæ, creſcit rectangulum uſque ad maximum $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$; in Syſtemate vero baſis variabilis fluente m a minima

$\frac{a}{2}$ uſque ad infinitum, rectangulum ſemper creſcit, & fit $mn = \frac{\overline{\frac{a}{2}+m}\cdot\overline{\frac{a}{2}-m}}{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}$ S. A.

$= \frac{\overline{m+\frac{a}{2}}\cdot\overline{m-\frac{a}{2}}}{\infty+\frac{a}{2}\cdot\infty-\frac{a}{2}}$ S. Y. Sed de hoc alias. Æquatio vero (2.ª) $-mn$

$= \left\{\frac{a}{2}+m\right\}\cdot\left\{\frac{a}{2}-m\right\}$ S. Y. $= \left\{m+\frac{a}{2}\right\}\cdot\left\{m-\frac{a}{2}\right\}$ S. A. $= -mn$

dat $-mn = -mn$: hæc ſi recte intelligatur, docet utrumque fieri non poſſe: etenim fieri nequit in hac *figura* 5.ª conſtructione ut inveniatur rectangulum in Syſtemate baſis variabilis, ſive intra limites rectilineos hujuſce Syſtematis, in quo ſit m minor $\frac{a}{2}$: etenim m nequit eſſe minor $\frac{a}{2}$; quemadmodum fieri nequit in Syſtemate baſis datæ, ſive intra limites rectilineos, ſive intra limites quadrati maximi l'L, ut inveniatur $\frac{a}{2}$ minor m, cum m ad ſummum in limite maximo æqualis fiat $\frac{a}{2}$. In hoc vero caſu facile erit ad realitatem reducere utraque membra, ſi utraque per $(-)$ dividantur, ideſt ſi ab uno ad alterum Syſtema te transferas. Nam

$$-mn = \left\{\frac{a}{2}+m\right\}\cdot\left\{\frac{a}{2}-m\right\} \text{ S. A.} = \left\{m+\frac{a}{2}\right\}\cdot\left\{m-\frac{a}{2}\right\} \text{ S. Y.} = -mn$$

ſive $-mn = -mn$ fit

$$mn = \left\{\frac{a}{2}+m\right\}\cdot\left\{-\frac{a}{2}+m\right\} \text{ S. Y.} = \left\{m+\frac{a}{2}\right\}\cdot\left\{-m+\frac{a}{2}\right\} \text{ S. A.}$$

& $mn = mn$ in ea ſemper hypotheſi, in qua ſumas in primo membro $m > \frac{a}{2}$, in ſecundo $\frac{a}{2} > m$.

§. 25. Æquatione vero (3.ª)

$$mn = \left\{\frac{a}{2}+m\right\}\cdot\left\{\frac{a}{2}-m\right\} \text{ S. A.} = \left\{m+\frac{a}{2}\right\}\cdot\left\{m-\frac{a}{2}\right\} \text{ S. Y.} = -mn$$

$$(AC+CD).(BC-CD)\ \textit{fig. } 3^a. = (AC+CD).(CD-CB)\ \textit{fig.}^a\ 5.$$

docemur ſumptam eſſe in utroque Syſtemate $\frac{a}{2} > m$: in quo caſu $AC = \frac{a}{2}$

(*fig.*

(*fig.* 3.), BC $= \frac{a}{2}$ æquales ſunt, ſed diverſæ; m vero $=$ CD identica in utroque factore originem ſumit a centro C, eſtque minor CB. At in altero Syſtemate baſis variabilis in hac eadem hypotheſi fieri nequit ut negativum mn invenias; in hoc enim Syſtemate fit zero: facta enim CD (*fig.* 5.) minori CB, punctum D non amplius extra B, vel A hinc inde, ſed intra puncta A, & B cadat neceſſe eſt; ideoque $- mn$ in hoc Syſtemate quod repugnat, fit zero. Contra vero ſi velis $m > \frac{a}{2}$, æquatio huic hypotheſi accomodata erit (4.ª): at $- mn$, quod repugnat in Syſtemate baſis datæ, in hoc ipſo fit nullum, eſt tamen poſitivum & reale in altero baſis variabilis Syſtemate, cui revera competit. Et ſane ponamus in æquatione (3.ª) $m = \frac{a}{2}$, ut fit

$$mn = \left\{\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}\right\} \cdot \left\{\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right\} \text{ S. A.} = \left\{\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}\right\} \cdot \left\{\frac{a'}{2} - \frac{a}{2}\right\} \text{ S. Y.} = - mn:$$

in hoc caſu utrumque membrum eſt zero, atque utrumque rectangulum mn eſt æquale zero, & alterutrum poteſt eſſe poſitivum vel negativum, prout ſupponis m fluentem, antequam ad valorem $\frac{a'}{2}$ maximum, vel minimum pervenerit, fuiſſe minorem, vel majorem $\frac{a}{2}$. At ponamus, ut æquatio (3.ª) requirit, m fuiſſe minorem $\frac{a}{2}$, & fluendo factam maximam $= \frac{a}{2}$, erit in extremo hoc limite

$$mn = 0 = \left\{\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}\right\} \cdot \left\{\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right\} \text{ S.A.} = \left\{\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}\right\} \cdot \left\{\frac{a'}{2} - \frac{a}{2}\right\} \text{ S.Y.} = - mn = -0$$

$$(AC + (CB)').(BC - (CB)')\,\textit{fig.3} = ((CB)' + AC)).((CB)' - AC))\,(\textit{fig.5}).$$

Verum, facto utroque membro zero, in ambiguo relinquitur utrum a minimo ad maximum m proceſſerit, nec id ſcire refert: intereſt tamen prius determinare utrum $\frac{a'}{2}$ velis, aut debeat fluendo decreſcere vel creſcere. Hoc ſtatuto, ſi velis decreſcat, remanet quod prius erat nullum ſecundum membrum in Syſtemate baſis variabilis, in quo $m - \frac{a}{2}$ fit negativa: etenim tam (CB)' + AC, quam (CB)' — BC intra puncta A & B ingrediuntur, & a Syſtemate baſis variabilis avulſa prorſus, nullo puncto communi Syſtemati baſis variabilis connectuntur; ideoque in hoc Syſtemate nulla perſeverant: fiunt tamen quanta & poſitiva in

Syſtemate baſis datæ, cum (*fig.* 3.) AC + $(CB)'$ fiat AC + CD, & BC — $(CB)'$ = BC — CD. Quare vera æquatio in hoc caſu erit

$$mn = \left\{ \frac{a}{2} + m \right\} \cdot \left\{ \frac{a}{2} - m \right\} \text{ S. A.} = 0 \text{ S. Y.}$$

$$(AC+CD) \cdot (BC-CD).$$

Ea tamen intercedit differentia inter utrumque membrum zero poſitum, & determinationem limitum variabilis *m*, quod in primo caſu poſita *m* maxima in primo membro, & minima in ſecundo, factores tam $\begin{matrix} \frac{a}{2} + \frac{a'}{2} \\ \frac{a'}{2} + \frac{a}{2} \end{matrix}$, quam $\begin{matrix} \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \\ \frac{a'}{2} - \frac{a}{2} \end{matrix}$ punctis communibus A & B tam Syſtemati baſis datæ, quam baſis variabilis Syſtemati conjunguntur; ideoque licet in utroque Syſtemate factor communis $\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}$, vel $\frac{a'}{2} - \frac{a}{2}$ zero factus reddat utraque rectangula nulla, tamen ad utrumque prorſus Syſtema amplectendum indifferens prorſus eſt: donec conſtitutis limitibus ab alterutro divellitur, atque alterutri conſociatur ita, ut jam determinatus nequeat eodem tempore in eadem conſtructione in utroque Syſtemate reperiri: ex qua determinatione determinatur Syſtema, in quo conſiſtat, in altero manente zero. Repugnantia igitur illa, quæ conſtituit illud quod dicitur imaginarium, quæque deſcendit a formula $1 = -1$ quomodo intelligenda ſit nunc aperte declaratur, præter ea quæ diximus in fine *Cap.* III. *Lib.* I, quæque in progreſſu dicemus. Hinc evidentiſſime evincitur, id quod dicitur imaginarium vere & proprie loquendo illud eſſe, quod jam primo datis conditionibus in proprio Syſtemate, atque ideo *reale* ſumptum fuerat, mutata conditione fieri quidem imaginarium in eo Syſtemate, quod cum primis conditionibus congruebat, at conditione nova ſtatuta ſtatuitur etiam novum Syſtema, ad quod pertinet: atque ideo dari non poſſe vere imaginarium, niſi prius determinatum fuerit Syſtema, in quo neceſſario ſit reale: ut vere dicendum ſit τὸ *imaginarium* relativum quid eſſe, non abſolutum, quod a notione *realis* numquam avelli poteſt. Sed de hoc luculentius in *Parte* II.ª

§. 26. Ex hiſce recte intellectis atque cognitis ſequentes legitimæ conſecutiones eruuntur

$$(\text{I.}^{a})\ MN = \left\{ \begin{matrix} \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \,.\, n \\ \overline{\quad\quad} \quad \overline{\quad\quad} \text{ S. A.} \\ \frac{a}{2} + m \,.\, \frac{a}{2} - m \end{matrix} \quad \begin{matrix} + \left\{ -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n \right\} n \\ \\ + \left\{ -\frac{a}{2} + m \right\} \cdot \left\{ \frac{a}{2} + m \right\} \end{matrix} \right. \text{ S. Y.} \left. \right\} \begin{matrix} = mn + mn \\ = mn - 0 \\ = -0 + mn \end{matrix}$$

(II.ª)

$$(\text{II.}^{a})\,MN = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}-n\,.\,n \;-\; \left\{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right\}.n} \\ \left\{\frac{a}{2}+m\right\}.\left\{\frac{a}{2}-m\right\}-\left\{\frac{a}{2}+m\right\}.\left\{\frac{a}{2}-m\right\} \end{array} \right\} \text{S.A.} \begin{array}{l} = mn - mn \\ = 0 \\ = mn + mn \end{array}$$

$$(\text{III}^{a}.)\,MN = \left\{ \begin{array}{l} -\left\{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+n\right\}n + \left\{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+n\right\}.n \\ -\left\{-\frac{a}{2}+m\right\}\left\{\frac{a}{2}+m\right\}+\left\{-\frac{a}{2}+m\right\}\left\{\frac{a}{2}+m\right\} \end{array} \right\} \text{S. Y.}$$

$$= -\,mn + mn = 0 = mn + mn$$

$$(\text{IV.}^{a})\,MN = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\left\{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right\}.\,n + \left\{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right\}.n} \\ \left\{\frac{a}{2}+m\right\}.\left\{\frac{a}{2}-m\right\}+\left\{\frac{a}{2}+m\right\}\left\{\frac{a}{2}-m\right\} \end{array} \right\} \text{S.A.} = mn + mn$$

$$(\text{V.}^{a})\,MN = \left\{ \begin{array}{l} \overline{-\left\{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+n\right\}.n-\left\{\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+n\right\}.n} \\ -\left\{-\frac{a}{2}+m\right\}.\left\{\frac{a}{2}+m\right\}-\left\{-\frac{a}{2}+m\right\}.\left\{\frac{a}{2}+m\right\} \end{array} \right\} \text{S. Y.}$$

$$= -\,mn - mn = mn + mn$$

$$(\text{VI.}^{a})\,MN = \left\{ \begin{array}{l} -\left\{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m\right\}n-\left\{+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right\}.n \\ -\left\{\frac{a}{2}+m\right\}.\left\{\frac{a}{2}-m\right\}-\left\{\frac{a}{2}+m\right\}.\left\{\frac{a}{2}-m\right\} \end{array} \right\} \text{S. A.}$$

$$= -\,mn - mn = mn + mn.$$

In (I.ª) ſi termini ſumantur ſolitarii, & ponatur in Syſtemate baſis datæ $n < \frac{a}{2}$, & in Syſtemate baſis variabilis $n > \frac{a}{2}$; hæc (I.ª) æqualis erit $mn + mn$, quæ eſt ſumma duorum rectangulorum, quorum primum pertinet ad Syſtema baſis datæ, & continetur in *figura* 3.ª, ſecundum pertinet ad Syſtema baſis variabilis, & pertinet ad limites rectilineos *figuræ* 5.ª. Quod ſi valor n fiat minor $\frac{a}{2}$ in utroque termino, tunc erit (I.ª) $MN = mn + 0$, in quo caſu ſecundus terminus in

in Syſtemate baſis variabilis eſt imaginarius, at in hoc Syſtemate vere eſt zero per §. 25: contra vero (I.ª) $MN = 0 + mn$, ſi ponatur $n > \frac{a}{2}$: nimirum eſt nullum rectangulum in Syſtemate baſis datæ, quando eſt imaginarium, & æquatio pertinet ad *figuram* 5.ᵃᵐ Syſtematis baſis variabilis. (II.ª), ſi referatur ad idem Syſtema baſis datæ, ſive ſi ſemper $n < \frac{a}{2}$, æqualis erit zero; ſi non ſolum æqualia, ſed etiam identica ſumantur rectangula: at ſi ponantur diverſa, erit $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n - .\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n = mn + mn$ (ſumpta $-n$ ex parte poſitiva) quemadmodum oſtendimus *Cap.* I. *Lib.* I. Idem dicas de (III.ª) ſumpta in Syſtemate baſis variabilis, ſive ſumpta ſemper $n > \frac{a}{2}$; ut patet ex *Cap.* II. hujuſce *Libri*.

§. 27. In Syſtemate quidem baſis datæ (IV.ª) æqualis eſt ſummæ duorum rectangulorum poſitivorum Syſtematis baſis datæ; (V.ª) ſummæ duorum rectangulorum poſitivorum in Syſtemate baſis variabilis: quæ tamen rectangula in proprio Syſtemate æqualia inter ſe nequeunt eſſe, niſi ſit $n = n$; aliter ſemper erunt inæqualia; ideoque nequeunt, ut fit, æquari $2mn$: etenim æquatio $mn + mn = 2mn$ vera eſſe nequit, niſi mn non ſolum ſint æqualia, ſed etiam identica, ut animadvertimus §. 40. Cap. I. hujuſce Libri. (VI.ª) denique eſt ſumma duorum rectangulorum Syſtematis baſis variabilis, in quo $n > \frac{a}{2}$: ſed notandum ſummam hanc, ſi referatur ad Syſtema baſis datæ, fieri negativam, quemadmodum fit negativa (V.ª) baſis datæ, ſi referatur ad (VI.ᵃᵐ): univerſim quod in uno eſt poſitivum, in altero negativum eſt; & viceverſa. Hoc vero totum obtinuimus methodo in Capitibus ſuperioribus adhibita, qua fecimus $mn = \overline{a - n}.n = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$; &, facta $\frac{a}{2} - n = m$, invenimus $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$ æquationem rectanguli Syſtematis baſis datæ ſecundæ dimenſionis, in quo n a zero uſque ad maximum valorem $\frac{a}{2}$ progreditur, cujus æquationis locus repræſentatur a quadrato inſcripto *figuræ* 3.ª, ut Capite I. hujus Libri docuimus. At ſi velimus n majorem $\frac{a}{2}$, tunc, cum mn in Syſtemate baſis datæ ſit negativum, erit $-mn$ S. A. $= \overline{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n}.n$
$= mn$

$= mn$ S. Y. $= \overline{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n}.n$, ut illic, & §. ſuperiori oſtendimus: ergo facta $-\frac{a}{2} + n = m$, erit mn S. Y. $= \overline{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n}.n = \overline{m - \frac{a}{2}}.\overline{m + \frac{a}{2}}$ æquatio Syſtematis baſis variabilis æquationis linearis $m + \frac{a}{2} = n$, in qua n a minimo valore $= \frac{a}{2}$ uſque ad infinitum progreditur, m a valore minimo $= 0$ uſque ad infinitum fluente. Simili modo te geras oportet, ſi in Syſtemate baſis variabilis conſtitutus velis n minorem $\frac{a}{2}$, ut ab hoc ad Syſtema baſis datæ legitimum tranſitum habere poſſis.

§. 28. Nunc revocemus formulas Syſtematis baſis datæ, & Syſtematis baſis variabilis ſequentes, in quarum duabus primis poſita eſt n maxima $= \frac{a}{2}$, & in duabus ultimis n minima $= \frac{a}{2}$; nempe

(I.^{am}) MN S. A $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\}.n = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} - \left(\frac{a'}{2}\right)^2$,

(II.^{am}) MN S. A. $= \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\}.n = \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \left(\frac{a'}{2}\right)^2$

(III.^{am}) MN S. Y. $= \frac{a^2}{4} - \left\{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right\}.n = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \left(\frac{a'}{2}\right)^2$

(IV.^{am}) MN S. Y. $= \frac{a^2}{4} + \left\{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right\}.n = \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \left(\frac{a'}{2}\right)^2$.

In iſtis æquationibus ſi ſinguli termini abſolute ſpectentur, atque ſolitarie ſumantur, æquales ſunt quadrato ſolitario & integro $\frac{4a^2}{4} = a^2$: quo monemur in Syſtemate baſis datæ, omnibus factis maximis, cetera media intra limites rectilineos quadrati maximi a^2 concludi; contra in Syſtemate baſis variabilis, ubi facta eſt n minima $\frac{a}{2}$, omnia media extra limites hujuſce quadrati a^2 peragi oportere, atque ipſum relate ad reliqua quadrata minimi vices gerere: nempe eſt maximum relatum ad Syſtema baſis datæ, minimum ſi ad Syſtema baſis variabilis referatur. (I.^{a}) dividitur in duas partiales æquationes, (1.^{am}) $(0)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a'}{2}\right)^2$ (2.^{am}) MN $= \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2}$. In æquatione (II.^{a}) vero,

facta

facta n maxima $= \frac{a}{2}$, dividitur æquatio in (3.^{am}) $o = \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2}$, (4.^{am}) $o = -\frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2$. At in Syſtemate baſis variabilis, facta n minima $= \frac{a}{2}$, dividitur (III.^{a}) in (5.^{am}) $(o)^2 = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2$, & in (6.^{am}) $MN = \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2}$; (IV.^{a}) vero in (7.^{am}) $(o)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2}$, & in (8.^{am}) $(o)^2 = -\frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2$. Hac methodo æquatio integra limitis, ex qua conflatur in limite maximo quadratum maximum a^2 in Syſtemate baſis datæ, & quadratum idem minimum a^2 in limite minimo in Syſtemate baſis variabilis dividi ſemper poteſt in duas æquationes partiales, atque in duo Syſtemata partialia, utrumque baſis datæ & variabilis.

§. 29. Ex iſtis æquationibus partialibus limitis, quæ eruuntur ex utroque Syſtemate, illæ quæ in utroque Syſtemate eamdem formam habent ſunt ſequentes

$$\text{S. A.}\left\{\begin{array}{ll}(1.) & \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 \\ (3.) & \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} \\ (4.) & -\frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll}(5.) & \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 \\ (7.) & \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} \\ (8.) & -\frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2\end{array}\right\}\text{S. Y.}$$

(1.^{a}) convenit cum (5.^{a}), (3.^{a}) cum (7.^{a}), (4.^{a}) cum (8.^{a}). At in (1.^{a}) quadratum variabile in caſibus mediis debet decreſcere, creſcere in (5.^{a}) (in (1.^{a}) enim factum eſt maximum, minimum in (5.^{a})). Ergo ſi decreſcat in (1.^{a}), creſcat in (5.^{a}), ut proprium cujuslibet æquationis Syſtema requirit, (3.^{a}) remanet poſitiva, (5.^{a}) fit negativa: contra ſi mutatis ſignis ſit S. A. (1.^{a}) $-\frac{a^2}{4} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 =$ (5.^{a}) $-\frac{a^2}{4} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2$ S. Y., tunc decreſcente $\left(\frac{a'}{2}\right)$ in (1.^{a}), & creſcente in (5.^{a}), (1.^{a}) fit negativa, poſitiva (5.^{a}). Verum facta (1.^{a}) S. A. $\frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 = -\frac{a^2}{4} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2$ S. Y. (5.^{a}), & decreſcat in (1.^{a}), creſcat in (5.^{a}); omnia, ut proprium cujuſque Syſtema requirit, remanent poſitiva. Quod ſi fiat (1.^{a}) S. A. $-\frac{a^2}{4} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 = -\frac{a^2}{4} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2$

S. Y.

S. Y. (5.ª), & decreſcat in (1.ª), creſcat in (5.ª); (1.ª) fit negativa, remanet poſitiva (5.ª). Quare, ut omnia rite procedant, quemadmodum conditiones uniuſcujuſque Syſtematis poſtulant, ſemper ſub hac duplici forma inſtituenda eſt univerſim æquatio $(M)^2 =$ (1.ª) S. A. $\frac{a^2}{4} - n^2 =$ (5.ª) S. Y. $- \frac{a^2}{4} + n^2$, ut inſervire poſſit tam Syſtemati baſis datæ, in quo limes maximus variabilis n non excedit valorem $\frac{a}{2}$, quam Syſtemati baſis variabilis, in quo n infra $\frac{a}{2}$ decreſcere nequit. In prima tamen hypotheſi formula (5.ª) zero cenſenda eſt, quia n^2 in extremo minimo limite hujuſce Syſtematis facta zero, talis in ipſo perſeverat, cum minor facta $\frac{a}{2}$ a proprio Syſtemate avulſa intra fines Syſtematis alterius ingrediatur, ut diximus §. 25; idem reſpective dicas de ſecunda hypotheſi, in qua quadratum n^2 minimum eſt $\frac{a^2}{4}$. Si autem mutentur ſigna æquationibus ſuperioribus, ſive ab una ad alteram æquationis partem more communi transferantur termini, tunc membra æquationis ſingula in ſuo primo Syſtemate ſumpta fiunt quidem imaginaria & negativa, & ſi malis nulla; at permutatione Syſtematum fiunt realia, & (2.ª) quæ pertinebat ad Syſtema quadraticum baſis datæ, pertinet nunc ad Syſtema baſis variabilis; & viceverſa (5.ª): & æquatio media

$(M)^2 =$ (1.ª) S. A. $\frac{a^2}{4} - n^2 =$ (5.ª) S. Y. $- \frac{a^2}{4} + n^2$ (mutatis ſignis in formulis (1.ª) & (5.ª), intacto manente $(M)^2$) fit

$M^2 =$ (1.ª) S. Y. $- \frac{a^2}{4} + n^2 =$ (5.ª) S. A. $\frac{a^2}{4} - n^2$. Quoniam vero id etiam obtinetur facta permutatione variabilium in datas, ac datarum in variabiles, data æquatione $M^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a'}{2}\right)^2$ S. A. limitis maximi, in quo termini $\frac{a^2}{4}$, $\left(\frac{a'}{2}\right)^2$ æquales ſunt, ponatur $\left(\frac{a'}{2}\right)^2$ pro $\frac{a^2}{4}$, & $\frac{a^2}{4}$ pro $\left(\frac{a'}{2}\right)^2$; & æquatio mutatur in $M^2 = \left(\frac{a'}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ limitis minimi Syſtematis baſis variabilis, cujus æquatio media eſt $M^2 = n^2 - \frac{a^2}{4}$. Hinc denuo demonſtratur quod ſæpe, ac ſæpius probatum fuit ſuperius, permutatione ſignorum, vel permutatione variabilium in datas ab uno ad alterum Syſtema tranſitum fieri.

§. 30. Inciditur itaque methodo communi in æquationem neceſſariam $1 = -1$, quæ videtur abſurda, quia male hactenus intellecta fuit. Nam tamquam abſurda exploditur quia in æquatione $M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2$ S. A. $= -\frac{a^2}{4} + n^2$ S. Y. ponuntur identicæ inter ſe formulæ utriuſque Syſtematis: tantum abeſt tamen ut ſint identicæ, ut etiam non niſi in limite maximo prima, in limite minimo ſecunda æquales inter ſe fiant; univerſim vero ita inter ſe divergunt, ut prima facta zero, altera fiat infinita. Veritas hæc ampliſſimam lucem afferet iis, quæ a nobis ex compoſito dicenda erunt de illo Infinito abſoluto, quod cum ipſa æquatione, ex qua deſcendit, tamquam abſurdum a tota Analyſi proſcribitur: quo recepto gravia illa impedimenta tolluntur, quibus Analyſis communis irretitur. Adde quod a methodo communi inter duas tantum formulas $\frac{a^2}{4} - n^2 = -\frac{a^2}{4} + n^2$ comparatio inſtituitur, cum tamen ſubintelligi ſemper debeat terminus alter M^2, quocum utraque comparetur. Hoc modo omnis tollitur repugnantia, quam præſefert neceſſaria illa æquatio $1 = -1$. Si enim ſumatur, ut ſupra, $M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 = -\frac{a^2}{4} + n^2$, ſtatim intelligitur M^2 duplicem modum exiſtendi habere poſſe: nam vel n intra limites zero, & $\frac{a}{2}$ tantum vagatur, & tunc pertinet ad æquationem Syſtematis quadratici baſis datæ $M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2$, ſive $M^2 + n^2 = \frac{a^2}{4}$, & ad nihilum redigitur altera, quæ proinde a calculo exploditur: vel intra limites $\frac{a}{2}$ & ∞ excurrat oportet, quo in caſu pertinet ad Syſtema quadraticum baſis variabilis $M^2 = -\frac{a^2}{4} + n^2$, ſive $M^2 + \frac{a^2}{4} = n^2$; in qua æquatione M^2 progreditur a zero minimo uſque ad infinitum, & n^2 a quadrato minimo $\frac{a^2}{4}$ uſque ad infinitum, ut reſpondeat æquationi lineari Syſtematis baſis variabilis $m + \frac{a}{2} = n$. Poteſt etiam methodo §. 26. hujus Capitis adhibita ita efferri æquatio $M^2 - M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 - \frac{a^2}{4} + n^2$, in qua tamen una vel altera M^2 diximus nullam eſſe: vel enim eſt $M^2 - (0)^2 = \frac{a^2}{4} - n^2$, vel $-M^2 + M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 - \frac{a^2}{4} + n^2$; & $-0^2 + M^2 = -\frac{a^2}{4} + n^2$: qua methodo docemur in uno Syſtemate M^2 negativum revera

fieri

fieri nullum in hoc Syſtemate, quod tamen excipitur ab altero Syſtemate, in quo erat nullum, cum erat aliquid in primo.

§. 31. Hæc tamen hîc innuiſſe ſufficiat, ut evidenter percipiatur vera tandem cauſſa, a qua a legitimis æquationibus in illam $1 = -1$, vel $-1 = 1$ trahimur, quæ ignoratione ejus originis videtur abſurda, & ut alia non minoris utilitatis veritas indicetur, quæ multum in progreſſu conferet ad enodandas graviſſimas illas calculi, qui dicitur *ſublimior*, difficultates, in quas identidem inciditur; quæ tamen ſpecioſo *paradoxorum* nomine obtenduntur, licet non minorem repugnantiam præſeferant, quam quæ offert æquatio $1 = -1$ in calculo ſimpliciori, qui *finitus* nuncupatur. Indicatur nempe hac æquatione $1 = -1$ infinita prorſus indeterminatio, quam habere poteſt illud quod nomine *unitatis* deſignatur. Nam ex dictis cum in prima parte æquationis $1 = -1$ poni poſſit pro unitate una eademque formula quæcumque poſitiva, & negativa in altera (quod vulgo dicitur *ducere in unitatem*), poterit pro $1 = -1$ ſubſtitui ex. gr. $\frac{a^2}{4} - n^2 = -\frac{a^2}{4} + n^2$: ſed ex dictis §§. 26, & 30. $M^2 - M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 - \frac{a^2}{4} + n^2$; & $M^2 - (0)^2 = \frac{a^2}{4} - n^2$ S. A. vel $M^2 - M^2 = -\frac{a^2}{4} + n^2 + \frac{a^2}{4} - n^2$; & $M^2 - (0)^2 = -\frac{a^2}{4} + n^2$ S. Y: ergo $M^2 - M^2 = 1 - 1$, & $M^2 - (0)^2 = 1$: ergo unitas in ſecundo membro hujuſce æquationis $M^2 = 1$ vicem gerere poteſt cujuſcumque quantitatis univerſim, quæ ad ſolam quantitatem ſecundæ dimenſionis, vel ad quadraticam determinatur hîc, ſi nempe velis M^2 quadratum. Si hæc cum iis, quæ diximus in duobus primis ſuperioris *Libri* Capitibus, conferamus, magis ſemper certiores facti de infinitate illa, quam calculus, qui dicitur elementaris, anguſtiſſimis terminis hactenus definitus in ſuis formulis continet, ex inexhauſto hoc tamquam fonte innumeras nondum cognitas atque hactenus impervias veritates hauriri poſſe impoſterum non inficias ibimus: dummodo caute ac ſenſim, Geometria ſemper comite, in difficillimo hoc negotio progrediamur.

§. 32. Sumpta æquatione integra (I.ª)

$$MN = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} - \left(\frac{a'}{2}\right)^2 \text{ S. A.} = \frac{a}{2}.\left(\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}\right) + \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right).\frac{a'}{2}$$

maxima in Syſtemate baſis datæ, erit ſemper in ceteris intermediis caſibus poſitiva. At ſi in hoc Syſtemate baſis datæ contra ipſius Syſtematis naturam ponamus $\frac{a'}{2}$ quæ erat maxima, eſſe minimam, & uſque ad infinitum procedere; tunc hujuſmodi æquatio, creſcente $\frac{a''}{2}$ ſupra $\frac{a}{2}$, fit negativa: nam ſi fiat $n = \frac{ga'}{2}$, erit

$$\frac{a}{2}\cdot\left\{\frac{a}{2}+\frac{ga'}{2}\right\}-\left\{\frac{ga'}{2}-\frac{a}{2}\right\}\frac{ga'}{2}=\frac{a^2}{4}+\frac{ga'a}{4}-\frac{g^2(a')^2}{4}-\frac{gaa'}{4}=\frac{a^2}{4}-g^2\cdot\left\{\frac{a'}{2}\right\}^2.$$

In hoc igitur caſu ſic erit efferenda $-MN=\frac{a}{2}\left\{\frac{a}{2}+\frac{a'}{2}\right\}-\left\{\frac{a'}{2}-\frac{a}{2}\right\}\frac{a'}{2}$ S.A.; quæ enim erat poſitiva in Syſtemate baſis datæ fit negativa applicata Syſtemati baſis variabilis; eſtque

$$(1.^a)\quad MN=\frac{a}{2}\cdot\left\{\frac{a}{2}+\frac{a'}{2}\right\}+\left\{\frac{a}{2}-\frac{a'}{2}\right\}\cdot\frac{a'}{2}\text{ S. A.}=-MN$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\left\{\frac{a}{2}+\frac{a'}{2}\right\}-\left\{\frac{a'}{2}-\frac{a}{2}\right\}\cdot\frac{a'}{2}\text{ S. Y., \&}$$

$$(2.^a)\,-MN=\frac{a}{2}\cdot\left\{\frac{a}{2}+\frac{a'}{2}\right\}+\left\{\frac{a'}{2}-\frac{a}{2}\right\}\cdot\frac{a'}{2}\cdot\text{S. A.}=\quad MN$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\left\{\frac{a}{2}+\frac{a'}{2}\right\}+\left\{\frac{a'}{2}-\frac{a}{2}\right\}\cdot\frac{a'}{2}\text{ S. Y.}$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\left\{\frac{a}{2}+\frac{a'}{2}\right\}-\left\{\frac{a}{2}-\frac{a'}{2}\right\}\cdot\frac{a'}{2}\text{ S. A.}:$$

ac univerſim, ſi conditio, quæ convenit uni Syſtemati, improprie alteri tribuatur, reddit formulam Syſtematis aſſumpti negativam, ſed huic etiam altera poſitiva reſpondet alterius Syſtematis: verbo quæ eſt poſitiva in uno Syſtemate fit negativa in altero, & viceverſa: ideoque formula negativa nos docet Syſtematis permutationem factam fuiſſe. Quamobrem licet æquatio limitis (I.ª) §. 28. eadem videatur ac (II.ª); tamen multum differunt inter ſe, cum una ſit poſitiva, negativa altera. Nam MN limitis maximi $=\left\{\frac{a}{2}\right\}^2+\frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2}+\frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2}-\left\{\frac{a'}{2}\right\}^2$ in Syſtemate baſis datæ $=-MN=\left\{\frac{a}{2}\right\}^2+\frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2}+\frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2}-\left\{\frac{a'}{2}\right\}^2$ limitis minimi in Syſtemate baſis variabilis: ac facto tranſitu ad æquationes medias

$$(\text{I.}^a)\ MN=\left\{\frac{a}{2}\right\}^2+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}\,.\,n\text{ S. A.}$$

$$=(\text{II.}^a)\ \frac{a^2}{4}-\left\{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+n\right\}.n=-MN\text{ S.Y.}$$

Et ſane ſi fiat in (I.ª) $\frac{a}{2}-n=m$; in (II.ª) $-\frac{a}{2}+n=m$, facta ſubſtitutione, erit (I.ª) $MN=\left\{\frac{a}{2}\right\}^2+\left\{\frac{a}{2}+m\right\}\cdot\left\{\frac{a}{2}-m\right\}$ S. A.

=

$= (II.^a) \frac{a^2}{4} - \left\{ -\frac{a}{2} + m \right\} . \left\{ \frac{a}{2} + m \right\}$ S. Y.: ſed in (I.^{a}) $\frac{a}{2} > m$, in (II.^{a}) $m > \frac{a}{2}$; ergo (I.^{a}) formula poſitiva, (II.^{a}) negativa. Quod ſi velis a formula Syſtematis baſis variabilis negativa ad formulam ejuſdem Syſtematis poſitivam tranſitum facere; duplici modo hoc obtinere poteris. Primo modo ſi in ſingulis utriuſque formulæ terminis ſigna ipſis affixa mutes, ut ſit æquatio

$$(I.^a) - MN = - \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 \text{ S. A.}$$

$$= - \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 \text{ S. Y.} = MN, \text{ ſive}$$

$$(I.^a) - MN = -\frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\}.n \text{ S. A.} = -\frac{a^2}{4} + \left\{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right\}.n \text{ S. Y.} = MN,$$

obtinebis (I.^{am}) negativam, poſitivam (II.^{am}). Hic modus communis eſt & uſitatus in Analyſi tranſpoſitione membrorum æquationis ab una ad alteram partem: ignoratur tamen hac via tranſitum fieri a Syſtemate negativo ad poſitivum, vel viceverſa: ſive a Syſtemate improprio ad proprium, vel viceverſa.

§. 33. Secundo modo, reliquis intactis, fiat tantum variabilium permutatio in datas, & datarum in variabiles; quo in caſu æquatio

$$(I.^a) \; MN = \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} - \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 \text{ S. A.} = - MN \text{ S. Y.}$$

$$= \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} - \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 \text{ convertitur in hanc}$$

$$- MN = \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 + \frac{a'}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}.\frac{a}{2} - \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 \text{ S. A.} = + MN$$

$$= \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 + \frac{a'}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}.\frac{a}{2} - \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 \text{ S. Y.: \& quæ erat poſitiva in Sy-}$$

ſtemate baſis datæ fit negativa, & poſitiva illa Syſtematis baſis variabilis, quæ erat negativa. Æquationes vero mediæ erunt

$$- MN = - \times + \overline{\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}} - n.n - \frac{a^2}{4} \text{ S. A.} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} + n.n - \frac{a^2}{4} \text{ S. Y.}$$

$= MN$, ut docuimus *Cap.* I., & II. Differt hæc a (I.^{a}), quod in (I.^{a}) æquatio linearis Syſtematis baſis datæ ſit $\frac{a}{2} - n = m$, & $\frac{a}{2} = n + m$; at in hac æquatio ejuſdem Syſtematis ſit $+ \left\{ - \frac{a}{2} \right\} - n = m$, ſive $-\frac{a}{2} = n + m$,

&

& $\frac{a}{2} = -n - m = m + n$; quæ ſignificat (uti docuimus *Lib.* I.) permutationem variabilium, ut quæ erat in (I.ª) n, ſit hîc m, & m ſit n; atque indicat variabilium originem ab uno puncto dato ad alterum translatam fuiſſe. Æquatio vero linearis Syſtematis baſis variabilis in (I.ª) eſt $-\frac{a}{2} + n = m$, & $n - m = \frac{a}{2}$; in hac $\frac{a}{2} + n = m$; & $m - n = \frac{a}{2}$: ideoque in (I.ª) n vicem gerit variabilis majoris, in hac minoris. Utroque igitur modo, ſcilicet tam permutatione variabilium in datas, & viceverſa, quam mutatione ſignorum in ſingulis terminis ab uno ad alterum Syſtema tranſitus fieri poteſt.

§. 34. Quamobrem illud conſequitur hactenus inauditum, & communibus notionibus prorſus oppoſitum, nimirum ſi æquationes limitis utriuſque Syſtematis, quæ videntur identicæ, inter ſe iiſdem ſignis comparentur, in caſibus mediis alterutram fieri neceſſario negativam, atque ut rectangula in utroque Syſtemate legitima ipſorum comparatione poſitiva fiant, neceſſario ſignis diverſis ita formulas utriuſque Syſtematis afficiendas eſſe, ut una poſitiva, altera negativa æquationem præbeant $1 = -1$, vel $-1 = 1$. Et ſane poſita æquatione $MN = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2} - \left(\frac{a'}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2} - \overline{\left(\frac{a'}{2}\right)^2}$, quam fecimus fieri negativam ſi $\frac{a}{2} < n$; erit ex dictis $MN = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \cdot n$ S. A. $= \frac{a^2}{4} - \left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right) \cdot n$ S. Y. $= -MN$; & poſita in formula $n > \frac{a}{2}$, MN relatum ad Syſtema baſis datæ fit negativum, poſitivum ſecundum relatum ad Syſtema baſis variabilis: ideoque quando formulæ & quoad formam, & quoad ſigna terminis præfixa eædem omnino ſunt, rectangulum alterutrum fit negativum, eſtque MN S. A. $= -MN$ S. Y, quando $\frac{a}{2} > n$; vel $-MN$ S. A. $= MN$ S. Y., quando $\frac{a}{2} < n$: ergo poſitæ formulæ adamuſſim æquales, atque inter ſe comparatæ dant $\begin{matrix} MN = -MN \\ \text{vel} -MN = MN \end{matrix}$, ſive $\begin{matrix} 1 = -1 \\ -1 = 1 \end{matrix}$: verum MN unum nequit alteri eſſe æquale, niſi in limitibus maximo, & minimo. Ut igitur utraque rectangula in ſuo proprio Syſtemate conſtituta poſitiva ſint, habeaturque MN S. A. $= MN$ S. Y., formulæ inter ſe ſignis contrariis ſunt comparandæ, ita ut ſumptæ identicæ exhibeant æquationem $1 = -1$, vel $-1 = 1$: & hoc ita eſt neceſſarium, ut, niſi id fiat, revera poſitivum æquetur negativo, & rea-

reale imaginario. Nam comparata ſignis contrariis inter ſe formula, erit æquatio

$$MN = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2} - \left(\frac{a'}{2}\right)^2 = -\frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2} - \frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2} + \left(\frac{a'}{2}\right)^2,$$

& æquatio media $MN = \frac{a^2}{4} + \frac{an}{2} + \frac{an}{2} - n^2 = -\frac{a^2}{4} - \frac{an}{2} - \frac{an}{2} + n^2$,

quæ ſi identica accipiatur dat $1 = -1$. Verum ex dictis ſcimus eam eſſe

$$(1)\ MN = \frac{a^2}{4} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n \text{ S. A.} = -\frac{a^2}{4} + \left\{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right\}.\,n \text{ S. Y.},$$

ex qua intelligitur utrumque MN tunc fieri poſitivum, ſive ſumptum fuiſſe in proprio Syſtemate, quando MN eidem formulæ limitis bis ſumptæ, ſed ſignis contrariis affectæ comparatur. Quod ſi inventa hæc æquatio (1).ª mutatione ſignorum, aut (ut moris eſt) translatione membrorum ab una ad alteram partem ſigni in ſequentem convertetur $-MN, = -\frac{a^2}{4} - \frac{an}{2} - \frac{an}{2} + n^2$ S. A.

$= \frac{a^2}{4} + \frac{an}{2} + \frac{an}{2} - n^2$ S. Y., rectangulum MN fit negativum. Verum ex dictis colligitur negativum hoc nos docere factam fuiſſe Syſtematum permutationem, ut rectangulum MN, quod in primo caſu pertinebat ad Syſtema baſis datæ, vel baſis variabilis, ideoque poſitivum erat; mutatis ſignis utrumque ad inverſum Syſtema pertineat: atque ideo $-MN = -\frac{a^2}{4} - \frac{an}{2} - \frac{an}{2} + n^2$ S. A.

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{an}{2} + \frac{an}{2} - n^2 \text{ S. Y.} = (2)\,MN = -\frac{a^2}{4} + \overline{\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\} + n}\,.\,n \text{S.Y}$$

$= \frac{a^2}{4} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n$ S. A.. Id vero facile obtinetur, ſi loco S. A. ponatur S. Y., & S. A. pro S. Y.

§. 35. Quoniam vero docuimus §. 33. permutationem Syſtematum obtineri permutatione variabilium in datas, & viceverſa; fiat æquatio limitis

$$MN = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2} - \left(\frac{a'}{2}\right)^2 = \left(\frac{a'}{2}\right)^2 + \frac{a'}{2}\cdot\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}\cdot\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

ut ſit æquatio media

$MN = \frac{a^2}{4} + \frac{an}{2} + \frac{an}{2} - n^2 = n^2 + \frac{na}{2} + \frac{na}{2} - \frac{a^2}{4}$; a qua etiam, more vulgari tractata, eruitur $1 = -1$, vel $-1 = 1$. Eſt tamen

(3.ª)

$$(3.^a)\ MN = \frac{a^2}{4} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n\ \text{S. A.} = -\frac{a^2}{4} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}\,.\,n\ \text{S. Y.},$$ in

qua utrumque M N, prout ſumptum in proprio Syſtemate, eſt poſitivum: primum enim vere pertinet ad Syſtema baſis datæ, ſecundum ad Syſtema baſis variabilis. Mutatione tamen ſignorum, quæ terminis ſingulis præfiguntur, fit

$$-MN = -\frac{a^2}{4} - \frac{an}{2} - \frac{an}{2} + n^2\ \text{S. A.} = -n^2 - \frac{na}{2} - \frac{na}{2} + \frac{a^2}{4}\ \text{S. Y.};$$ ſumpta tamen in proprio Syſtemate dabit

$$(4.^{am})MN = -\frac{a^2}{4} + \left\{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right\}.n\ \text{S.Y.} = \frac{a^2}{4} + \overline{\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\} - n}\,.\,n\ \text{S.A.}$$

Ea tamen intercedit differentia inter methodum hanc permutationis variabilium in datas, & inter methodum §. ſuperiori adhibitam, qua terminis ſigna mutantur, quod in hac permutatione variabilium in datas æquatio $(3.^a)$ ex. gr. ſit

$$MN = \frac{\frac{a^2}{4} + AD\,.\,DE}{Cl' + AD\,.\,DE}\ \text{S.A.}\ \textit{fig. } 3.^a = \overline{AB + BD}\,.\,DE - \frac{a^2}{4} = AD\,.\,DE - \frac{a^2}{4}\ \text{S.Y.}\ \textit{fig.}\ 5.^a,$$

in quo Syſtemate baſis variabilis, cum ſit $\frac{a}{2} + n = m$, n minima eſt zero, & $m = \frac{a}{2}$ minima, & æquatio limitis

$$MN = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}{Cl' + Cl} = N'l\ \text{S.A.}\ \textit{fig. } 3^a. = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}{CL + BE''''} = CE''''\ \text{S. Y.}\ \textit{figuræ}\ 5.^a;$$ nempe

maximum M N in Syſtemate baſis datæ æquale minimo M N in Syſtemate baſis variabilis. Ex $(4.^a)$ vero eruitur

$$MN = -\frac{a^2}{4} + \left\{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right\}.\,n\ \text{S. Y.} = \frac{a^2}{4} + \overline{\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\} - n}\,.\,n\ \text{S.A};$$

Cl + BA . Ad *fig.*^{a} 5.^{a} = CL' + Bd . Ad *figuræ* 3.^{a}

& in limite minimo baſis variabilis, in quo $n = \frac{a}{2}$, maximo baſis datæ, in quo $+\left(-\frac{a}{2}\right) = m$

MN

$$MN = -\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\ \text{S. Y.} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\ \text{S. A.}$$

$Cl + Ae'''' = Ce'''' = CL' + CL = N'L$; atque ideo hujuſmodi rectangula tam 3.ᵃ, quam 4.ᵗᵃ. reſpective maxima & minima æqualia ſunt quidem inter ſe, ſed ſunt directione oppoſita. At tam in (1.ᵃ), quam in (2.ᵃ) §. antecedentis eſt

$$MN = \frac{a^2}{4} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n\ \text{S. A.} = -\frac{a^2}{4} + \left\{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right\}.\,n\ \text{S. Y.}$$

$$Cl' + AD\,.\,DE\ (\textit{fig. 3.}) = -\frac{a^2}{4} + Bd\,.\,de = Cl + Bd\,.\,de,\ (\textit{fig. 5.});$$

& maximum

$$MN = Cl' + Cl = N'l = Cl + Ae''' = Ce'''.$$

Methodo igitur §. antecedenti adhibita, facta negativa æquatione (1.ᵃ), eadem omnino rectangula perſeverant, at Syſtemata tantum permutantur: methodo vero permutationis variabilium in datas in tranſitu a poſitivo MN ad negativum permutantur Syſtemata, & directiones rectangulorum MN. Formulæ vero utriuſque Syſtematis non ſunt niſi in limite maximo baſis datæ, & in minimo baſis variabilis inter ſe æquales; ideoque rectangulum MN unius Syſtematis licet ſigno $=$ neceſſario cum MN alterius Syſtematis copuletur; tamen huic non eſt æquale niſi in limite: ex quo deducitur in hoc caſu ſignum $=$ non niſi ambo Syſtemata, ad quæ referri poteſt formula, prout n minor, vel major $\frac{a}{2}$ ponitur, ſimul exhibere.

§. *36.* Methodo tamen §. ſuperiori adhibita habetur æquatio

$$MN = -\frac{a^2}{4} + \left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right).\,n\ \text{S. Y.} = \frac{a^2}{4} + \overline{\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right) - n}\,.\,n\ \text{S. A.},$$

quæ in limite minimo baſis variabilis, & in maximo baſis datæ in æquationem

$$MN = -\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\ \text{S. Y.} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\ \text{S. A.}$$ converſa eſt, a qua eruitur

poſitivum æquale negativo: quam tamen licet non repugnare §§. 30. & ſeqq. *Cap.* II., & conſtructione in §. ſuperiori adhibita oſtenderimus, cum quæ ſunt poſitiva in uno Syſtemate fiant negativa in altero; tamen eam facile vitari poſſe quiſque videt, dummodo ea, quam fecimus, variabilium permutatio in datas in æquatione limitis, peragatur etiam in æquatione media, ut ſit æquatio

$$MN = -\frac{a^2}{4} + \overline{\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right) + n}\,.\,n\ \text{S. Y.} = -n^2 + \left(-n - n + \frac{a}{2}\right).\frac{a}{2};$$

& facta ſignorum mutatione, ut formulæ in proprio Syſtemate poſitivæ fiant; erit

(5.ª) $MN = \frac{a^2}{4} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} - n.n$ S. A. $= n^2 + \overline{n + n} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ S. Y.: hoc modo eadem formula permutatione variabilium in datas, & viceverſa, a negativo ad poſitivum transferri poteſt, & utrique Syſtemati comparari; atque ad primum referri, quando $n < \frac{a}{2}$, ad ſecundum, ſi n a valore $\frac{a}{2}$ minimo uſque ad infinitum progrediatur. Hac ratione in utroque facta $n = \frac{a}{2}$ maxima in primo Syſtemate, minima in ſecundo; erit $MN = \frac{a^2}{4} + \frac{(a')^2}{4}$ S. A. $= \frac{(a')^2}{4} + \frac{a^2}{4}$ S. Y., quarum utraque in caſibus mediis ad utrumque Syſtema revocari poteſt, atque in utroque Syſtemate ſemper remanet poſitiva: hæ tamen æquationes non niſi in limite in prima maximo, in ſecunda minimo fiunt æquales; in ceteris caſibus prima ab n maxima $= \frac{a}{2}$ uſque ad zero decreſcit, ſecunda ab $n = 0$ minima uſque ad infinitum ſucceſſive creſcit.

§. 37. Si ab æquatione $MN = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}n + \frac{a}{2}n - n^2 = n^2 + n\frac{a}{2} + n\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}$ auferamus rectangula utrimque communia, retentis tantum quadratis, MN quæ in (5.ª) §. antecedentis erat complexus quadrati, vel rectanguli maximi una cum rectangulo medio, fit differentia quadratorum; ideoque MN in hoc caſu repræſentat quadratum, ſive $MN = M^2$, ut habeatur æquatio $M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 = n^2 - \frac{a^2}{4}$ utraque poſitive ſumpta in proprio Syſtemate, & prima æquatio $M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2$, ſive $M^2 + n^2 = \frac{a^2}{4}$ quadratica Syſtematis baſis datæ; ſecunda $M^2 + \frac{a^2}{4} = n^2$ quadratica Syſtematis baſis variabilis, uti docuimus: prima ſumenda eſt quando n intra limites 0, & $\frac{a}{2}$ vagatur; ſecunda quando n a minima $\frac{a}{2}$ uſque ad infinitum procedit. Tamen ſi hujuſmodi æquationes, ut moris eſt, identicæ fiant, invenietur $\frac{M^2}{\frac{a^2}{4} - n^2} = \frac{M^2}{n^2 - \frac{a^2}{4}}$, & $1 = -1$, vel $-1 = 1$;

$= 1$; æquatio ita vera & neceſſaria, ut hac ſublata omnis tollatur inter utrumque Syſtema communicatio. Hac igitur variabilium permutatione in datas, & viceverſa, quocumque modo efferatur formula, ſemper in proprio Syſtemate poſitiva erit. Nam ſi ab una ad alteram æquationis partem methodo communi transferantur termini, vel ſigna mutentur in formula antecedenti, ut fiat $-M^2 = -\frac{a^2}{4} + n^2$ S. A. $= -n^2 + \frac{a^2}{4}$ S. Y., M^2 eſt quidem negativum relatum ad idem Syſtema, ad quod pertinebat ante ſignorum mutationem; at oculis ipſis patet Syſtematum permutationem factam fuiſſe, ut quod erat Syſtema baſis datæ convertatur in Syſtema baſis variabilis; & contra: atque

$$-M^2 = -\frac{a^2}{4} + n^2 \text{ S. A.} = -n^2 + \frac{a^2}{4} \text{ S. Y.}$$

$$M^2 = -\frac{a^2}{4} + n^2 \text{ S. Y.} = -n^2 + \frac{a^2}{4} \text{ S. A.};$$

quo facto utraque fit poſitiva. Hiſce artificiis quæcumque formula ad utrumque Syſtema, prout res fert, amplectendum præparata ſupervacaneam reddit utramque notam S. A., S. Y., quibus Syſtemata diſtinximus: quoties enim formula ſubſtitutione valoris dati in negativam convertitur, Syſtema mutatur: atque ideo in primo Syſtemate negativa, iterum fit poſitiva, ſi ad alterum Syſtema referatur; ideoque æquatio neceſſaria $-1 = +1$ nos docet formulam, quotieſcumque in alterutro Syſtemate ſumpta fuerit negativa, referendam eſſe ad alterutrum Syſtema, in quo iterum in poſitivam convertitur.

§. 38. Ex formulis ſuperioribus §. 28. relatis ad rectangula, ſive ad limites rectilineos quadrati inſcripti, maximum in *figura* 3.ª, & ad A E, B e' &c. in *figura* 5.ª (I.ª) in limite maximo, (III.ª) in limite minimo (methodo §. ſuperiori adhibita) æquales ſunt $\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, atque ideo inter ſe: æquationes vero integræ

$$MN = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n \text{ S. A.} = nn + \overline{n + n - \frac{a}{2}}\,.\,\frac{a}{2} \text{ S. Y.}, \text{ \& in}$$

hoc limite

$$MN = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a'}{2}}.\frac{a'}{2} \text{ S. A.} = \left(\frac{a'}{2}\right)^2 + \overline{\frac{a'}{2} + \frac{a'}{2} - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2} \text{ S. Y., ſive}$$

$$MN = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} - \left(\frac{a'}{2}\right)^2 \text{S.A.} = \left(\frac{a'}{2}\right)^2 + \frac{a'}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{S.Y.}:$$

ex quibus deducitur in prima $\frac{a}{2}.\frac{a'}{2} - \left(\frac{a'}{2}\right)^2 = 0$, in ſecunda $\frac{a'}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0$: nempe in prima rectangulum maximum $\frac{a}{2}.\frac{a'}{2}$ æquale quadrato $\left(\frac{a'}{2}\right)^2$ fa-

cto maximo; in ſecunda rectangulum $\frac{a'}{2}.\frac{a}{2}$ minimum æquale quadrato dato $\left\{\frac{a}{2}\right\}^2$: ac proinde hac forma elatæ formulæ, quælibet in hoc quem diximus proprio limite æquales ſunt uni ex quadratis ſimul cum uno rectangulo, differentia alterius quadrati ab æquali altero rectangulo detracti facta zero: hac tamen lege ut in Syſtemate baſis datæ rectangulum maximum æquale ſit ſummæ quadrati dati $\frac{a^2}{4}$ cum uno rectangulo, & differentia $\frac{a}{2}.\frac{a'}{2} - \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2$ zero; contra vero in Syſtemate baſis variabilis quæ erat differentia in primo, ſit ſumma in hoc, & ſit differentia $=$ zero, quæ erat in primo ſumma. Nequeunt igitur hac forma elatæ formulæ, atque ad conſtructionem ſupradictam relatæ æquales eſſe in limite duobus rectangulis, evaneſcente quadratorum differentia. Si igitur ab utraque parte rectangula auferantur; tunc M N æquale eſt quidem duobus rectangulis, ſed inter ſe nullo vinculo conſociatis, quæ ſolitarie ſumpta æqualia inter ſe eſſe poſſunt, & vel ad idem Syſtema, vel ad diverſum ſingula pertinere: ideoque non amplius referri ad conſtructionem *figuræ* 3.ª vel 5.ᵗᵃ, neque ad quadrilatera *Cap.* I.° & II.° commemorata ea lege, quam illic innuimus, inter ſe obſtricta. Hiſce vero ſublatis relinquitur $MN = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 = \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 - \frac{a^2}{4}$, ſive M N æquale differentiæ quadratorum: ideoque in hoc caſu M N non amplius rectanguli formam retinet, ſed quadrati, quam numquam amittet, niſi naturam ſuam quadrata, quorum differentiæ æquale eſt, & ipſa relinquant. In hac igitur hypotheſi, ſublatis rectangulis, a prima conſtructione ad alteram ad diagonalem ſit tranſitus, a qua quomodo iterum ad rectangula reverti poſſit Capita ſequentia docebunt.

§. 39. Verum ſi in formula

$MN = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n.n$ S. A. $= nn + n + n - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ S. Y. ſumatur factor ſolitarius rectanguli n, vel $\frac{a}{2}$ negativus (cum Capite I.° hujus Libri promiſcue uſurpari poſſe docuerimus); tunc formulæ (I.ª), & (III.ª) convertuntur in (II.ᵃᵐ) & (IV.ᵃᵐ) §. ejuſdem 28, eſtque $MN = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\}.n$ S. A. $= n^2 - \left\{n + n - \frac{a}{2}\right\}.\frac{a}{2}$ S. Y., & in limite maximo, & minimo

$MN = \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2$ S.A. $= \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 - \frac{a'}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}.\frac{a}{2} + \left\{\frac{a}{2}\right\}^2$ S. Y.,

qua-

quarum utraque ſit zero: ſcimus tamen ex Capitibus I.° & II.° hujus Libri æquationem hanc ſummam ſignificare poſſe; ita ut in Syſtemate baſis datæ formula maximi æqualis ſit quadrato maximo in quatuor æquales partes diviſo, ſive $M^2 = \frac{4a^2}{4} = a^2$; & in Syſtemate baſis variabilis $M^2 = 4 \cdot \frac{(a')^2}{4} = (a')^2$ quadrato minimo n. Illud vero maxime intereſt animadvertere, in unaquaque limitis formula utraque Syſtemata contineri. Nam in prima Syſtematis baſis datæ

$$MN = \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 \text{ S. A. in qua } n \text{ facta fuit maxima}$$

$= \frac{a}{2}$, ſi n augeatur ſupra $\frac{a}{2}$, erit $MN = \frac{a^2}{4} - \frac{an}{2} - \frac{an}{2} + n^2$

$= n^2 + \overline{n + n - \frac{a}{2}} \cdot \frac{a}{2}$ S. Y.: in ſecunda $MN = \left\{\frac{a'}{2}\right\} - \frac{a'}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}$ S. Y., in qua n facta fuit minima $= \frac{a}{2}$; ſi iterum decreſcat, erit

$$MN = n^2 - \frac{na}{2} - \frac{na}{2} + \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 = \frac{a^2}{4} - \cdot \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \cdot n \text{ S. A.}$$

$$= (-n)^2 + (-n)\frac{a}{2} + (-n)\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \cdot - n \text{ S. A.}$$

quæ tam ſummam, quam differentiam ſignificare poſſunt. Quare denuo evidentiſſime demonſtratur quod §. 25. hujus Capitis dixi de imaginario, in quo aſſerui imaginarium ex mutata conditione zero factum in primo, in quo erat, Syſtemate, reale fieri in altero, in quo primum erat imaginarium quidem, ſed nullum: ab hiſce enim formulis limitis non poterat elegantiori, ac ſimpliciori modo veritas hæc in pleniori lumine collocari.

§. 40. Hactenus dicta eruuntur a quatuor formulis §. 28., quæ repræſentant ſummam, vel differentiam rectanguli maximi in Syſtemate baſis datæ, rectanguli minimi in Syſtemate baſis variabilis. Verum formulæ

$MN = \frac{a^2}{4} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \cdot n$ S. A. $= n^2 - \left\{n + n - \frac{a}{2}\right\} \cdot \frac{a}{2}$ S. Y. ſi ab hac machinatione ad alteram transferantur, fiantque ſolitariæ

$$MN = \frac{a^2}{4} - \frac{an}{2} - \frac{an}{2} + n^2 \text{ S. A.} = n^2 - \frac{na}{2} - \frac{na}{2} + \frac{a^2}{4} \text{ S. Y.: \& ſi}$$

in iſtis rectangula in unam ſummam colligantur coeficiente 2, ut ſit $- \frac{an}{2} - \frac{an}{2}$

=

$= -\frac{2an}{2}$, tunc neceſſario a rectangulis primæ formæ, quorum conſtructio a 3.ª vel 5.ª *figura* exhibetur, ad quadratum maximum in Syſtemate baſis datæ, & ad minimum in Syſtemate baſis variabilis tranſitum fecimus, cujus radix eſt ſumma, non differentia $\frac{a}{2} + \left\{-\frac{a'}{2}\right\}$, vel $\frac{a'}{2} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}$, & locus geometricus eſt ipſa diagonalis quadrati orti ab elevatione ad quadratum hujuſce radicis more communi peracta. Nam compoſitum hoc $MN = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\} . n$ S.A. &c. prima conſtructione repræſentat quidem eumdem valorem æquationis $\frac{a^2}{4} - \frac{2an}{2} + n^2$ &c., ſed non eamdem quantitatis naturam: in æquatione enim hujuſce formæ $MN = \frac{a^2}{4} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} . n$, facta $n = \frac{a}{2}$, fit $MN = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} . \frac{a'}{2}$, in qua rectangulum unum fit maximum, quando alterum eſt zero; quod tamen in ſecunda forma nullo modo obtineri poteſt. Duo enim illa rectangula $-\frac{an}{2} - \frac{an}{2}$ coeficiente 2 ſimul colligata debent neceſſario inter ſe ſemper æqualia eſſe, ac vel ſimul fieri maxima, vel ſimul media: at hoc obtineri nequit, niſi circa diagonalem quadrati ſumantur, ut ſuperius demonſtravimus. Quare, facta ope coeficientis 2 horum rectangulorum unione, MN naturam rectanguli nequit amplius referre, ſed neceſſario cogitur, exuta veteri, novam quadrati naturam induere, atque eſſe $MN = M^2 = \overline{\frac{a}{2} + \left\{-\frac{a'}{2}\right\}}^2$ S. A. $= \overline{\left\{\frac{a'}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}}^2$ S. Y., ſcilicet quadratum ſummæ, non differentiæ: in primo Syſtemate $\frac{a'}{2}$ nequit ſuperare valorem $\frac{a}{2}$; in ſecundo $\frac{a'}{2}$ nequit eſſe minor eodem valore $\frac{a}{2}$: atque in hoc caſu $\frac{a}{2} - \frac{a'}{2} = \frac{a'}{2} - \frac{a}{2} = 2a = +(-2a)$ ſemper additionem ſignificat. Itaque facto tranſitu ab hujuſmodi æquationibus limitis ad medias, erit

$MN = \overline{\frac{a}{2} + (-n)}^2$ S. A. $= \overline{n + \left\{-\frac{a}{2}\right\}}^2$ S. Y. Ideo autem in prima n ſigno negativo afficitur, in ſecunda afficitur $\frac{a}{2}$, quia in primo Syſtemate baſis datę

datæ cum ſit *fig.* 3.ª $\frac{a}{2} = AC = m + n = Ad + Cd$; $\frac{a}{2} + n$ nequit eſſe ſumma, niſi ſit æqualis $AC + CD$: ſed CD relata ad Cd primo ſumptam in Syſtemate eſt $= - Cd$; ergo $MM = \overline{\frac{a}{2} + (-n)}^2 = \overline{AC + (-Cd)}^2 = \overline{AC + CD}^2$. Secunda vero docemur in Syſtemate baſis variabilis tam datas, quam variabiles locum occupare prorſus oppoſitum ac in Syſtemate baſis datæ, qui hîc ſumptus eſt tamquam primus comparationis terminus: quæ enim in Syſtemate baſis datæ conſtantes $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ ſunt diverſæ a punctis A & B profectæ ſibi obviam occurrentes, & n, n identicæ ad centrum; in Syſtemate baſis variabilis contra $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ ſumendæ ſunt ut identicæ a centro C, n, n diverſæ a punctis (*fig.* 5.ª) d, D profectæ, ut diximus præcipue *Cap.* V. & VI. *Lib.* I. Nequit igitur ſic præparata formula extractione radicis nobis exhibere niſi majores variabiles utriuſque Syſtematis.

§. 41. Ad obtinendas igitur variabiles minores utriuſque Syſtematis aliam prorſus formam huic quadrato tribuamus oportet, ut obtineatur quadratum proprie dictum a variabilibus minoribus in ſe ductis conflatum. Æquationes igitur limitis (vel ſi mavis mediæ) quadrati maximi, vel minimi ſic efferantur.

$$M^2 = \frac{a^2}{4} - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2} + \left(\frac{a'}{2}\right)^2 - \left(\frac{a'}{2}\right)^2 \text{ S. A.} = \left(\frac{a'}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{a'}{2}\cdot\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \text{ S. Y:}$$
$$+ \left(\frac{a'}{2}\right)^2 \qquad\qquad + \frac{a^2}{4}$$

atque ad ſequentem formam reducantur

$$M^2 = \frac{a^2}{4} - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2} + 2\cdot\left(\frac{a'}{2}\right)^2 - \left(\frac{a'}{2}\right)^2 = \left(\frac{a'}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{a'}{2}\cdot\frac{a}{2} + 2\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$
$$= \frac{a^2}{4} - 2\cdot\overline{\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}}\cdot\frac{a'}{2} - \left(\frac{a'}{2}\right)^2 = \left(\frac{a'}{2}\right)^2 - 2\cdot\overline{\frac{a'}{2} - \frac{a}{2}}\cdot\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4};$$

a quibus mèdiæ deducuntur

$$M^2 = \frac{a^2}{4} - 2\cdot\overline{\frac{a}{2} - n}\cdot n - (n)^2 \text{ S. A.} = (n^2) - 2\cdot\overline{n - \frac{a}{2}}\cdot\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} \text{ S. Y.};$$

hoc artificio ita inter ſe connectuntur termini utriuſque formulæ, ut extractione radicis nequeant exhibere niſi variabiles homologas minores utriuſque Syſtematis, quæ vere ſubtractionem ſignificant, quæ cum ſuperioribus dant radices homolo-

gas

gas $M = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2} + n \\ \frac{a}{2} - n \end{array} \right.$ S. A. $= \left\{ \begin{array}{l} n + \frac{a}{2} \\ n - \frac{a}{2} \end{array} \right.$ S. Y. : ſed de hoc fuſius in Capite ſequenti.

§. 42. Porro ſi iſtiuſmodi quadrata variabilium homologarum utriuſque Syſtematis fiant identica, ſive ad unum, vel ad alterum Syſtema omnia referantur, facile erit cognoſcere quadrata §. antecedentis, quæ ſunt quadrata differentiarum; ſive variabilium minorum utriuſque Syſtematis ſimul comparata exhibere æquationem $1 = -1$, vel $-1 = 1$, quod ſuperius ut indicium poſuimus quandonam ab uno ad alterum Syſtema fiat tranſitus: atque eorum radices $M = \frac{a}{2} - n$ S. A. $= n - \frac{a}{2}$ S. Y. factæ identicæ in eamdem prorſus incidunt æquationem $1 = -1$. Non autem eſt ita facile cognoſcere quomodo quadratis §. 40. ortis a producto variabilium, quæ ſummam exprimunt, veritas hæc applicari poſſit, ſi veſtigia vulgaris methodi ſequamur. Nam in hoc caſu methodus nota nos docet in utroque Syſtemate eſſe

$$M^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}(-n) + \frac{a}{2}(-n) + (-n)^2 \text{ S. A.} = n^2 + n\left\{-\frac{a}{2}\right\} + n\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}^2 \text{S. Y.}$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}(n) + \frac{a}{2}(n) + (n)^2 \text{ S. A.} = n^2 + n\left\{\frac{a}{2}\right\} + n\left\{\frac{a}{2}\right\} + \left\{\frac{a}{2}\right\}^2 \text{S. Y.},$$

docetque inſuper quadrata eſſe in utroque Syſtemate poſitiva, neque in hoc caſu indicium a me exhibitum mutationis Syſtematis locum habere poſſe. Verum ſi diligentius, atque principiis in hoc Opere conſtitutis res hæc perpendatur, patebit evidentiſſime (quod mirum, ſed verum eſt!) neque in hiſce circumſtantiis indicium æquationis $1 = -1$, quod exhibui tamquam tranſmutationis Syſtematum, deficere poſſe. Nam æquationes limitis in hoc caſu a §. 40. ſuperiori exhibitæ ſunt

$$M^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}\left\{-\frac{a'}{2}\right\} + \frac{a}{2}\left\{-\frac{a'}{2}\right\} + \left\{-\frac{a'}{2}\right\}^2 \text{ S. A.}$$

$$= \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 + \frac{a'}{2}\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \frac{a'}{2}\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}^2 \text{ S. Y.}$$

ſive $M^2 = \left\{\frac{a}{2} + \left\{-\frac{a'}{2}\right\}\right\}\frac{a}{2} + \left\{\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}\right\} \cdot \left\{-\frac{a'}{2}\right\}$ S. A.

$$= \left\{\frac{a'}{2} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}\right\} \cdot \frac{a'}{2} + \left\{\frac{a'}{2} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}\right\} \cdot -\left\{\frac{a}{2}\right\} \text{ S. Y.}$$

nempe (quoniam tam $\frac{a}{2} + \left\{-\frac{a'}{2}\right\}$, quam $\frac{a'}{2} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}$ eſt ſumma)

M²

$M^2 = \left\{\frac{a}{2}+\frac{a'}{2}\right\}.\frac{a}{2}+\left\{\frac{a}{2}+\frac{a'}{2}\right\}.-\frac{a'}{2}$ S.A. $=\left\{\frac{a'}{2}+\frac{a}{2}\right\}.\frac{a'}{2}+\left\{\frac{a'}{2}+\frac{a}{2}\right\}.-\frac{a}{2}$ S.Y.; & mediæ

$M^2 = \left\{\frac{a}{2}+n\right\}.\frac{a}{2}+\left\{\frac{a}{2}+n\right\}.-n$ S. A. $=\left\{n+\frac{a}{2}\right\}.n+\left\{n+\frac{a}{2}\right\}.-\frac{a}{2}$ S. Y., ſive

$M^2 = \frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}n-\frac{a}{2}n-n^2$ S. A. $= n^2+\frac{a}{2}n-n\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}$ S. Y., ſive

$\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}n$ S. A. $=-n\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}$ S. Y.; $-\frac{a}{2}n-n^2$ S. A. $=n^2+\frac{a}{2}n$ S. Y.:
ergo ex prima 1 S. A. $=-1$ S. Y. vel contra: aut etiam ex prima
1 S. A. $=-1$ S. Y. ex ſecunda
-1 S. A. $=1$ S. Y. vel -1 S. A. $=1$ S. Y., vel 1 S. A. $=-1$ S.Y.:
ergo ſimul vel $(1-1)$ S. A. $=(-1+1)$ S. Y., vel $(-1+1)$ S.A. $=(1-1)$ S. Y.

§. 43. Quod ſi ponamus eodem ſigno poſitivo affectas tam datam $\frac{a}{2}$, quam variabilem n, ex quarum ſumma conflatur major variabilis utriuſque Syſtematis, ut ſit $M=\frac{a}{2}+n$ S. A. $=n+\frac{a}{2}$ S. Y., erunt quidem tam variabilis, quam ejus quadratum utriuſque Syſtematis ſemper poſitiva, nempe
$M^2=\frac{a^2}{4}+2.\frac{a}{2}n+n^2$ S. A. $=n^2+2.\frac{a}{2}n+\frac{a^2}{4}$ S. Y., quæ ſi ſumantur identica dant $1=1$, vel $-1=-1$, ſive poſitivum æquale poſitivo, vel negativum negativo contra legem a me ſtatutam. Verum animadvertatur ſic elatam formulam indeterminatam prorſus eſſe, & pertinere poſſe hujuſce quadrati radicem tam ad Syſtema baſis datæ, quam ad Syſtema baſis variabilis, cum $\frac{a}{2}+n$ partialis tam ſit homologa alteri partiali $\frac{a}{2}-n$ (in quas dividendum eſſe Syſtema integrum baſis datæ $m+n=a$ in Libro I. demonſtravimus) quam poſſit ipſa $n+\frac{a}{2}$ eſſe homologa alteri $n-\frac{a}{2}$, in quas loco citato Syſtema baſis variabilis diviſimus. Poſſunt eſſe igitur formulæ ambæ poſitivæ in proprio Syſtemate, vel ambæ negativæ in non ſuo, vel alterutra poſitiva aut negativa: atque ideo formula ſuperiori modo (qui eſt communis, & unus) elata ad quadratum indeterminata omnino eſt, ſed tamen indifferens ad alterutrum Syſtema ſuſcipiendum. Ut vero ambiguitas hæc tollatur, in ipſo valore ipſius variabilis majoris indicium aliquod exiſtat oportet, quo altera variabilis homologa, cui conjungenda eſt, ſe prodat, atque Syſtema, ad quod utraque per-

pertinet, patefaciat. Indicium hoc nobis præbent formulæ quadraticæ §. 40., in quibus ſi major variabilis fiat $= \frac{a}{2} + (-n)$; hæc licet revera ſignificet ſummam, tamen alteram variabilem, ac Syſtema, cui competit, aperte declarat: docet enim $+ (-n)$ pertinere ad Syſtema partiale baſis datæ $\frac{a}{2} = m + n$, in quo n nequit eſſe major $\frac{a}{2}$, & ex quo, retentis iiſdem variabilibus, non poteſt obtineri altera variabilis Syſtematis partialis baſis variabilis major ipſa baſi, niſi n, vel m accipiatur in directione contraria ſui Syſtematis: at $n + (-\frac{a}{2})$ licet valore æqualis ſit $\frac{a}{2} + (-n)$; tamen ſignificat pertinere ad Syſtema baſis variabilis, in quo n minima $= \frac{a}{2}$, maxima infinita, cui reſpondet altera homologa $n - \frac{a}{2}$. Hinc deducitur neceſſitas illius transformationis, qua mutata natura, non valore quantitatis erui poſſit altera variabilis, atque ex hac Syſtema integrum, ad quod ſimul pertinent, & a quo fuerunt, aut ſupponuntur avulſæ. Ceterum ſi formula $M^2 = \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}n + n^2$ ſe exhibeat indeterminatam; hac alia ratione poterit ad utrumque Syſtema determinari: nimirum ſi fiat

$$M^2 = \frac{a^2}{4} + 2\,\frac{a}{2}\,n + n^2 \text{ S. A.} = n^2 + 2\,n\,\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} \text{ S. Y.},$$ atque

$$M^2 = \left\{\frac{a}{2} + n\right\}.\frac{a}{2} + \left\{\frac{a}{2} + n\right\}.n \text{ S.A.} = \left\{n + \frac{a}{2}\right\}.n + \left\{n + \frac{a}{2}\right\}.\frac{a}{2} \text{ S.Y.}:$$

ſed in primo Syſtemate baſis datæ $\frac{a}{2} - n = m$, in ſecundo Syſtemate baſis variabilis $n - \frac{a}{2} = m$: ergo ſubſtituto pro n ejus reſpectivo valore dato per m; erit

$$M^2 = \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m\right\}.\frac{a}{2} + \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m\right\}.n \text{ S. A.}$$
$$= \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + m\right\}.n + \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + m\right\}.\frac{a}{2} \text{ S. Y.}; \;\&$$

$$M^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - m\,\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\,n + \frac{a}{2}\,n - m\,n \text{ S. A.}$$
$$= \frac{a}{2}\,n + \frac{a}{2}\,n + mn + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + m\,\frac{a}{2} \text{ S. Y.};$$

quæ

quæ tamen, ſi ſumantur identicæ, ſe ſe offert æquatio $-1 = 1$, vel $1 = -1$. Quoties igitur una eademque formula artificiis analyticis varie diſpoſita, ac modificata, nec non valoris variabilium determinatione ex poſitiva tranſit in negativam, ideoque & ipſa, & ejus radix in eo, quo primum ſumpta fuerat Syſtemate fit imaginaria; toties ſine erroris periculo univerſim ſtatuendum eſt, fieri quidem imaginariam, ſive nullam (ut diximus §. 25.) in primo Syſtemate, ſed excipiendam eſſe ab altero, in quo primum imaginaria, ſive nulla, quanta ſit, & realis. Sed hæc diligentius alio in loco perſequemur.

§. 44. Nunc huic Capiti finem imponam exacte determinando (quod ſæpe ac ſæpius tam in Opuſculis meis editis, quam in hoc Opere innui) quid ſcilicet revera, & univerſim ſignificet ſignum hoc $=$, quo duo æquationis membra inter ſe conjunguntur, quod ſemper tamquam indicium æqualitatis atque identitatis ab Analyſtis male hactenus conſtitutum fuit. Nam ex dictis luce clarius patet, ſignum hoc univerſim nihil aliud ſignificare niſi vinculum illud, quo ſimul copulantur formulæ illæ, quas ab una eademque formula varie diſpoſita, ac præparata, opportuniſque ſubſtitutionibus in aliam mutata formam profectas, non eamdem ſemper naturam, ac valorem illius, a qua manarunt, ſervare, invictiſſime atque evidentiſſime in toto hoc Opere demonſtraſſe arbitror. Munus itaque primum atque generalius huic ſigno $=$ ab Analyſi demandatum illud eſt, ut diverſa Syſtemata indigitet, ac ſimul complectatur, ad quæ una eademque formula pro diverſis limitibus, intra quos valor fluentis concludi poteſt, neceſſario pertinet. Hæc autem notio huic ſigno $=$ affigenda eſt, quoties repetitione ejuſdem formulæ ſigno $=$ copulatæ ejus tollitur identitas variabilium permutatione in datas; & viceverſa. Ita vidimus membra æquationis $\frac{a^2}{4} + 2\,\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2 = n^2 + 2.n\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)^2$ non eſſe identica, ſed inverſa terminorum poſitione ad alteram ſigni $=$ partem, primam, quæ pertinebat ad Syſtema baſis datæ (n intra limites zero minimum, $\frac{a}{2}$ maximum conſtituta), converſam fuiſſe in ſecundam, quæ pertinet ad Syſtema baſis variabilis, in quo n a limite minimo $\frac{a}{2}$ uſque ad infinitum expatiatur: ita $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$ S.A. $= \overline{n + n - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2}$ S.Y. &c. Qua tamen facta permutatione, ſi (ut vulgo fit) ponantur identicæ quæ ſunt diverſæ, & utræque ſimul in uno aut altero Syſtemate per vim affigantur, tunc facta diviſione neceſſario impingitur in æquationem illam $1 = -1$, vel $-1 = 1$, quæ (ut diximus) neceſſaria eſt, & recte intellecta tutum nobis præbet ſubſidium, quo a Syſtemate proprio mutatis limitibus facto imaginario (ſed tamen nullo) ad Syſtema novæ conditioni aptum, atque ideo reale factum elegantiſſime tranſitus reperiatur. Videant igitur utrum in me, meaque, an in ſe ipſos, inque univerſam Analyſim quam habent, quamque ſe tueri prædicant, legem

ſanciverint iniquam qui hac una conſecutione perterriti quicquid protuli, quod ad hanc neceſſario ducebat, perpetua petitione principii dictatoria ſententia proſcripſerunt: me fruſtra reclamante non eſſe repudianda quæ neceſſario a principiis generalibus omnium conſenſu probatis conſequuntur, niſi prius aut principia ipſa, aut ſuſcepta via invictiſſima demonſtratione falſitatis evincantur; ſed non intermiſſo labore quærendam, aut patienter expectandam methodum, quæ nos ab hiſce ambagibus tandem aliquando expediat.

§. 45. Ex hoc & alterum conſequitur officium huic ſigno $=$ ab analyticis placitis neceſſario conſtitutum, quo eadem formula in eodem ſemper, in quo primum ſumpta fuerat Syſtemate ſervata, ab uno ad alterum valorem, ab una ad alteram naturam transferri poteſt. Quemadmodum enim vidimus §. 41. quadratum ſummæ $\overline{\frac{a}{2} + (-n)}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{2a}{2}(-n) + (-n)^2$ additione & ſubtractione $+(-n)^2 - (-n)^2$, ſive unius zero additione mutari in quadratum differentiæ $\frac{a^2}{4} - 2 \cdot \overline{\frac{a}{2} - n} . n - n^2 = \overline{\frac{a}{2} - n}^2$, quod ejuſdem quidem naturæ, ſed valore toto cœlo a primo diverſum; ita hoc ſigno neceſſario connectuntur formulæ illæ, quas homologas appellavi, quippe quæ ſimul concurrunt ad Syſtema propoſitum conſtituendum. Hinc in utraque ſigni $=$ parte ſervata in formulis eadem naturæ ſimilitudine, ipſę tamen valorem diverſum induunt, & ita diverſum ut una fiat maxima, altera minima, ſive zero in Syſtemate baſis datæ; ambæ ſimul minimæ, vel ſimul maximæ in Syſtemate baſis variabilis, ſemper tamen data quantitate inter ſe inæquales, quas quidem veras eſſe, ac neceſſarias in Capp. ſuperioribus demonſtravimus. Verum ita tractata formula a quadrato variabilis unius majoris ad quadratum minoris, & viceverſa in utroque Syſtemate fit tranſitus: ideoque tam radix quadrati majoris, quam minoris ſimul ſumendæ ſunt ad unum, vel alterum Syſtema conſtituendum. Quod ſi utraque formula ſuperior quadratica a vinculo coeficientis 2, quo ipſius rectangula colligantur, liberetur, atque ipſius omnes termini ſolitarii ſumantur; tunc non ſolum valore, ſed natura etiam mutata a quadrato ſummæ, vel differentiæ ad rectangula transferri poſſe §. 40. innuimus. Hinc quæ formula naturam quadrati referebat, atque unam tantum ex variabilibus Syſtematis partialis continebat, alio modo §. eodem 40. indicato præparata conſtat duabus variabilibus homologis diverſis, quæ in ſe ductæ productum conſtituunt duorum factorum æqualium, vel inæqualium, ſed ſemper diverſorum, ſive proprie dictum rectangulum, cujus conſtructionem a *figura* 3.ª vel a 5.ª exhiberi oſtendimus, ac loca geometrica, ad quæ pertinet, limites rectilineos ſecundæ dimenſionis appellavimus.

§. 46. Ab hiſce iterum ope legitimæ ſubſtitutionis ad Syſtemata quadratica ad diagonalem, & ab iſtis quadraticis rurſus ad rectangula facilem patere aditum ſuperioribus Capitibus indicavimus, & ſequentibus fuſius oſtendemus. Quare tan-

tantum abeſt ut ſignum hoc = ſemper æqualitatem inter duo membra, intra quæ interjacet, ſignificet; ut ſemper ſubintelligendam eſſe diximus §. 30. aliam quantitatem M M valore & natura indeterminatam, quæ ſingulis iſtis formulis ex prima comparationis formula varie transformata profectis æqualis ponenda eſt, ut intelligatur quandonam, & quomodo diverſum Syſtema modo, modo diverſus valor, diverſa natura modo, modo omnia hæc, modo ſingula mutari poſſint. Quamobrem quiſque nunc facile videt non ita a veritate abhorrere (ut creditum fuit) quæ demonſtravi in Opuſculis meis Memoria præcipue III.ª §§. 29. & & ſeqq. & quæ *Cap.* I. §. 2. *Libri* II. indicavi, unam ſcilicet eamdemque æquationem ſecundæ dimenſionis varia radicum paria habere poſſe (quæ etiam infinita eſſe poſſe ſuo loco oſtendam) dummodo illę, quas diximus homologas inter ſe conjungantur, & illi ad quam pertinent transformationi primæ formulæ legitime applicentur.

§. 47. Quemadmodum autem ab una eademque formula, varia ipſius transformatione, atque legitima æqualis pro æquali ſubſtitutione tot inde oriri poſſunt diverſæ formulæ, quas ſupra innuimus; ita ab iſtis ſingulis diverſis iterum ad primam, vel univerſim ab omnibus ad ſingula regredi licet, ut quæ erat identica in plures diverſas, & quæ erant diverſæ in unam, vel alteram identicam convertantur: primo modo ſignum = conſiderari debet tamquam vinculum illud, quo homologæ formulæ connectuntur ortæ a varia, ac multiplici forma, quam una eademque formula ſubire poteſt: ſecundo vero modo ſignum hoc = non niſi æqualitatem, aut ſi velis identitatem ſignificare poteſt. Porro Analyſis communis, hac ſecunda tantum æqualitatis notione anguſta nimis ac limitata ſigno huic = affixa, ignorat adhuc, atque repudiat verbo notionem univerſaliorem, quæ huic ſigno tribuenda eſt, ignorata prorſus illa a me indicata transformationis methodo; quam tamen (quis crederet?) in calculo artificiis, quæ docet, perpetuo ac neceſſario in uſum neſcia traducere cogitur: ſine qua certe a quadrato, vel cubo primum poſito ad rectangulum, vel productum trium inæqualium radicum ope ſubſtitutionis poſſet pervenire. Hinc manifeſta ſe ratio prodit, cur, quibus mea quocumque modo impugnare potius, quam libera & attentiori mente Analyſeos vim atque naturam inveſtigare cordi fuit, cur inquam violento quodam modo quæ a me legitime transformata fuerant ita artificiis analyticis detorquerent, ut ad primam æqualitatis & identitatis originem omnia iterum revocarent: ad quam cum legitime perveniſſent, mea, atque methodum a me adhibitam precario falſitatis inſimularunt; minime reputantes ex una eademque formula tamquam ex uno veluti fonte plures manare poſſe veritatum rivulos, qui quo magis progrediuntur, eo magis inter ſe divergunt. Hinc factum fuit, ut qui conjunctis primum viribus claſſicum contra me cecinere, in diverſa ſinguli tandem diſtracti ſua quiſque hoc errore ducti tantum vera putarent, atque in ſe ipſos demum arma converterent andabatarum more pugnantes.

CAPUT IV.

Primæ, quæ ex ſuperioribus principiis manant, conſecutiones traduntur.

§. 1. EX hiſce novis atque fœcundiſſimis principiis tot ac tantæ in Analyſi profluunt veritates, ut cogar hîc tantum primas ac præcipuas elementaribus Analyſeos operationibus neceſſarias evolvere, ceteras in altera huiuſce *Tomi* I. Parte enodandas reſervare. Etenim eo tandem rem deduximus, ut nobis liceat conſecutiones præcipuas, quæ ex horum Syſtematum comparatione deſcendunt, diligentius perſequi, & primam omnium veritatum, quas ſupra invenimus originem, nec non graviſſima impedimenta, quæ hactenus communis Analyſis offendit, evidentiſſime patefacere, ac tollere: ac demum abſolutiſſimam omnium æquationum ſecundæ dimenſionis ſolutionem nulla imaginarii labe contaminatam univerſim exhibere. Ut id ordine, & perſpicue fiat, ſequentes æquationes, quas ab una tantum formula varie modificata proficiſci ſuperius demonſtravimus, ſunt præmittendæ, ut ex hiſce conſecutiones generales facilius eruere liceat, atque oculis ipſis ſubjicere. Has in duas Claſſes diſtribuo: quæ notantur numeris *Romanis* pertinent ad Syſtema baſis datæ; quæ *Arabicis* ſunt Syſtematis baſis variabilis. Hæ tamen omnes ab una eademque æquatione $M^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{2an}{2} + n^2$ profectæ utraque Syſtemata partialia tam quadratica, quam rectangula utriuſque Syſtematis, in quę dividitur, & a quibus conflatur quodcumque totale Syſtema ſecundæ dimenſionis tam baſis datæ, quam variabilis comprehendunt. Primum membrum uno tantum termino ſolitario conflatum ſuppono quadratum $= M^2$: quia initio comparatur tam in uno, quam in altero Syſtemate cum quadrato revera tali; ideoque M^2 vere quadratum, ſive $M^2 = \frac{a^2}{4} + 2 \cdot \frac{an}{2} + n^2$ $= \left(\frac{a}{2} + n\right)^2$.

§. 2. Æquationes igitur ſupradictæ ex demonſtratis erunt ſequentes

TABULA

$M^2 =$

I.ª $\frac{a^2}{4} + \frac{2an}{2} + n^2$	$=$ II.ª $\frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2} - n}.n - n^2$	$=$ III.ª $\frac{a^2}{4} + \frac{2a}{2}(-n) + (-n)^2$	$=$ IV.ª $\frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2} - (-n)}.(-n) - (-n)^2$
V.ª $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.n$	$=$ VI.ª $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} -.\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$	$=$ VII.ª $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + m}.m$	$=$ VIII.ª $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} -.\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m$
IX.ª $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2} + m\right).\left(m - \frac{a}{2}\right)$	$=$ X.ª $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} + m\right).\left(\frac{a}{2} - m\right)$	$=$ XI.ª $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2} + n\right).\left(n - \frac{a}{2}\right)$	$=$ XII.ª $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} + n\right).\left(\frac{a}{2} - n\right)$
XIII.ª $\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + m^2$	$=$ XIV.ª $\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - m^2\right)$	$=$ XV.ª $\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + n^2$	$=$ XVI.ª $\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - n^2\right)$
XVII.ª $\frac{a^2}{4} - n^2$	$=$ XVIII.ª $\overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}}.\overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}}$	$=$ XIX.ª $\frac{a^2}{4} - m^2$	$=$ XX.ª $\overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - n^2}}.\overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - n^2}}$
XXI.ª $\left(\frac{a}{2} + n\right).\left(\frac{a}{2} - n\right)$	$=$ XXII.ª $\overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}}.\overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}}$	$=$ XXIII.ª $\left(\frac{a}{2} + m\right).\left(\frac{a}{2} - m\right)$	$=$ XXIV.ª $\overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - n^2}}.\overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - n^2}}$
XXV.ª $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m$	$=$ XXVI.ª $\overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}}.\overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}}$	$=$ XXVII.ª $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.n$	$=$ XXVIII.ª $\overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - n^2}}.\overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - n^2}}$
XXIX.ª $m.\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}$	$=$ XXX.ª $\overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}}.\overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}}$	$=$ XXXI.ª $n.\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}$	$=$ XXXII.ª $\overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - n^2}}.\overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - n^2}}$
1 $n^2 + 2n\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}$	$=$ 2 $n^2 - 2.\overline{n - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}$	$=$ 3 $n^2 + 2n\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)^2$	$=$ 4 $n^2 - 2.\overline{n - \left(-\frac{a}{2}\right)}.\left(-\frac{a}{2}\right) - \left(-\frac{a}{2}\right)^2$
5 $n^2 + \overline{n + n + \frac{a}{2}}.\frac{a}{2}$	$=$ 6 $n^2 -.\overline{n + n - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2}$	$=$ 7 $m^2 + \overline{m + m + \frac{a}{2}}.\frac{a}{2}$	$=$ 8 $m^2 -.\overline{m + m - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2}$
9 $n^2 + (m + n).(m - n)$	$=$ 10 $n^2 -.(n + m).(n - m)$	$=$ 11 $m^2 + (n + m).(n - m)$	$=$ 12 $m^2 - (m + n).(m - n)$
13 $n^2 + m^2 - n^2$	$=$ 14 $n^2 - (n^2 - m^2)$	$=$ 15 $m^2 + n^2 - m^2$	$=$ 16 $m^2 - (m^2 - n^2)$
17 $n^2 + \frac{a^2}{4}$	$=$ 18 $n^2 - \frac{a^2}{4}$	$=$ 19 $m^2 + \frac{a^2}{4}$	$=$ 20 $m^2 - \frac{a^2}{4}$
21 $m^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$	$=$ 22 $n^2 - \frac{a^2}{4}$	$=$ 23 $n^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$	$=$ 24 $m^2 - \frac{a^2}{4}$
25 $\overline{\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}}.\overline{\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}}$	$=$ 26 $\left(n + \frac{a}{2}\right).\left(n - \frac{a}{2}\right)$	$=$ 27 $\overline{\sqrt{n^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}}.\overline{\sqrt{n^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}}$	$=$ 28 $\left(m + \frac{a}{2}\right).\left(m - \frac{a}{2}\right)$
29 $\overline{\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}}.\overline{\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}}$	$=$ 30 $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + m}.m$	$=$ 31 $\overline{\sqrt{n^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}}.\overline{\sqrt{n^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}}$	$=$ 32 $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n}.n$

§. 3. Æquatio I.ª eſt quadratum, cujus latus, ſive radix eſt major variabilis $= \frac{a}{2} + n = n + \frac{a}{2}$ indeterminata ad utrumque Syſtema, quæ ut ad Syſtema baſis datæ determinetur fiat $= \frac{a}{2} + (-n)$, ut diximus §. 43. Cap. ſuperioris: ex II.ª enim colligitur n intra limites zero minimum, & $\frac{a}{2}$ maximum contineri oportere; cum II.ª vera eſſe nequeat, niſi $\frac{a}{2}$ major ſit n. Quare facta n maxima $= \frac{a}{2}$, I.ª dat quadratum maximum $M^2 = \overline{\frac{a}{2} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}}^2 = \frac{4a^2}{4} = a^2$, intra cujus latera affectiones omnes geometricę ab aliis æquationibus indicatæ concluduntur; ideoque ſunt limites maximi rectilinei Syſtematis ſecundæ dimenſionis baſis datæ. Erit igitur (*Tab.* VI. *fig.* 18.) $M = \frac{a}{2} + n$, & facta $I'N' = \frac{a}{2}$, $N'K = n$, $M = \frac{a}{2} + n = I'N' + N'K$: ſed M^2 ex dictis debet etiam æquale eſſe II.ª: ergo MM dat tam quadratum I′K majoris variabilis, quam quadratum minoris KL′, quæ latera ſive radices ut unam rectam continuam conſtituant, & ſimul copulari poſſint, neceſſe eſt ut prima $M = \frac{a}{2} + n = PR + RI$, & altera $M = \frac{a}{2} - n = QR - RI$: quadratum enim I.ª in hac conſtructione non ſuper I′K, ſed ſuper æquali PI revera conſtitutum eſt; ideoque latus quadrati minoris variabilis non KL′, ſed ejus æquale IQ ſumendum eſt, ut indicentur quadrata non æqualia, nec identica ſed inæqualia PM, IL′, quæ ex hac conſtructione oriuntur, manente ſemper in eadem linea utraque radice, ut ſimul ſumptæ eamdem ſummam $PI + IQ = a$ conſervent, atque lineam unam ſemper conſtituant. Erit itaque $M = \frac{a}{2} + n = PR + RI$, & $M = QR - RI = \frac{a}{2} - n$, earumque ſumma $M + M = \frac{a}{2} + n + \frac{a}{2} - n = m + n = PR + RI + QR - RI = \frac{a}{2} + n = \frac{a}{2} - n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = m + m = PR + QR = a = PQ = m$ (ex *Cap.* V. *Libri* I.). Prima M conſtituit

tuit Syſtema partiale baſis variabilis $= \frac{a}{2} + n$; ſecunda Syſtema partiale baſis datæ $M = \frac{a}{2} - n$, in quæ dividitur, vel ex quibus conflatur Syſtema integrum baſis datæ $m + n = a$, ut ex eodem *Capite* conſtat. Quod ſi methodo communi reducatur II.ª, oritur III.ª, quam ſic elatam ſignificare vidimus Capite ſuperiori non differentiam, ſed ſummam in Syſtemate baſis datæ, ejuſque radicem eſſe $\frac{a}{2} + (-n) = \frac{a}{2} + n$, ſive $= QR + (-RI)$, ſed $-RI = RI'$; ergo $\frac{a}{2} + (-n) = QR + (-RI) = QR + RI'$; & ex IV.ª $\frac{a}{2} - (-n) = PR - (-RI) = PR - RI'$: quo facto quæ erat major fit minor, & viceverſa; ſive fit variabilium permutatio, & $M + M = n + m = QR + RI' + PR - RI' = QR + PR = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = n + n = a = n = QP$; ut in toto *Libro* I. oſtendimus.

§. 4. Quare ex III.ª quę eſt I.ª determinata ad hoc Syſtema $M = m = PI = \frac{a}{2} + n$; ex II.ª $M = n = QI = \frac{a}{2} - n$: ideoque III.ª hîc dat quadratum $m^2 = \overline{PI}^2 = Il$, II.ª n^2 æquatur $\overline{QI}^2 = IL'$, ex quibus deducitur M^2 repræſentare poſſe tam quadratum Syſtematis partialis linearis baſis variabilis $\frac{a}{2} + n$, quam alterius baſis datæ $\frac{a}{2} - n$ pro diverſo modo, quo ordinatur æquatio. Hujuſmodi igitur æquationes ſimul ſumptæ non niſi quadrata Il, IL' variabilium m, n Syſtematis totalis baſis datæ $m + n = a$ indicant, omiſſis prorſus rectangulis Il', IL quadrati integri $L'l = a^2$, quæ ſemper inter ſe æqualia ſunt, quocumque modo intra limites conſtitutos mutetur valor ipſius n: contra vero quadrata (excepto caſu in quo $n = 0$) ſemper differunt inter ſe. Itaque hujuſmodi quadrata hac lege in Syſtemate hoc procedunt, ut facta $n = \frac{a}{2}$, ſit $m = l'N' + N'L' = l'L' = \frac{2a}{2} = a$, maxima; & quadratum maximum $m^2 = \frac{4a^2}{4} = \overline{l'L'}^2$, & $n = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = 0 = L'$, & $n^2 = (0)^2 = (L')^2$, minimum:

mum : decreſcente n, & facta $=$ N'K decreſcit quadratum $m^2 = \overline{PI}^2$, augeturque $n^2 = \overline{IQ}^2$; donec facta $n = 0$ quadrata æqualia fiunt inter ſe, fitque $m^2 = \overline{AC}^2 = Cl$, $n^2 = \overline{BC}^2 = CL'$ æqualia, ſed non identica : creſcente rurſus n ex parte oppoſita, quadratum $M^2 = n^2$ quod erat $= \frac{a^2}{4} - 2.\frac{a}{2} - n.n - n^2$ fit $= \frac{a^2}{4} + \frac{2a}{2}(-n) + (-n)^2$; quæ eſt æquatio III.ª $= \overline{\frac{a}{2} + (-n)}^2 = \overline{Q'R' + R'K''}^2$, & viceverſa $M^2 = m^2 = \overline{P'R' - R'K''}^2 = \overline{\frac{a}{2} - (-n)}^2 = \frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2} - (-n)}.(-n) - (-n)^2$ IV.ª, quæ ſi reducatur, ut moris eſt, fit $\frac{a^2}{4} + \frac{2a}{2}n + n^2$, ſive iterum recidit in I.ªm indeterminatam ad utrumque Syſtema. In noſtro tamen caſu tunc fit maxima $n = LN$, & $n^2 = \overline{LN}^2$, & M minima $= 0 = l$, ejuſque quadratum totum evaneſcit in puncto l, fitque $M^2 = (0)^2 = (l)^2$. Quid igitur mirum ſi in noſtra *Tabula* inveniatur $M^2 = \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}n + n^2 = \frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2} - n}.n - n^2 =$ &c., cum hujuſmodi æquationes tam arcto vinculo inter ſe ſint colligatæ, ut data una altera neceſſario ſequatur oporteat? ideoque non identicæ, neque æquales, ſed homologæ a me jure appellantur, ſignumque $=$, quod male æqualitatis dicitur, non niſi vinculum illud a me appellatum, quo æquationes inter ſe homologæ uniuntur : quia una ſine altera nequit exiſtere. Hoc intellecto tollitur omnino repugnantia, quam præſefert æquatio $M^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{2an}{2} + n^2 = \frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2} - n}.n - n^2 =$ &c., in qua, facta $n = \frac{a}{2}$, eſt $M^2 = \frac{a^2}{4} + 2.\frac{a}{2}.\frac{a'}{2} + \frac{(a')^2}{4} = 4.\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}}.\frac{a'}{2} - \frac{(a')^2}{4} = (0)^2$, cum oſtenderimus in hoc caſu quadrato maximo minimum neceſſario reſpondere, eſſeque $M^2 = \overline{l'L'}^2 = (L')^2$, vel $= (l)^2 = \overline{Ll}^2$. Quin imo ex hac Theoria maximus, in quem toties inciditur, error detegitur, quoties aut ſigno $=$ conjungitur maximum cum minimo (quo

in caſu ex prava quæ de hoc ſigno notio habetur, quod eſt quantum & etiam maximum, male creditur evaneſcere, fierique zero), aut univerſim quoties artificiis analyticis transformata formula, ea ſimul hoc ſigno inter ſe copulamus, quæ non identica, vel æqualia, uti hactenus creditum eſt, ſed homologa tantum eſſe ſatis ſuperius oſtendi.

§. 5. Sed quoniam (*fig. ead.* 18.) $PQ = KM$, & $PI = IM$, $IQ = IK$; quæ diximus reſpectu PQ, evaneſcente IK, applicentur MK: & facta $IK = 0$ fit $M = M + 0 = LL'$, & quadrata quæ, puncto communi I variabili, ſe contingebant in diagonali $L'l$, referri poſſunt ad alteram diagonalem Ll': atque eodem ratiocinio minima quadrata in punctis L, & l' evaneſcere comperies, in quibus quadrata quadratis zero homologa fiunt maxima. Quare cum quodcumque latus quadrati repræſentare poſſit radicem quadrati, ſive cum ſuper unoquoque latere erigi poſſit quadratum; radix ipſa directionem, & poſitionem cujuslibet lateris aſſumit, qua mutatione mutatur & poſitio quadratorum in caſibus intermediis. Hinc quadrata in limite homologa quadratis zero erunt

$$M^2 = (l')^2,\ M^2 = (L'l')^2 = (ll')^2, \text{ \& in caſibus mediis}$$
$$M^2 = (PI')^2,\ M^2 = (QI')^2, \text{ vel } M^2 = (K'I')^2,\ M^2 = (Q''I')^2$$
$$M^2 = (L')^2,\ M^2 = (LL')^2 = (l'L')^2, \text{ \& in caſibus mediis}$$
$$M^2 = (KI)^2,\ M^2 = (MI)^2, \text{ vel } M^2 = (QI)^2,\ M^2 = (PI)^2$$
$$M^2 = (L)^2,\ M^2 = (lL)^2 = (L'L)^2, \text{ \& in caſibus mediis}$$
$$M^2 = (Q'K''')^2,\ M^2 = (P'K''')^2; \text{ vel } M^2 = (MK''')^2,\ M^2 = (KK''')^2$$
$$M^2 = (l)^2,\ M^2 = (l'l)^2 = (Ll)^2, \text{ \& in caſibus mediis}$$
$$M^2 = (K'I')^2,\ M^2 = (Q''I')^2; \text{ vel } M^2 = (P'K'')^2,\ M^2 = (Q'K'')^2:$$

omnia vero horum homologorum quadratorum paria ita inter ſe ad diagonalem copulantur, ut unum ſit in directione prorſus oppoſita alterius, & creſcente uno alterum decreſcat. Verum cum quodlibet quadratum maximum ex. gr. ſuper lL erigi poſſit etiam in parte oppoſita, in qua nunc eſt; patet quot & quibus modis ex hac conſtructione mutari poſſit directio, ac poſitio cujuſcumque quadrati cum ſuo homologo, eorumque radicum, quin ullam in quantitate radix ipſa ſive latus ſubeat mutationem. Itaque illud conſequitur, quod in *Cap.* I. *Lib.* I. innuimus, quamcumque lineam ſcilicet directionem, ac poſitionem mutare poſſe, quin mutet quantitatem: ideoque Definit. III. §. *16.* ejuſdem Capitis diximus caute diſtinguendam eſſe viam a quantitate percurſam ab ejus fluxu: tamen in Analyſi methodus ad hoc tuto obtinendum adhuc deeſt, quam nomine *Circulationis* deſignavi ſuo loco explicandam.

§. *6.* Hîc illud tantum animadverto, ex quadratis, quæ a quatuor primis æquationibus noſtræ *Tabulæ* indicantur, licet quæ homologa ſunt circa diagonalem poſita contrariam prorſus in utraque dimenſione directionem invicem teneant; tamen utraque Analyſtarum omnium conſenſu ſigno poſitivo affici, neque vocato poſitivo $(PI)^2 = Il$, alterum $(IQ)^2 = IL'$ dici negativum: non video igitur cur ſi veræ ſunt quæ de lineis univerſim ſanciuntur leges, iiſdem &

qua-

quadrata non ſubjiciantur? Profecto quemadmodum in toto I.° Libro ab alia prorſus cauſſa, quam quæ vulgo creditur, eruimus Canones, qui linearum poſitionem, & ſigna + —, quæ iis præfiguntur, in utroque Syſtemate moderantur, ita leges, quibus regitur quadratorum & rectangulorum œconomia in utroque tam integro, quam partiali Syſtemate ſecundæ dimenſionis tum quadratico, cum rectangulari ab alio prorſus fonte hauriendas eſſe, quæ diximus in hoc Libro, quæque dicemus ſatis aperte declarabunt. Ac primum ex §. ſuperiori conſtat radices cujuſcumque quadrati in unoquoque quadrato non eſſe tantum duas æquales (ut vulgo fit), & diverſo ſigno affectas; ſed, methodo communi accepta, revera eſſe octo æquales, ſed non identicas: quæ æquales ſunt quatuor lateribus cujuſcumque quadrati, ſingulis ſigno $\pm$ affectis: quibus directio, & poſitio radicum mutatur. Sed, quod caput eſt, cum ex noſtra *Tabula* pateat quodcumque quadratum a quatuor primis formulis ita comprehendi, ut una admiſſa neceſſario ceteræ ſimul exiſtant; nulla umquam horum quadratorum radix ſolitaria ſumenda eſt, neque a ſuis homologis ſeparanda. Itaque radices cujuſcumque quadrati erunt in Syſtemate baſis datæ

I.ª II.ª III.ª IV.ª

$M = \frac{a}{2} + n = \frac{a}{2} - n = \frac{a}{2} + (-n) = \frac{a}{2} - (-n)$; ſive in noſtra figura

$= PR + RI = QR - RI = QR + RI' = PR - RI'$: quæ ſunt quatuor in hoc Syſtemate (omiſſis æqualibus, ſed non identicis): quæ ſimul ſumptæ limites maximos ac minimos oſtendunt, intra quos in hoc Syſtemate comprehendi debent. Nam licet ex I.ª n creſcere poſſit ad infinitum, tamen a ſua homologa II.ª determinatur intra limites $R = 0$, & $RQ = \frac{a}{2}$: ideoque radices homologæ ſunt PI, QI; vel ex III.ª addita IV.ª QI', PI'; quæ cum primis nullo modo confundi poſſunt: ut enim ſint homologæ, non ſatis eſt ut ſimul ſumptæ ſummam datam in ſymbolis $\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)$ ſervent, ſed illæ ſumendæ ſunt, quæ invicem in eadem linea obviam ſibi occurrunt. Quare PI, PI', vel QI, QI' licet abſtractæ ſumptæ æquales videantur $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; tamen non ſunt homologæ in eadem noſtra *figura* 18.: quin imo ſibi invicem ſuperimponuntur, nec niſi lineam PI vel QI' conſtituunt.

§. 7. Ex quo & illud non levioris momenti eruitur, quod ſcilicet nulla vera ratione nixi Analyſtæ, ſed caſu, vel anticipata opinione radici cujuſcumque quadrati præfixerint ſignum $\pm$, cum potius radices omnes erant ſigno poſitivo afficiendæ, & illæ ſimul ſumendæ, quæ, prout Syſtema requirit, homologæ inveniuntur. Signum itaque $\pm$ in hoc Syſtemate baſis datæ non eſt præfigendum

quantitati datæ $\frac{a}{2}$, quæ ſumenda eſt diverſa in unaquaque homologa radice, ſed variabili n, quam ſcimus eſſe identicam; ita ut veræ radices quadrati M^2 in hoc Syſtemate baſis datæ ſint $M = \frac{a}{2} \pm n = \frac{a}{2} \pm (-n)$: quæ docent radicem quadrati M^2 eſſe vel $\begin{matrix} PI, QI \\ \text{vel } QI', PI' \end{matrix}$, ſcilicet ſummam vel differentiam datæ cum variabili, prout formula in I.^{am}, vel II.^{am} formam conformatur: quæcumque tamen prima ſumatur, altera neceſſario ſumenda eſt; cum ita inter ſe neceſſario vinculo conſocientur, ut una admiſſa, altera oriatur oporteat. Ita res ſe habet in Syſtemate baſis datæ: at in Syſtemate baſis variabilis, in quo ex æquatione (2.^{a}) conſtat valorem minimum n æqualem eſſe $\frac{a}{2}$, contrario prorſus modo negotium procedit. Nam in hoc Syſtemate ſemper n major eſt $\frac{a}{2}$, nec nonniſi in limite minimo $= \frac{a}{2}$: ergo radices, quæ conveniunt quatuor primis æquationibus hujuſce Syſtematis, erunt $M = n \pm \frac{a}{2} = n \pm \left(-\frac{a}{2}\right)$, ut inferius clare oſtendam. In Syſtemate itaque hoc variabiles ſigno poſitivo ſunt afficiendæ, datæ vero $\frac{a}{2}$ ſigno ambiguo $\pm$ notandæ: ut intelligatur variabiles in hoc Syſtemate æquales quidem eſſe, ſed non identicas, atque ex duobus punctis diverſis profectas ſibi obviam occurrere; datas vero ab eodem puncto medio ortas identicas eſſe, atque alteram ſigno $+$, alteram ſigno $-$ afficiendas, ut habeantur illæ, quæ revera inter ſe ſint homologæ. Ex dictis veritas prorſus nova, maximique momenti in tota Analyſi tandem ſtatuenda eſt: *radicem* ſcilicet *cujuſcumque quadrati orti a linea quantitate ex. gr.* $\frac{a}{2}$ *data*, *&* *variabili* n *conflata revera ſic efferendam eſſe* $\sqrt{M^2} = M = \pm n \pm \frac{a}{2}$: quæ ita eſt intelligenda, ut ſi ponatur $\frac{a}{2}$ ſemper major n, ac tantum in limite maximo $= \frac{a}{2}$; erit $M = \frac{a}{2} \pm n = \frac{a}{2} \pm (-n)$, quæ ſunt radices Syſtematis baſis datæ a nobis ſupe-

ſuperius inventæ: at ſi n ponatur ſemper major $\frac{a}{2}$, & tantum in limite minimo $= \frac{a}{2}$, erit quadrati M^2 radix $M = n \pm \frac{a}{2} = n \pm \left\{ - \frac{a}{2} \right\}$. Hoc modo legitimum invenimus Canonem, quo tuto ſigna $\pm$ tractare liceat, & quantitatibus & radicibus præfigere.

§. 8. In hoc itaque Syſtemate baſis datæ vera, & neceſſaria eſt æquatio M^2 æquale quatuor primis formulis noſtræ *Tabulæ*, quia (uti vidimus) vera & neceſſaria eſt uniuſcujuſque formulæ in ceteras transformatio. Hæ enim lineis expreſſæ erunt ſequentes

$$M^2 = \left\{ \begin{array}{llll} \frac{a^2}{4} + 2\cdot\frac{a}{2}\,n + n^2 = \frac{a^2}{4} - \overline{2\cdot\frac{a}{2}} - n\cdot n - n^2 & & & \\ = \frac{a^2}{4} + 2\cdot\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2 = \frac{a^2}{4} - \overline{2\cdot\frac{a}{2} - (}-n)\cdot(-n) - (-n)^2 & & & \\ \overline{PR + RI}^2 = \overline{QR - RI}^2 = \overline{QR + (-RI)}^2 = \overline{QR + RI'}^2 = \overline{PR - RI'}^2 & & & \\ \quad \overline{PI}^2 \quad = \quad \overline{QI}^2 \quad = \quad \overline{QI'}^2 & & & = \overline{PI'}^2 \\ \quad q.\, I'l \quad = q.\, IL' \quad = \quad q.\, I'L & & & = q.\, I'l' \\ \quad \overline{MI}^2 \quad = \quad \overline{KI}^2 \quad = \quad \overline{Q''I'}^2 & & & = \overline{K'I'}^2 \end{array} \right.$$

nam quadratum circa diagonalem Il gignitur tam a PI in ſe ducta, quam ab MI in ſe ipſam multiplicata; ideoque ejus radix poteſt eſſe tam PI, quam MI: idem dicatur de aliis. Ponamus nunc n in limite minimo æqualem zero, quo in caſu linea PQ tranſit per centrum C, fitque AB, & linea MK primæ normalis tranſiens per idem centrum C fit NN': tunc erit æquatio

$$M^2 = \left\{ \begin{array}{lllllll} \frac{a^2}{4} & = & \frac{a^2}{4} & = & \frac{a^2}{4} & = & \frac{a^2}{4} \\ \overline{AC}^2 & = & \overline{BC}^2 & = & \overline{BC}^2 & = & \overline{AC}^2 \\ q.\,Cl & = & q.\,CL' & = & q.\,CL & = & q.\,Cl' \\ \overline{NC}^2 & = & \overline{N'C}^2 & = & \overline{NC}^2 & = & \overline{N'C}^2 \\ q.\,CL & = & q.\,Cl' & = & q.\,Cl & = & q.\,CL' \end{array} \right\} :$$

quæ omnia quadrata invicem æqualia ſunt quantitate, non tamen ſunt identica, ſed poſitione diverſa: quadrata vero ea erunt homologa, ſimulque conjungenda, quæ circa eamdem diagonalem deſcripta e diametro invicem opponuntur. Hinc in hoc Syſtemate, ut ab uno quadrato tantum radices ambæ homologæ inveniantur, ſumpta ex. gr. $M^2 = \overline{AC}^2$, extracta radice fiat $M = \pm AC$, ſcilicet

$$\text{licet}\ \begin{matrix} M = AC = \frac{a}{2} \\ M = -AC = BC = \frac{a}{2} \end{matrix} :\ \text{vel ſumpta}\ M^2 = \overline{BC}^2\ \begin{matrix} M = BC = \frac{a}{2} \\ M = -BC = AC = \frac{a}{2} : \end{matrix}$$

hoc enim pacto quæ erat una & eadem ab eodem quadrato profecta fit diverſa, ut ſimul copulentur illæ duæ datæ, quæ æquales & in limite minimo homologæ ſint, quas ſcimus in Syſtemate hoc baſis datæ æquales quidem eſſe, ſed diverſas oportere ut homologæ ſtatuantur. Cum vero in caſibus mediis noverimus in hoc Syſtemate radices partiales ſingulas duo diverſa Syſtemata partialia exhibere, quorum unum ſit baſis variabilis $M = \frac{a}{2} + n$, baſis datæ alterum $M = \frac{a}{2} - n$, ſive M in prima æqualis ſummæ $\frac{a}{2} + (-n) = \frac{a}{2} + n$, in ſecunda M æqualis differentiæ $\frac{a}{2} - n$; in quibus n valor maximus nequit ſuperare $\frac{a}{2}$; ſtatim patet quadrata homologa radicum noſtræ æquationis eſſe $M^2 = \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}n + n^2$ $= \frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2} - n}.n - n^2$; cum primum M^2 revera ſit quadratum ſummæ $\frac{a}{2} + n$, ſecundum quadratum differentiæ $\frac{a}{2} - n$. Ab hiſce igitur primis quatuor æquationibus noſtræ *Tabulæ* eruuntur quadrata homologa utriuſque radicis homologæ, quæ ſimul conſtituunt Syſtema integrum lineare baſis datæ $M = \frac{a}{2} + n = \frac{a}{2} - n$, ſive $M + M = \frac{a}{2} + n + \frac{a}{2} - n$ $= \frac{a}{2} + n - n + \frac{a}{2} =$ in noſtra *figura* $\begin{matrix} PI + QI = PI' + QI' \\ MI + KI = KI' + Q'I' \end{matrix}$ &c.; & in limite minimo (quando $n = o$, $M = M$) $M + M = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ $= AC + BC = BC + AC = NC + N'C = N'C + NC$: quæ mire conſentiunt cum iis, quæ demonſtravimus in toto Libro I. & in Capp. antecedentibus.

§. 9. Quamobrem ratio cur liceat (ut vulgo fit) radici quadratæ ſignum ambiguum præfigere eſt, ut in conſtructione illæ lineæ ſimul addantur, quæ inter ſe homologę Syſtema quęſitum conſtituant. At demonſtravimus in hoc baſis datę Syſtemate, quę datę ſunt debere eſſe diverſas, identicas quę variabiles ſunt: ergo diverſę accipiendę ſunt lineę datæ in conſtructione, & variabilis ſumenda identica. Ergo (quod diligenter eſt obſervandum) ſignum ambiguum $\pm$ revera non

non ſymbolis datis $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, quę indicant lineas (*fig. ead.* 18.) AC, BC, ſed lineis aptandum eſt: ſpecies enim $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ in hoc Syſtemate ſemper ſumendę ſunt poſitivę; lineę vero a ſpeciebus indicatę ſigno ambiguo $\pm$ notandæ. Ita in noſtro caſu ex. gr. $M^2 = \overline{PR + RI}^2 = \left(\frac{a}{2} + n\right)^2$, & extracta radice M $= + (PR + RI) = - (PR + RI) = - PR - RI = \frac{a}{2} + n$: ſed $- PR = QR$, $- RI = RI'$; ergo in hoc ſecundo caſu $M = QR + RI' = \frac{a}{2} + n$: quod ſi ſumas $M = QR - RI$, erit $M = QI$: at in hoc caſu $M^2 = \overline{QR - RI}^2 = \overline{QR}^2 - 2.\overline{QR - RI}.RI - \overline{RI}^2$. Itaque quadratum differentię non pendet a ſigno negativo, quod RI pręfigitur, ſed a forma, quam quadrato ipſi tribuimus; ideoque n in formula $\frac{a}{2} + n$ ſigno *plus*, aut *minus* afficienda eſt, prout diverſo modo velis quadratum ſummę, vel differentiæ conſiderare: utraque enim ſemper ſimul ſumenda eſt, ut homologę quadraticę ęquationes habeantur, ex quarum radicibus ſingulis eruantur radices partiales Syſtematum partialium, quę totale Syſtema conſtituunt. Quod ſi ambiguo ſigno $\pm$ etiam ſpeciem $\frac{a}{2} + n$ afficere velis (ut ſemper vulgo fit), erit $M = \frac{a}{2} + n = - \frac{a}{2} - n$, quę in eodem Syſtemate, in quo n ſemper minor $\frac{a}{2}$ non dat, ſi recte intelligatur, poſitivum ęquale negativo, ſed docet vel

$$M = \frac{a}{2} + n = + \left(-\frac{a}{2}\right) + (-n)$$

$$M = PR + RI = QR + RI'$$

; quę utręque ſunt poſitivę, atque utręque dant majorem variabilium Syſtematis linearis partialis baſis variabilis: hę tamen non ſunt inter ſe homologę, cum ſecunda non ſit niſi inverſio primę: quod ſi fiat

$$M = \frac{a}{2} + n = + \left(-\frac{a}{2}\right) - n,$$

$$M = PR + RI = QR - RI = QI;$$ hę tunc ſunt vere inter ſe homologę.

§. 10. Poſita in hoc Syſtemate n maxima $= \frac{a}{2}$, oriuntur ęquationes, quas

§. 5.

§. 5. recenſuimus, in quo caſu quadrato maximo a^2 reſpondet ſemper quadratum $(o)^2$. Æquatio vero, quæ quadrata hujuſmodi maxima & minima homologa complectitur, erit ſequens (*fig. ead.* 18.)

$$M^2 = a^2 = (o)^2 = \left\{\begin{matrix} q.\,l\,L' = (L')^2 \\ \overline{l'L'}^2 = (L')^2 \\ \overline{L\,L'}^2 = (L')^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} q\,L'\,l = l^2 \\ \overline{L\,l}^2 = l^2 \\ \overline{l'l}^2 = l^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} q\,l'\,L = L^2 \\ \overline{l\,L}^2 = L^2 \\ \overline{L'\,L}^2 = L^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} q\,L\,l' = (l')^2 \\ \overline{L'\,l'}^2 = (l')^2 \\ \overline{l\,l'}^2 = (l')^2 \end{matrix}\right\}$$

Quodlibet igitur quadratum octo revera radices habet, a quibus ſingulis in ſe ductis ipſum idem numero gignitur, cum ſuper quolibet latere ſigno $\pm$ affecto erigi & formari poſſit idem quadratum. Huic autem quadrato conſiderato ut maximo, quatuor quadrata $(o)^2$ minima reſpondent; ideoque duabus radicibus maximis ad angulum rectum conſtitutis eadem radix minima, ſive zero reſpondet, quemadmodum ęquatio ſuperior oſtendit. In hac igitur conſtructione, quando habentur limites maximi rectilinei, intra quos ſępe diximus totum partialium Syſtematum negotium peragi; habentur etiam limites minimi zero ęquales, qui ſimul ſumpti cum ſuis homologis maximis determinant radicis maximę poſitionem, ſive oſtendunt ſuper quo latere ejuſdem quadrati ſumenda ſit ęquatio linearis Syſtematis integri baſis datę linearis $m + n = a$. In hac enim facta una maxima & altera zero ex variabilibus m, & n; erit ęquatio

$$M = m + o\,n = \left.\begin{matrix} l'L' + L' = L\,l + l = l\,L + L = L'l' + l' \\ L\,L' + L' = l'l + l = L'L + L = l\,l' + l' \end{matrix}\right\} = a,$$

quæ docet eidem variabili minimæ æquali zero eas duas homologas maximas reſpondere, quæ inter ſe angulum rectum conſtituunt. Hinc deducitur non eſſe omittendum zero, ſive punctum, quod licet quantitatem in valore non mutet, tamen, prout mutatur locus ipſius zero ſive puncti, mutatur directio & poſitio baſis datæ Syſtematis. Quare non ſolum ſigno ambiguo $\pm$ (ut methodus communis docet) afficienda eſt linea, ſive radix a qua idem quadratum oriri poteſt; ſed loco unius tantum lineæ directe & inverſe ſumptæ ſubſtituendum eſt quodlibet latus quadrati ſigno $\pm$ affectum, ut ſit
$M = \pm.\,l'L' = \pm.\,L'L = \pm.\,L\,l = \pm.\,l\,l' = + a$; quæ tamen ſingulæ ſunt æquandæ a poſitivæ & integræ, cum conſtet ex *Libro* I. ex. gr. $m + n = l'K + L'K = L'K + l'K = \pm\, l'L' = \pm\, L'l' = a$. Quadratum igitur maximum a noſtris formulis exhibitum octo radices habet, quæ dato puncto zero quadrati minimi ad duas reducuntur ad angulum rectum.

§. 11. Hoc vero probe convenit in eo caſu, in quo in hoc Syſtemate baſis datæ radix quadrati maximi eſt revera integra, nullo interjecto puncto diſtincta: punctum enim variabile I, vel I′ in diagonalibus, in quo ſe contingunt quadrata homologa, in hoc caſu tranſit in unum aut alterum extremum punctum diagonalium, in quod etiam concurrunt puncta K, K′ &c. radicis æquationis $m + n = m + o = l'L' = a$: ideoque revera $m = a$ integra, quando $n = o$. Hinc eruitur differentia, quæ maxima intercedit inter methodum a nobis

nobis adhibitam §. 8., & ſeqq. hujus Capitis, qua conſideravimus M = P I = Q I &c., ſive æqualem lineæ integræ variabili ſubſtitutæ loco P R + R I $= \frac{a}{2} + n$, & inter methodum quæ loco P I aſſumit $\frac{a}{2} + n$, qua uſi ſumus in conficiendis quatuor primis formulis noſtræ *Tabulæ* ſequendo morem communem elevandi ad quadratum quantitates compoſitas duorum terminorum, quorum unus datus, alter variabilis ſit. Primus modus §. 8. & ſeqq. adhibitus conſiderat, atque aſſumit lineam integram variabilem P I &c., quæ quo major fit, verſus baſim quadrati fluendo accedit, vel quo minor, verſus centrum C: hoc modo igitur linea P I mutatione valoris mutat etiam poſitionem; ideoque dupliciter variabilis cenſenda eſt, variabilis ſcilicet quantitate, & variabilis poſitione, cum nequeat fluendo in eodem ſitu conſtanter perſeverare, ſed cogatur continuo motu parallelo accedere, vel recedere a centro C, prout minuitur, vel augetur; donec facta maxima $= a$, in quo caſu ſua homologa fit minima $= 0$, vel viceverſa, reperiatur tota in uno vel altero quadrati latere, ut ſuperius demonſtravimus. At facta $M^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{2an}{2} + n^2$, & $M = \frac{a}{2} + n$, ſi radicem hanc hujuſce quadrati non lineam P I integram, ſed A C + C D repræſentare velimus, quæ conſtanter in eadem poſitione parallela baſi quadrati per centrum C tranſiens perſeverat, quomodocumque augeatur, vel minuatur: tunc facta maxima, ſive facta $n = \frac{a}{2}$, erit A C + C B, vel N C + C N′; non niſi enim lineæ illæ, quæ per centrum tranſeunt revera cenſendæ ſunt bifariam ſectæ: ideoque hujuſmodi lineæ A B, N N′ revera in hoc Syſtemate appellari poſſunt axes, qui in eodem ſemper ſitu manentes in cauſſa ſunt cur a tribus punctis datis A, C, B intra neceſſarios limites Syſtema totale lineare concludatur, atque in duo partialia Syſtemata neceſſario dividatur. Nam ſi in dato Syſtemate totali $m + n = a =$ A B, facta A d $= m$, ponamus m fluere a puncto A verſus B: hęc fluendo variabilis perſeverat, donec centrum C attingit, in quo fit ſtatim data $= \frac{a}{2}$; atque ideo altera etiam n determinatur, ac Syſtema partiale oritur $m = n = \frac{a}{2}$, & $m + n = \frac{a}{2}$. Rurſus ex centro C fluente verſus B fit A D $= m = \frac{a}{2} + n =$ A C + C D, donec fluendo iterum punctum datum B aſſequitur, & fit n data, eſtque $m = \frac{a}{2} + \frac{a'}{2}$. Methodus igitur communis in noſtra *Tabula* adhibita elevandi ad quadratum quantitatem compoſitam ex data $\frac{a}{2}$, & variabili n, neceſſario ducit ad diviſionem Syſtematis integri linearis baſis datæ $m + n = a$ in duo Syſtemata partialia, in quæ Capitibus ſuperioribus Libri I. diviſimus Syſtema totale: quæ proin-

proinde diviſio in hac Methodo neceſſaria eſt, & nos vel inſcios veluti manu ducit ad legitimam Syſtematum partialium combinationem obtinendam, quam Cap. V. Libri I. docuimus. Ubi vero ad maximum quadratum pervenerimus facta $n = \frac{a}{2}$, tunc quadratum $M^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2$, ideſt quadratum

$$+ \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2}$$

totale a^2 dividitur in quatuor æquales partes, ſcilicet in duo quadrata, & duo rectangula ſingula ſingulis æqualia a normalibus A B, N N' per centrum ductis. Itaque licet $M^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2} + \left\{\frac{a'}{2}\right\}^2 = a^2$, tamen ea eſt differentia inter

$$+ \frac{a}{2} \cdot \frac{a'}{2}$$

primam formulam, & ſecundam, ut prima doceat quadratum totale $a^2 =$ l L' diviſum fuiſſe in quatuor æquales partes ab axibus per centrum tranſeuntibus; ſecunda vero a^2 indicet quadratum a^2 integrum, cujus radix (ut diximus) eſt latus quodlibet l'L' &c. ipſius quadrati.

§. 12. Sectione tamen totius quadrati maximi, & integri a^2 in quatuor æquales partes ope linearum (*fig. ead.* 18.) A B, N N' ad normam ſe ſecantium in centro C, atque poſitione data & conſtanti axis A B vel N' N, in quo ſumuntur variabiles AD, BD, nondum conſtructio, quam intelligimus perfecta eſt. Nam ſi ſuper A B, vel N' N ſumantur quadrata variabilium $AD = \frac{a}{2} + n$, $BD = \frac{a}{2} - n$, quas ad diagonalem relatas in fluxu ſuo ſemper etiam ſitum mutare ſuperius oſtendimus; numquam poteris, data aliqua communi atque conſtanti lege, duo hæc Syſtemata partialia quadratica ſimul conjungere, ut ad unius, atque totalis Syſtematis regularis conſtructionem pervenias: ut facile conſtructione ipſa poteris cognoſcere. Quadrata itaque a primis noſtræ *Tabulæ* formulis exhibita non niſi limites maximos, atque minimos præbent in hypotheſi $n = \frac{a}{2}$, & $n = 0$: in primo caſu dant quadratum maximum & integrum a^2, & minimum $= (0)^2$, de quibus in §§. ſuperioribus ſermonem habuimus; in ſecundo, in quo radices æquales ſunt, habetur diviſio quadrati totalis a^2 in duo quadrata atque in duo rectangula, ſingula ſingulis æqualia, quorum unumquodque æquale eſt $\frac{a^2}{4}$; ſed in æquationibus homologis licet æqualia, non ſunt tamen identica, ſed ea lege inter ſe diſpoſita, ut tam quadrata, quam rectangula ab æquationibus homologis exhibita e diametro opponantur. Ita (*Tab.* V. *fig.* 3.) ſi quadratum M^2 (I.ª) formulæ dicas C l, erit quadratum homologum huic reſpon-

pondens (II.ª) formulæ CL′, & rectangula homologa $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ CL, Cl′, vel vi-
(I.ª) (II.ª)
ceverſa: in hoc enim limite MM tam poteſt eſſe quadratum $M^2 = \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$
(I.ª) (II.ª)
$=$ Cl $=$ CL′, quam rectangulum $MN = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = BC.NC$ $= AC.N'C = CL = Cl'$, ut ſimul ſumpta totum quadratum lL′ exhauriant, ut vidimus Capite I. hujuſce Libri.

§. 13. Ex iſtis tamen quadratis, quæ ab eadem formula varie modificata proficiſcuntur, legitime conſtitutis eruuntur radices, quæ ſimul ſumptæ Syſtema propoſitum lineare conſtituunt, atque inter ſe multiplicatæ Syſtema ſecundæ dimenſionis baſis datæ gignunt; dummodo univerſim animadvertatur, cum in Syſtemate lineari baſis datæ variabiles ab extremis punctis datis obviam ſibi invicem occurrant, & ſit in *figura* 3ª. $AC = \frac{a}{2}$, $Ad = m$, $Cd = n$, & æquatio $\frac{a}{2}$ $= AC = m + n = Ad + Cd$, animadvertatur inquam in hoc Syſtemate eſſe $AD = AC + CD = AC + (-Cd)$ (ſi, ut oportet, variabili $n = Cd$ utaris propria hujuſce Syſtematis), & quadratum $\overline{AD}^2$ $= \overline{AC}^2 + 2AC.(-Cd) + (-Cd)^2 = \frac{a^2}{4} + 2.\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2$.

Et in eodem hoc Syſtemate $Ad = AC - Cd$, & $\overline{Ad}^2 = \overline{AC}^2 - 2Ad.Cd - (Cd)^2$ $= \overline{AC}^2 - 2.\overline{AC - Cd}.Cd - (Cd)^2 = \frac{a^2}{4} - 2.\frac{a}{2} - n.n - n^2$ quadratum differentiæ AC — Cd, ut etiam demonſtravimus Capite ſuperiori. Verum ſi ad eam, quam ſemper ſpectant, ſimplicitatem more communi hæc formula reducatur; erit formula ex Capite antecedenti $\frac{a^2}{4} - 2.\frac{an}{2} - 2(-n)(n) - n^2$ $= \frac{a^2}{4} + 2.\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2$, quæ non amplius quadratum differentiæ Ad deſignat, ſed quadratum ſummæ $\overline{AC}^2 + 2AC.(-Cd) + (-Cd)^2$ $= \overline{AD}^2$. Ergo in Syſtemate baſis datæ quadratum M^2 poteſt repræſentare tam quadratum ſummæ $AC + CD = AC + (-Cd) = AD$, quam quadratum differentiæ $AC - Cd = Ad$; & in primo caſu $M = \frac{a}{2} + (-n)$,

 in

in ſecundo $M = \frac{a}{2} - n$: & hoc ex formula eadem quadratica, atque iiſdem expreſſa ſymbolis, prout uno vel altero modo formulam ipſam quadraticam modificemur (uti oſtendimus). In Syſtemate igitur baſis datæ vera formula, quæ convenit quadrato ſummæ, erit (III.ª) noſtræ *Tabulæ*, cui (II.ª) eſt homologa, ſive illa, quæ exhibet differentiæ quadratum, cum utraque ratio componendi & efferendi formulam poſſibilis ſit; quin imo data una, altera neceſſario exiſtat oportet.

§. 14. Verum ſi ſumatur (IV.ª), quæ dat quadratum differentiæ $\frac{a}{2} - (-n)$, poſita n eadem Cd (*fig. ead.* 3.); erit $M = \frac{a}{2} - (-\text{C d})$, ſive $M = \frac{a}{2} - \text{CD}$, in quo caſu $\frac{a}{2}$ eſt BC, & $M = \text{BC} - \text{CD} = \text{BD}$. Hæc ſi reducatur more vulgari convertitur in $M^2 = \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2}(-n) + (-n)^2$, quæ oſtendit quadratum $\frac{a^2}{4}$ ortum eſſe a radice negativa $-\frac{a}{2}$, atque eſſe revera $M^2 = \left\{-\frac{a}{2}\right\}^2 - 2 \cdot \frac{a}{2}(-n) + (-n)^2$, ejuſque radix $M = -\frac{a}{2} - n$ $= -\text{BC} - \text{Cd}$: ſed $-\text{BC} = \text{AC}$, $-\text{Cd} = \text{CD}$; ergo $M = -\frac{a}{2} - n$ $= -\text{BC} - \text{Cd} = \text{AC} + \text{CD}$, quæ vere eſt homologa (IV.ª), cujus radix $= \text{BC} - \text{CD}$. Igitur (IV.ª) poterit eſſe homologa (I.ª), dummodo utræque a diverſo originis puncto dato ortæ invicem ſibi occurrant, & identicam CD, vel Cd utræque contineant. Hæc eſt lex generalis perpetuo ſervanda in hoc Syſtemate, qua quadrata variabilium homologarum, atque ipſæ variabiles reguntur. Criterium igitur, quo dijudicari tuto poſſit utrum complexus duarum quantitatum ſummam, vel differentiam conſtituat, non eſt petendum a ſignis $\pm$, quibus quantitates lineares partiales afficiuntur, ſed a varia ratione, qua efferuntur earum quadrata, cum ab eadem quadratica formula vario modo expreſſa dignoſcatur an radix quæſita ſit differentia vel ſumma quantitatum partialium.

§. 15. Ne vero in ſtatuendis quadratis homologis decipiamur, regula quadam opus eſt, quam nunc tradimus: erraret enim qui, poſito quadrato differentiæ $M^2 = \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \overline{\frac{a}{2} - n} \cdot n - n^2 = \overline{\text{AC}}^2 - 2 \cdot \overline{\text{AC} - \text{Cd}} \cdot \text{Cd} - \overline{\text{Cd}}^2$, cujus radix eſt $M = \text{AC} - \text{Cd} = \text{Ad}$, arbitraretur variabilem $M = \text{AC} + (-\text{Cd})$ $= \text{AC} + \text{CD}$ (quæ facta reductione in quadrato differentiæ fit radix quadrati

M²

$M^2 = (AC)^2 - 2AC.Cd + \overline{Cd}^2$)) eſſe homologam primæ $AC - Cd$: quæ licet quantitate æqualis ſit homologæ, tamen a vera homologa poſitione differt, cum in hoc Syſtemate baſis datæ demonſtraverim radices homologas illas eſſe, in quibus conſtans $\frac{a}{2}$ eſt diverſa, & identica n. Ut igitur a quadrato differentiæ $M^2 = \overline{AC}^2 - 2.\overline{AC - Cd}.Cd - (Cd)^2$ eruatur vera radix homologa, reducatur quadratum differentiæ, quod convertitur in quadratum ſummæ $M^2 = \overline{AC}^2 - 2AC.Cd + \overline{Cd}^2$; & quoniam eſt $-AC = BC$, ponatur in hoc quadrato $-BC$ pro AC, ut ſit $M^2 = \overline{AC}^2 - 2AC.Cd + \overline{Cd}^2 = (-BC)^2 - 2.-BC.Cd + \overline{Cd}^2 = \overline{BC}^2 + 2BC.Cd + \overline{Cd}^2 = \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}n + n^2$, & radix $M = BC + Cd$ erit vere homologa alterius $M = AC - Cd$, & $M + M = m + n = AC - Cd + Cd + BC = \frac{a}{2} + n - n + \frac{a}{2}$; quas vere eſſe homologas Syſtematis baſis datæ ex toto I. Libro colligitur. Eodem modo in dato quadrato ſummæ $M^2 = \overline{BC}^2 + 2BC.Cd + \overline{Cd}^2$, poſita $-AC$ pro BC, erit $M^2 = (-AC)^2 + 2.-AC.Cd + \overline{Cd}^2 = \overline{AC}^2 - 2.AC.Cd + \overline{Cd}^2$; ac transformata hac formula in $M^2 = \overline{AC}^2 - 2.\overline{AC - Cd}.Cd - \overline{Cd}^2$, erit differentia $M = AC - Cd$ radix illa vere homologa alterius $BC + Cd$. Hoc igitur artificio a quadrato differentiæ ad quadratum ſummæ homologum, & viceverſa fit tranſitus; quorum quadratorum radices ſunt variabiles m, n vere homologæ, ex quarum producto oritur æquatio ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis datæ. Veritas hæc nondum animadverſa, licet cetera deeſſent quæ ſupra diximus, ſatis profecto eſſet ad univerſim ſtatuendum in hoc Syſtemate baſis datæ ex maximo quadrato erui minimum, & viceverſa; ac dato uno alterum neceſſario intelligendum eſſe, cum eadem quadrati formula & in quadratum ſummæ, & in quadratum differentiæ varia modificatione tranſmutetur: in caſibus vero intermediis creſcente quadrato ſummæ, alterum differentiæ decreſcat oportet ea lege, ut horum quadratorum radices ſint radices homologæ quantitate & poſitione ita diſpoſitæ, quemadmodum hoc baſis datæ Syſtema requirere demonſtravimus. Ac tandem luce clarius evincitur ſigno $=$, quod dicitur, & creditur perfectæ æqualitatis, notionem ampliorem & univerſaliorem affigendam eſſe: cum recte loquendo non ſit niſi vinculum illud, quo eæ quantitates inter ſe colligantur, quæ ex ejuſdem formulæ modificatione uno eodemque tempore ſimul neceſſario exiſtunt, quo nomine homologæ a me appellatæ fuerunt.

§. *16.* Conſtitutis hujuſmodi regulis conſequitur (1.°) in hoc Syſtemate baſis datæ ſecundæ dimenſionis quadrata homologa ſimul neceſſario exiſtere, ac uno dato alterum homologum inveniri poſſe: (2.°) hujuſmodi quadrata inverſo modo cre-

creſcere, vel decreſcere, cum creſcente (*fig. ead.* 3.) C d neceſſario creſcat $\overline{D'e}^2 = Ne$, ac decreſcat $\overline{ge}^2 = Ae$: conſequitur (3.°) hujuſmodi quadrata in caſibus intermediis, retento eodem axe A B vel N N', numquam conſtanti lege continuitatis inter ſe conjungi, niſi (uti oſtendimus §§. ſuperioribus) ad diagonales referantur: eorum tamen radices in alterutro axe ſumptæ dant variabiles Syſtematis propoſiti linearis baſis datæ: (4.°) licet in quadrato ſummæ valor n a minimo zero uſque ad infinitum progredi poſſit, tamen limitatur a quadrato homologo differentiæ $\frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2} - n}.n - n^2$, quo fit ne n valorem maximum $\frac{a}{2}$ excedere poſſit; facta enim $n > \frac{a}{2}$ quadratum differentiæ non amplius in quadratum ſummæ converti poteſt, ac proinde non eſt amplius homologum primo, nec radices ab iſtis erutæ ſunt amplius homologæ: (5.°) dato uno limite minimo quadrati, alter maximus ſit neceſſe eſt: at data $Cd = \frac{a}{2}$, fit $Ad = 0$, qui eſt limes minimus, ad quem deprimi poteſt A d, ſuppoſita tantum baſi A C: ergo quadrato differentiæ $\overline{Ad}^2 = \overline{AC - CA}^2 = A^2$ minimo reſpondet quadratum maximum ſummæ $\overline{-AC + (+Cd)}^2 = \overline{-AC + (+AC)}^2 = \overline{BC + CA}^2 = \overline{\frac{a}{2} + \left\{+\frac{a}{2}\right\}}^2$: vel dato quadrato differentiæ $BD = \overline{BC - CB}^2 = B^2$ reſpondet maximum $\overline{-BC + CD}^2 = \overline{-BC + BC}^2 = \overline{AC + BC}^2 = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}^2$; quod eſt quadratum conflatum ex quatuor quadratis partialibus $\frac{a^2}{4}$ hinc inde ab axe A B vel N N' conſtitutis; atque ideo, ut diximus, in quatuor partes æquales dividitur totum quadratum a^2 maximum, ejuſque latera (quemadmodum vidimus *Cap.* I. *Libri* hujus) ſunt limites maximi rectilinei hujuſce Syſtematis: eodem modo ex maximo quadrato erui poteſt poſitio quadrati minimi, ſive poſitio puncti ab utraque extremitate alterius axis. Hinc ex quatuor primis formulis noſtræ *Tabulæ*, ſi ut quadrata ſpectentur, definiuntur limites rectilinei Syſtematis baſis datæ: atque ex eorum radicibus valor & poſitio variabilium linearium Syſtema lineare baſis datæ conſtituentium, quę in uno vel altero axe ſumi poſſunt.

§. 17. Nunc a quadratis homologis utriuſque variabilis m & n, quæ exhibentur a primis æquationibus noſtræ *Tabulæ*, ut tranſitus legitimus fiat ad rectangula mn utriuſque variabilis ſumptæ ſemper in poſitione data alterutrius axis, atque limites illi rectilinei inveniantur, qui huic conditioni ſatisfaciant; ad hoc alterum artificium confugiendum eſt, quod exhibetur a formulis (V.ª),

(VI.ª)

(VI.ª), (VII.ª), & (VIII.ª), dummodo animadvertatur (VII.^{am}) oriri a (III.ª), (VIII.^{am}) a (IV.ª) poſita $+m$ pro $-n$, ut fieri poſſe in Syſtemate baſis datæ ſæpius diximus. Hoc modo formulæ hæ non ſunt niſi quatuor primarum formularum modificationes, quæ hactenus in Analyſi tamquam æquales primis, atque ipſis identicæ uſurpantur. Tamen vidimus *Capite* I. & III. hujuſce *Libri*, facta harum formularum modificatione, earum valorem ac conſtructionem mutari, atque in Syſtemate baſis datæ formulam (VI.^{am}) componi ex quadrato conſtanti $\frac{a^2}{4}$ atque ex variabili rectangulo $-\left\{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right\}.n$, ut, poſita ex. gr. (*fig.* 3.) $AB=a$, $BD=n$, & poſita $n=0$, ſit $\frac{a^2}{4}=CL'=N'C\,.\,NC$ rectangulo maximo quadrilateri N'NBL' & $\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}\,.\,n=Be'=Bd\,.\,de'=Bd\,.\,Ad$; & facta $n=\frac{a}{2}=AC$, ſit $\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}\,.\,\frac{a}{2}=BC\,.\,N'C=CL'$ rectangulo maximo quadrilateri BAN'L' non ſolum æquali, ſed identico cum primo, ut in limite formula $\frac{a^2}{4}-\left\{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right\}.\frac{a}{2}=CL'-CL'$ æquetur zero; aliter non differentiam, ſed ſummam ſignificare in *Capite* I. hujus *Libri* oſtendimus.

§. 18. In hoc Syſtemate poſita $n=\frac{a}{2}$, (V.ª), & (VII.ª), æquales ſunt duobus quadratis, ac duobus rectangulis inter ſe æqualibus, quæ ſimul ſumpta totum quadratum a^2 exhauriunt. At obſervandum rectangulum $\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+n}\,.\,n$ ſuper linea AB ſumptum (ſi ſuper eadem linea $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+n$ conſtituatur) non poſſe pertinere ad hoc Syſtema baſis datæ, quod conſideramus: facta enim $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=AC+CB=a$, ſi huic addas n, extra limitem maximum hujuſce Syſtematis egredieris, & ad Syſtema baſis variabilis te transferas oportet, ſitque (*fig.* 5.) $\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+n}\,.\,n=\overline{AC+CB+BD''}\,.\,BD''=AD''\,.\,BD''$,

quod

quod pertinet ad Syſtema baſis variabilis. Nec mirum, cum eadem prorſus æquatio $M^2 = n^2 + \frac{2na}{2} + \frac{a^2}{4} = n \cdot \overline{n + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}} + \frac{a^2}{4}$ exhibeatur ab æquatione (1.ª) Syſtematis baſis variabilis. Et ſane quadratum hoc utrique Syſtemati commune eſſe oſtendimus; hac tamen differentia, quod in Syſtemate baſis datæ ſit maximum $= a^2$ conjungendum cum ſuo homologo minimo $= (o)^2$: at in Syſtemate baſis variabilis a^2 eſt quadratum minimum, cui reſpondet alterum item minimum $= (o)^2$: in hoc igitur caſu, in quo limites ſunt communes (ſcilicet maximum & minimum Syſtematis baſis datæ cum duobus ſimul minimis homologis Syſtematis baſis variabilis) Syſtemata invicem commiſcentur, atque ab uno ad alterum tranſitus fieri poteſt. In hiſce vero limitibus utrique Syſtemati communibus, data tantum æquatione (I.ª), ambiguitas hæc tolli nequit, niſi prius arbitrio ſtatuantur limites, intra quos variabilis n conſtituenda eſt. Si enim n intra o minimum, & $\frac{a}{2}$ maximum conſtituatur, æquatio (I.ª) pertinet ad Syſtema baſis datæ, & facta maxima $n = \frac{a}{2}$, æquatio (I.ª) dat quadratum maximum a^2 in quatuor æquales partes diviſum, a quo exhibentur limites rectilinei maximi ſecundæ dimenſionis, intra quos legitimæ Syſtematum partialium combinationes concluduntur: huic tamen ex adverſo neceſſario reſpondere debet (uti vidimus) quadratum $M^2 = (o)^2$ minimum, quod maximo in hoc Syſtemate homologum eſt. Quod ſi limites n conſtituantur intra $\frac{a}{2}$ minimum, & ∞ maximum, tunc quadrata homologa Syſtematis baſis variabilis erunt ambo minima, ac licet cum primis Syſtematis baſis datæ in hypotheſi $n = \frac{a}{2}$ valore conveniant; tamen ab iiſdem differunt in hoc, quod hic ambo minima cenſenda ſunt, atque eodem tempore æque creſcere vel decreſcere; quando in altero Syſtemate reciprocantur, & creſcente uno, alterum decreſcit; vel viceverſa. Porro cum quodcumque quadratum a (I.ª) æquatione exhibitum poſſit eſſe maximum, vel minimum, ſive pertinere ad Syſtema baſis datæ, vel baſis variabilis, utraque ſuppoſitio univerſim ſumenda eſt, ut ex duplici hoc Syſtemate illud eligatur, quod limitibus valori n conſtituendis pro re nata conveniat. In Syſtemate vero baſis datæ conſtitutis quomodo formula $M^2 = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n} \cdot n$ tractanda ſit, ut ad idem Syſtema baſis datæ referatur, præter ea quæ indicavimus §§. 28, & ſeqq. *Capitis* I. hujuſce *Libri*, quæque in Parte II. enucleabimus, cum de legitima

tima horum Syſtematum diviſione & conjunctione agemus, ea quæ inferius in hoc Capite dicemus ſatis aperte declarabunt.

§. 19. Hic tamen antequam progredior animadvertendum eſt in formulis Seriei ſecundæ ortis a modificatione quatuor Seriei primæ, cum in rectangula variabilia $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n} \,.\, n$, vel $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} \,.\, n$ converſa fuerint, quorum primo additur quantitas data ſecundæ dimenſionis $\frac{a}{2} . \frac{a}{2}$, ſecundum vero rectangulum detrahitur ab eadem quantitate $\frac{a}{2} . \frac{a}{2}$, jure cenſendam eſſe & ipſam quantitatem datam $\frac{a}{2} . \frac{a}{2}$ tamquam rectangulum, ut comparatio cum variabilibus ejuſdem naturæ inſtitui poſſit: quo poſito formulæ (V.[a]) & (VII.[a]) conſiderari debent tamquam aggregatum duorum rectangulorum $\frac{a}{2} . \frac{a}{2}$ dati, & $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + n} \,.\, n$ variabilis; (VI.[a]) vero ac (VIII.[a]) ut differentia rectanguli maximi $\frac{a}{2} . \frac{a}{2}$ a medio, atque ideo termini tam dati, quam variabiles ſunt ejuſdem originis, ac naturæ. Quod nullo modo dici poteſt de æquationibus Seriei primæ, quæ cum repræſentent quadrata ſummæ, vel differentiæ $\frac{a}{2} \pm n$, vi ſuæ originis ac naturæ duobus quadratis ac duobus rectangulis ſimul eodem tempore conſtent neceſſe eſt. In hiſce igitur ſecundæ Seriei æquationibus facta n, vel m maxima $= \frac{a}{2}$, cui reſpondet m, vel n minima $= 0$; erit $MM = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} + \frac{a}{2} . \frac{a'}{2} + \frac{a}{2} . \frac{a'}{2} + \frac{a'}{2} . \frac{a}{2}$ $= \frac{a}{2} \frac{a}{2} - \frac{a}{2} . \frac{a'}{2} = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} + \frac{a}{2} . 0 = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} - \frac{a}{2} . 0$; vel contra $MM = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} + \frac{a}{2} . 0$ $= \frac{a}{2} . \frac{a}{2} - \frac{a}{2} 0 = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} + \frac{a}{2} . \frac{a'}{2} + \frac{a}{2} . \frac{a'}{2} + \frac{a'}{2} . \frac{a'}{2} = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} - \frac{a}{2} . \frac{a'}{2}$, quibus habentur valores omnes, qui convenire poſſunt in hoc limite quantitati incognitæ MM, ut inferius patebit. Hinc (V.[a]), vel (VII.[a]) formula facta maxima repræſentat quatuor rectangula ad diagonales (*fig.* 3.) ex. gr. BN, NA, AN′, N′B ordine diſpoſita æqualia quidem inter ſe, ſed diverſa, orta a mediis, quæ continentur in iis quadrilateris, quæ *Cap.* I. hujus *Libri* commemoravimus:

quorum ope in eodem ſemper Syſtemate baſis datæ inſiſtendo obtineri poſſunt æquationes illæ, quibus præfigenda eſt terminis finitis quantitas tranſcendens, non zero, ſed infinita evolvenda, atque pro re nata limitanda; quemadmodum innuimus §§. 29, & ſeqq. *Capitis* I. hujuſce *Libri*, & videre eſt in *Tabula* illic annexa, de quo in *Parte* II.ª diligentius agemus. At (VI.ª), vel (VIII.ª) facta zero non eſt niſi differentia rectanguli maximi $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ a medio, quod ad unam, vel ad alteram ex diagonalibus BN, vel NA &c, quæ ſunt latera quadrati inſcripti maximo, relatum eſt: atque ideo complexus horum duorum rectangulorum ad ſummum duo ex quatuor rectangulis maximis Cl, CL, Cl′, CL′ continere poteſt, eorumque differentia zero. Cum vero *Capite* I. hujus *Libri* oſtenderimus rectangulum maximum $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ poſſe etiam conſiderari ut quadratum $\left(\frac{a}{2}\right)^2$; poterunt ſingula hujuſmodi rectangula maxima aſſumi in æquationibus limitis ſecundæ Seriei tamquam vere quadrata $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, in qua hypotheſi fit MM $= 2.\frac{a^2}{4} + 2.\frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + (0)^2 = \frac{a^2}{4} - (0)^2$: ſed $\frac{2a^2}{4} = \overline{BN}^2$, $\frac{2a^2}{4} = \overline{NA}^2$: ergo MM $= \overline{BN}^2 + \overline{AN}^2 = \overline{NA}^2 + \overline{BN}^2 = \overline{BN}^2 - \overline{BN}^2 = B^2 = \overline{AN}^2 - \overline{AN}^2 = A^2 =$ &c $= \overline{AC}^2 + 0^2 = \overline{BC}^2 + 0^2$: ergo in hac hypotheſi MM in primo caſu eſt quadratum diagonalis AB trianguli rectanguli ANB, vel AN′B, vel NAN′ vel NBN′, quæ non pertinet in hoc caſu quadrato maximo l′L; atque oſtendit quadrato maximo diagonalis reſpondere quadratum nullum A^2, vel B^2, quæ tamen omnia inferius §. 28. & ſeqq. clarius explicanda erunt. Hic in anteceſſum declarandus erat triplex modus, quo eadem quantitas data $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ maxima in æquationibus limitis noſtræ *Tabulæ* conſiderari poteſt. Vel enim MM $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \begin{matrix} + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} \\ + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} \end{matrix} + \left(\frac{a'}{2}\right)^2$ conſiderari poteſt ut aggregatum duorum quadratorum, ac duorum rectangulorum, & tunc M^2 eſt quadratum ipſius $\overline{\frac{a}{2} + n}^2$ $\left(\text{facta } n \text{ maxima } \frac{a}{2}\right) = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}}^2$, ſive quadrati ſuper

per latere $\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}$ conſtituti, qui modus eſt communis, ad quem omnia quadrata vulgo referuntur; qui tamen modus conficiendi quadrata ex data & variabili conflata (ſi ut integra ſumantur) quomodo intelligendus ſit §. 11. hujus Capitis ſatis declaravit: vel M^2 maximum ſumitur tamquam aggregatum quatuor rectangulorum maximorum $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, vel ut complexus quatuor quadratorum $\left\{\frac{a}{2}\right\}^2$. De hujuſmodi tamen duobus ultimis modis altum in tota vulgari Analyſi ſilentium, ut minime mirum ſit, ſi adhuc præclara multa in tenebris delitelcant, quorum ignoratione tam gravia impedimenta identidem offendamus. In hiſce igitur *Libri* hujuſce Capitibus hæc primum novis Methodis a me adhibitis enucleanda erant, ut horum ope tandem ad numeris omnibus abſolutam æquationum ſecundi gradus ſolutionem manu veluti duceremur, coactus rei difficultate majora, ac ſublimiora impoſterum mihi & aliis evolvenda relinquere.

§. 20. Ceterum quemadmodum primæ quatuor formulæ, quæ dant quadrata ſummæ, vel differentiæ invicem tranſmutari poſſunt in quadrata differentiæ, vel ſummæ; ita contingit noſtris formulis, quæ a ſuo quæque deducta quadrato a ſecunda horizontali Serie exhibentur. Ita (VI.^{a}) quæ orta a modificatione (II.^{a}) convertitur in differentiam quadrati dati, vel rectanguli maximi $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, & rectanguli medii $\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n$ tranſmutari poteſt in (V.^{am}) facta $\frac{a^2}{4}-.\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n$ $=\frac{a^2}{4}+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+(-n)}.(-n)=\frac{a^2}{4}+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+m}.m$; ac viciſſim (VII.^{a}) in (VI^{am}), ſi fiat $\frac{a^2}{4}+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+m}.m=\frac{a^2}{4}-.\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+(-m)}.(-m)=\frac{a^2}{4}-.\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n$; facta ſcilicet permutatione variabilium, quas in hoc Syſtemate in contraria directione fluere ſuperius oſtendimus. Quare iſtiuſmodi æquationes ſecundæ Seriei, ſi reducantur omnes ad ſignificandam differentiam rectanguli maximi a medio, exhibent æquationes homologas $MM=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}-.\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.n=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}-.\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}.m$, de quibus egimus in *Capite* I. hujus *Libri*, quæ in limitibus dant MM $=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}-\frac{a}{2}.\frac{a'}{2}=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, facta $n=\frac{a}{2}$ maxima, cui reſpondet $m=0$ minima; & viceverſa. Itaque, hac facta formularum modificatione, maximum nequit

 exce-

excedere valorem $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, quando in (I.ª), & (III.ª) maximus valor æqualis erat $4 \cdot \frac{a^2}{4}$, ſive æqualis quadrato maximo.

§. 21. Porro ut æquationes ſecundæ Seriei horizontalis noſtræ *Tabulæ* ad ſupra dictam formam omnes reducantur, ſatis erit in æquationibus hujuſce ſecundæ Seriei ſequenti uti ſubſtitutione: nempe in (V.ª) fiat $\frac{a}{2} + n = m$, in (VI.ª) $\frac{a}{2} - n = m$, in (VII.ª) $\frac{a}{2} + m = n$, & tandem in (VIII.ª) $\frac{a}{2} - m = n$. Hiſce ſubſtitutionibus peractis formulæ ſecundæ noſtræ Seriei convertuntur in formulas Seriei tertiæ, quæ, cum m vel n ex conditione Syſtematis baſis datæ nequeat eſſe major $\frac{a}{2}$, ad eamdem formam omnes reducuntur, ac ſingulæ exhibent differentiam rectanguli maximi a medio. Hoc modo ſemper intra limites quadrati maximi a^2 continentur, atque omnia ad Syſtema baſis datæ referri poſſunt ope circulationis, quam innuimus, quin extra hoſce limites egrediantur. In iſtis tamen ope variabilium m, & n, quæ alternatim in iſtis formulis continentur, quæ ab eadem æquatione Syſtematis linearis baſis datæ $m + n = \frac{a}{2}$ proficiſcuntur, obtinentur æquationes homologæ omnes intermediæ, quæque ſunt in limite maximo & minimo. Nam (IX.ª) & (X.ª), quæ iiſdem ſymbolis expreſſæ ſunt, licet videantur identicæ, tamen ſingulæ ad diverſos axes A B, N'N (*Tab.* V. *fig.* 3.) applicari poſſunt, atque eodem modo (XI.ª) & (XII.ª): hæ vero erunt homologæ duabus primis. Facta igitur $m = 0$, erit Series tertia horizontalis

IX.ª X.ª

$$MM = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

XI.ª XII.ª

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + \left\{\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}\right\} \cdot \left\{\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right\} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}\right\} \cdot \left\{\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right\};$$

ſcilicet primæ duæ minimæ, aliæ duæ maximæ. Facto igitur rectangulo $\left\{\frac{a}{2} + m\right\} \cdot \left\{\frac{a}{2} - m\right\} = \overline{AC + CD} \cdot \overline{BC - CD} = AD \cdot BD = AD \cdot DE$; erit huic homologum $\left\{\frac{a}{2} + n\right\} \cdot \left\{\frac{a}{2} - n\right\} = \overline{N'C + CD'} \cdot \overline{NC - CD'}$ =

$= N'D'.ND' = N'D'.D'E$; & , facta $m = 0$, erit $MM = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - .AC.CN$
$= \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - (N'N.N)$. Sed ut primum $MM = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - AC.CN$ ſit zero, neceſſe eſt ſit $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ identicum cum $AC.CN$ (ex dictis in *Libro* I. & in hoc II.); ergo $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = AC.CN$, ideoque $MM = AC.CN - AC.CN$
$= Cl - Cl$: ſed vidimus in Capite I. hujuſce *Libri* rectangulo $N'N.N$ æquali zero reſpondere rectangulum maximum $N'C.CB$ quadrilateri $N'L'BN$; ergo in hac ſecunda erit $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = N'C.CB$; ac proinde $MM = AC.CN - AC.CN$
$= N'C.CB - .N'N.N$, & rectangulo MM minimo $= oCl$ reſpondebit rectangulum maximum e diametro oppoſitum CL', quemadmodum vidimus §. 35. *Cap.* I. hujus *Libri*: idem dicas velim de aliis combinationibus. Quæ igitur æquationes in hac Serie tertia ſunt homologæ indicant rectangula, quæ in diverſis axibus ſumi debent.

§. 22. Æquationes itaque tertiæ Seriei ſingulæ differentiam rectanguli maximi a medio exhibent hac lege ope variabilium m, & n ſigno $=$ conjunctæ, ut creſcente valore unius, valor alterius decreſcat, donec valore unius facto maximo, alterius valor fiat minimus æqualis zero; ac viceverſa. Ut vero id conſtructione obtineamus, poſito ex. gr. rectangulo maximo $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = NC.CB$ (*fig.* 3.) quadrilateri $NN'BL$, & facta $NC + Cd' = \frac{a}{2} + m$, $N'C - Cd'$
$= N'd' = d'E'$, ut ſit rectangulum medium quadrilateri $NN'BL (NC + Cd').(N'C - Cd')$
$= Nd'.d'E' = \left(\frac{a}{2} + m\right).\left(\frac{a}{2} - m\right)$; erit

$$MM = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} + m\right).\left(\frac{a}{2} - m\right) = NC.CB - (NC + Cd').(N'C - Cd').$$

Sed quo magis augetur, vel minuitur rectangulum hoc medium $Nd'.d'e'$, neceſſario minuitur, vel augetur inverſo modo alterum rectangulum medium $AD.DE$ quadrilateri $ABNl$, cum ſit $CD = d'E' = N'd'$, & $DE = DE'$
$= Cd'$: ergo eodem tempore hujuſmodi æquatio verificetur oportet

$$MM = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left\{\frac{a}{2} + m\right\}.\left\{\frac{a}{2} - m\right\} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left\{\frac{a}{2} + n\right\}.\left\{\frac{a}{2} - n\right\},$$ ſcilicet

$MM = NC.CB - (NC + Cd').(N'C - Cd') = AC.CN - (AC + CD).(BC - CD)$: in quibus creſcente uno rectangulo medio, alterum decreſcit; & viceverſa: ideoque

que rectangulum MM in primo caſu minuitur, in altero augetur; & viceverſa. Facta igitur C d″ maxima = CN′, ſive $m = \frac{a}{2}$, erit CD = o = C, ſive n = o: & æquatio

$$MM = NC.CB - (NC + CN').(N'C - CN'') = AC.CN - (AC).(BC)$$
$$MM = NC.CB - (NN').N' \qquad = AC.CN - AC.CN:$$

ſive in primo caſu rectangulum maximum MM = NC.CB = CL, cui reſpondet alterum homologum nullum, ſive MM = AC.CN − AC.CN = CI − CI = o. At ſi ponamus Cd″, ſive m = o = C; erit d″E″, ſive CD maxima $= \frac{a}{2}$ = CB: ergo in hac hypotheſi

$$MM = NC.CB - NC.N'C = AC.CN - (AC + CB).(BC - CB), \text{ſive}$$
$$MM = NC.CB - NC.CB = AC.CN - AB.B$$

: & in hoc caſu primum rectangulum nullum MM = CL − CL = o, & maximum homologum MM = AC.CN = CI.

§. 23. Hinc evidenter patet neceſſitas hujuſmodi æquationum homologarum, quæ ſigno = conjunguntur; quæ tantum abeſt ut inter ſe æquales ſint, ut in hoc Syſtemate ſemper una altera minor ſit oporteat; &, facta una maxima, altera ſit zero. Eruitur etiam non niſi quæ identica ſunt diverſo ſigno affecta aut fieri zero, ſi æqualia, aut ſubtractionem ſignificare: item diverſa eſſe quæ fiunt maxima, vel minima in primo caſu, ac in ſecundo. In primo enim caſu rectangulum (*fig. ead.* 3.) CI fit zero, & maximum CL; in ſecundo CL fit nullum, & maximum CI. Ac tandem hujuſce unius exempli appoſitione confirmatur quicquid novum, & vix credibile in toto hoc Opere demonſtravi. Quod diximus in hac hypotheſi rectanguli maximi $\frac{a}{2}.\frac{a''}{2}$ = NC.CB, & $\frac{a}{2}.\frac{a'}{2}$ = AC.CN applicetur eadem methodo ceteris caſibus, quos amplectuntur æquationes tertiæ noſtræ Seriei horizontalis, quæ exprimunt rectangula a quadrilateris Capite I. hujus Libri commemoratis comprehenſa, oſtenduntque MM vicem gerere rectangulorum, quorum altitudines a lateribus quadrati maximo inſcripti concluduntur, cujus proinde latera ſunt limites rectilinei in hac hypotheſi, ipſumque quadratum inſcriptum locus geometricus, ad quem hujuſmodi rectangula referuntur.

§. 24. Formulæ tamen Seriei tertiæ ortæ a formulis ſecundæ Seriei, ſubſtitutione facta §. 21., quæ naturam rectanguli referunt, differentiam rectanguli maximi a medio tunc ſignificant, ſi in limite rectangula minima diverſo ſigno affecta ſint identica: ideoque §. 22. conſtructionem ita inſtituimus, ut in extremo limite ad identitatem rectangulorum maximorum perveniremus, quæ ſigno contrario affecta ſe ſe invicem, atque MM, cui comparantur, deſtruerent. Non eſt tamen cur & ipſæ Seriei tertiæ formulæ etiam ſummam repræſentare nequeant, quemadmodum §§. 26, 36, & ſeqq. Cap. III. hujus Libri contingere for-

formulis Seriei ſecundę oſtendimus. Nam (ut clarius res tanti momenti percipiatur) ſi ſolutam ponamus formulam (III.am) (quam revera pertinere ad Syſtema baſis datę §§. 17, & 40. Cap. ejuſdem III. docuimus) a vinculo coeficientis 2, ut ſit $\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}(-n)+\frac{a}{2}(-n)+(-n)^2=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.(-n)$; a forma quadratica ad rectangularem tranſire novimus ex §. 40. Cap. ejuſdem III. Ponatur rectangulum maximum, atque conſtans (*Tab.* V. *fig.* 3.) $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}=CI'$, ſive ortum a rectangulo AD.DE' facto maximo, ut ſit ęquatio

$$\frac{a}{2}.\frac{a}{2}+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.(-n)=CI'+\overline{AC+CB-BD}.(-DE');$$

& quoniam $-DE'=DE$, $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.(-n)=CI'+\overline{AC+CB-BD}.DE$,

&, facta BD maxima = BC, fit DE = CN: ergo $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}+\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n}.(-n)$ $=CI'+\overline{AC+CB-BC}.CN=CI'+AC.CN=CI'+CI$, quę eſt ſumma, licet formula ſpecie tenus differentiam ſignificare videatur. Dabit vero differentiam, ſi in formula fiat $CI'+\overline{AC+CB-BD}.(-DE')$ $=CI'-.\overline{AC+CB-BD}.DE'$; in quo caſu, facta BD maxima $=\frac{a}{2}$, fit $DE'=CN'$, & ęquatio in limite

$$\frac{a}{2}.\frac{a}{2}-\left\{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right\}.n=CI'-.\overline{AC+CB-BC}.CN'=CI'-.AC.CN'$$

$=CI'-CI'=0$. Idem continget formulę (IV.a), quę repręſentat differentiam quadratorum. Nam (IV.a) $\frac{a^2}{4}-2.\frac{a}{2}(-n)+2(-n)^2-(-n)^2$

$$=\left\{\frac{a}{2}\right\}^2-2.\frac{n}{2}(-n)+(-n)^2=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}-.\overline{\frac{a}{2}.\frac{a}{2}-(-n)}.(-n)$$

$=CI'-.\overline{AC+CB-(-DE)}.(-DE)$: &, quoniam $-DE=DE'$, erit $MM-CI'-.\overline{AC+CB-DE'}.DE'=CI'-.\overline{AC+CB-BD}.DE'$; &, facta $BD=BC$, eſt $DE'=CN'$: ergo $MM=CI'-.\overline{AC+CB-BC}.CN'$ $=CI'-.AC.CN'=CI'-CI'=0$. Verum quoniam $-CN'=CN$, ſi in hac ęquatione ponatur CN pro $-CN'$, erit $MM=CI'-.CN'.AC=CI'+CN.AC=CI'+CI=N'I=NI'$. Omitto ceteras combinationes, quas Cap. I. hujus Libri recenſuimus. Porro for-

formulę Seriei tertię deſcendunt a formulis Seriei ſecundę poſita $\frac{a}{2} - n = m$; ergo quod contingit formulis Seriei ſecundæ, retenta eadem natura rectangulari, contingat neceſſe eſt & formulis Seriei tertiæ. Et ſane data æquatione MM

$$= \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}\,.\,n = Cl' + \overline{AC + CB - BD}\,.\,DE,$$

factaque $\frac{a}{2} - n = m$, erit $n = \frac{a}{2} - m$

$CB - BD = CD$, $BD = BC - CD$: peracta hac ſubſtitutione

orietur $MM = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + m}\,.\,\overline{\frac{a}{2} - m} = Cl' + \overline{AC + CD}\,.\,\overline{BC - CD}$:&,

facta $CD = o$ æquatio erit $MM = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} = Cl' + AC.BC = Cl' + Cl$;

quæ tamen, ſi fiat $MM = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.(-n) = Cl' + \overline{AC + CB - BD}.(-DE')$

$= Cl' -.\ \overline{AC + CB - BD}\,.\,DE'$, facta ſubſtitutione invenies

$MM = Cl' -.\,\overline{AC + CD}\,.\,\overline{BC - CD} = Cl' - AC.BC = Cl' - Cl' = o.$

Formulæ igitur Seriei tertiæ licet differentiam ſemper exhibere videantur, tamen etiam ſummam ſignificare poterunt, prout rectangula maxima ſumuntur identica, vel diverſa. Si ſumantur identica, ſemper differentiam exhibebunt, ſi ſumantur diverſa, quocumque ſigno ſint affecta, ſemper ſummam oſtendent. Formulæ vero Seriei tertiæ non differunt a ſecundis, niſi in hoc, quod ſcilicet variabilis, quæ in ſecundis ab uno vel altero extremo puncto A, vel B originem ducebat fluendo verſus centrum C, in formulis Seriei tertiæ variabilis originem ducit a centro C hinc, vel inde ab hoc centro fluendo diſcedens.

§. 25. Hæc tamen differentia in cauſſa eſt cur formula elegantius, atque univerſalius caſus omnes, qui evenire poſſunt, ſub ſe complectatur. Nam cum in æquatione $MM = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} = Cl' + AC\,.\,BC$ maximum rectangulum variabile $AC.BC$ conſtet duobus factoribus æqualibus, ſed diverſis & ad angulum rectum; tam AC poterit repræſentare normalem CN, vel CN', manente identica, & in eadem poſitione BC; quam BC, manente eadem AC, poterit eſſe CN, vel CN'. In primo caſu, facta $MM = Cl' + AC\,.\,BC$, erit

$$MM = Cl' + CN\,.\,BC = Cl' + CN'\,.\,BC$$
$$= Cl' + CL \quad = Cl' + CL'$$; in ſecundo

MM

$$MM = Cl' + AC.CN = Cl' + AC.CN'\text{: \& facta } MM$$
$$= Cl' + Cl \qquad = Cl' + Cl'$$
$$= Cl' - AC.BC\text{, erit}$$
$$MM = Cl' - CN.BC = Cl' - CN'.BC = Cl' - AC.CN = Cl' - AC.CN'$$
$$= Cl' - CL = Cl' - CL' = Cl' - Cl = Cl' - Cl'\text{; vel}$$
$$(\text{cum ſit } CN = - CN')$$
$$= Cl' + CN'.BC = Cl' + CN.BC = Cl' + AC.CN' = Cl' + AC.CN'$$
$$= Cl' + CL' = Cl' + CL = Cl' + Cl' = Cl' + Cl\text{:}$$

quæ ultimæ recidunt in ſuperiores: rectangula igitur, quæ ſigno negativo afficiuntur, niſi ſumantur identica, ſemper ſummam ſignificare, numquam differentiam cenſenda ſunt, poſito uno, vel alterò rectangulo conſtanti. Id accidit poſita in ſecunda Serie n maxima $= \frac{a}{2}$, & in tertia $m = 0$. Quod ſi fiat in ſecunda $n = 0$, & in tertia $m = \frac{a}{2}$, tunc formulæ omnes tam ſecundæ, quam tertiæ Seriei æquales fiunt eidem valori $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$. Verum, cum in æquatione lineari $\frac{a}{2} - n = m$, facta m minima $= 0$, neceſſario debeat eſſe altera n maxima $= \frac{a}{2}$, ac viceverſa; data una formula ſecundæ, vel tertiæ Seriei maxima, vel minima, exiſtat altera minima, vel maxima neceſſe eſt: atque ideo ſemper maximis, vel minimis datis ſubintelligendæ ſunt minimæ, vel maximæ, quæ primis reciprocantur: atque in caſibus mediis creſcente una, altera decreſcente ad æqualitatem perveniant oportet; quod tunc fit, quando in ſecunda Serie eſt $n = 0$, in tertia $m = \frac{a}{2}$.

§. 26. Rurſus ex formulis Seriei tertiæ illud etiam eruitur, maximum ad quem pervenire poteſt valorem formula quadratica primæ Seriei, quando ab eo vinculo, quo a coeficiente 2 obſtringebatur, liberata, rectangularem naturam ſubire cogitur, non poſſe excedere ſummam duorum rectangulorum maximorum $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$: atque ideo V.am & VII.am formulas ſecundæ Seriei, ut expreſſæ ſunt, non poſſe ab uno quadrato Syſtematis baſis datæ ad rectangularem formam translato proficiſci. Nam V.a, & VII.a facta ſubſtitutione mutantur in IX.am ac XI.am: ſed in IX.a & XI.a $\frac{a}{2}$ ſemper major m, vel n, ergo $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \left\{\frac{a}{2} + m\right\}.\left\{m - \frac{a}{2}\right\}$

$= \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left\{\frac{a}{2} + m\right\}.\left\{\frac{a}{2} - m\right\}$, quæ per §. 24. nequit ſuperare valorem maximum $2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$; ideoque & ipſa V.ª & VII.ª, ſi a Syſtemate baſis datæ deriventur, ad VI.^{am} vel VIII.^{am} reducendæ ſunt. Igitur V.ª & VII.ª, ut expreſſæ ſunt, pertinent ad Syſtema baſis variabilis, in quo n, vel m indefinite creſcere poteſt; vel ſi ad idem Syſtema baſis datæ eas referre velis, ſumendæ ſunt tamquam complexus plurium rectangulorum Syſtematis baſis datæ; atque eo modo tractandæ, quem innuimus *Cap.* I. §. 28, & ſeqq. & quem in *Parte* II., quando de *legitima Syſtematum diviſione*, & *unione* agemus, fuſius explicabimus. Hoc convenit cum iis, quæ *Cap.* III. hujus *Libri* §. 17. diximus, in quo loco ſtatuimus formulam, quæ dat quadratum majoris variabilis ita efferendam eſſe, ut æqualis ſit $\frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2$, ut ſoluta a quadrato in ſequentem $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.(-n)$ converti poſſit, quæ vel ſummam rectanguli maximi & medii ſub hac forma $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$, vel differentiam ſub hac altera $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - .\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$ referre poteſt, ut ſuperius diximus. Atque inſuper denuo confirmatur verum officium ac munus ſigni $=$, quod in eodem Capite ſtatuimus: cum in prima Serie, facta $n = \frac{a}{2}$ maxima, ſit quadratum maximum $\frac{4a^2}{4}$, & minimum $\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = (0)^2$; & facta $n = 0$, quadrata æquentur inter ſe, atque ideo & ipſæ variabiles: in ſecunda vero Serie relata ad Syſtema baſis datæ, & in tertia maximus valor æqualis eſt $2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, minimus $= 0$, & medius $= \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$; prout ponitur $n = \frac{a}{2}$ in ſecundis, $m = 0$ in tertiis; vel $n = 0$ in ſecundis, $m = \frac{a}{2}$ in tertiis.

§. 27. Quod ſi quadratum variabile M², quod æquale fecimus primæ Seriei, ſpectetur; patebit in aſſumpta prima ſuppoſitione revera quadratum eſſe, cum æquale poſitum fuerit quadratis proprie dictis: ſed tamen relatum ad III.^{am} æquale eſt quadrato ſummæ, ſive quadrato majoris variabilis; relatum vero ad IV.^{am}

IV.^{am} æquale eſt quadrato differentiæ, ſive quadrato minoris variabilis. Hoc vero M^2 relatum ad ſecundam vel tertiam Seriem ſtatim naturam quadrati amittit, atque illam aſſumit, quam a formulis diverſis, quibus comparatur, ſubire cogitur. Hîc igitur, termino comparationis mutato, naturam aſſumit rectangularem, nec ſimplicem, ſed duplam; fitque $M^2 = MN + MN$, quorum unum conſtans debet eſſe, alterum variabile, ut æquatio in duas dividi poſſit

$$MN = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}, MN = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n.n} = \left(\frac{a}{2} + m\right).\left(\frac{a}{2} - m\right),$$ ut inferius magis magiſque patebit. Non eſt igitur a producto variabilis, neque ab ejus forma deſumenda natura, ac valor quantitatis, quam repræſentat; ſed a producto & forma terminorum, quibus comparatur: quæ enim in uno caſu legitime illi tribuebatur, mutatis circumſtantiis atque comparationis terminis, male illi ſervatur. Porro cum in methodo communi a primo comparationis termino recte deſumatur valor, & natura variabilis M^2; male tamen, ac præpoſtere agitur, cum transformata prima formula, cui comparatum fuerat, atque in aliam naturam converſa, creditur M^2 eamdem naturam quadraticam ſervare, quia eamdem formam, qua vera quadrata efferuntur (ſcilicet exponente 2), etiam mutatis circumſtantiis præſeferre videtur. Quanti momenti ſit ad hanc penitus neglectam veritatem diligenter animadvertere in calculo, ex dicendis patebit, cum errores ſane graviſſimos ex hujuſce veritatis ignoratione, aut negligentia in Analyſi clam irreptos pro re nata primus patefecero.

§. 28. Præter vero haſce a nobis hactenus commemoratas ex varia unius formulæ modificatione ortas formulas, ulterius progredi licet, ſi animadvertamus formulas tertiæ Seriei, quæ ut rectangula ſumpta fuerunt, poſſe conſiderari ut complexus quadratorum, quorum ſingula ab eadem identica radice in ſe ducta gignantur. Hoc enim ipſæ formulæ tertiæ Seriei ultro nobis offerunt, quæ omnium conſenſu in formulas Seriei horizontalis quartæ calculo vulgari convertuntur. Quoniam vero in hoc Syſtemate baſis datæ tam m, quam n ſemper minores ſunt $\frac{a}{2}$, cui in limite maximo æquales ſunt; erit tam $\frac{a^2}{4} - m^2$, quam $\frac{a^2}{4} - n^2$ differentia quadrati maximi a medio ſemper poſitiva, & ſemper minor ipſo quadrato $\frac{a^2}{4}$, ſi excipias caſum, in quo m, vel n facta zero, hujuſmodi differentia æqualis fit quadrato maximo $\frac{a^2}{4}$. In hac hypotheſi MM, quod a natura quadratica primum ſumpta comparatum ſecundæ vel tertiæ Seriei ad rectangularem translatum fuerat, iterum in quadratum convertitur, ſi referatur ad quartam Seriem; hac tamen differentia, quod in prima Serie vicem gerebat quadrati majoris, vel minoris variabilis, hîc quadrati lateris trianguli rectanguli ſuper (*fig.* 3.) AC, vel CB, vel CN, vel CN' conſtituti, cujus locus geometricus in ſequenti Capite dabitur. Nunc ponamus hujuſmodi triangulum eſſe (*Tab.*

 VI.

VI. *fig.* 10.) CEB, cujus latera CE, BE variabilia dicantur n, m; erit $M^2 = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a^2}{4} - m^2\right\} = \frac{a^2}{4} - n^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CE}^2$: nam $\overline{CE}^2 = n^2 = \frac{a^2}{4} - m^2$; ergo $- \left\{\frac{a^2}{4} - m^2\right\} = - n^2$, ac proinde ex Serie quarta habebitur

$$M^2 = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a^2}{4} - m^2\right\} = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a^2}{4} - n^2\right\}$$

$$= \frac{a^2}{4} - n^2 = m^2 = \overline{BE}^2 = \frac{a^2}{4} - m^2 = n^2 = \overline{CE}^2.$$

In hac itaque hypotheſi M^2 vere quadratum intra limites quadrati $\frac{a^2}{4}$ maximi, & $(o)^2$ quadrati minimi continetur: & quoniam creſcente m^2 decreſcit n^2, dato uno, alterum neceſſario ſequatur oportet. Quare dato maximo $= \frac{a^2}{4}$ neceſſario reſpondet quadratum $(o)^2$ minimum, & in caſibus mediis dato quadrato majori, alterum minus, ſed majori homologum uno eodemque tempore exiſtat oportet. Non poſſunt igitur hujuſmodi quadrata inter ſe diſſociari: ideoque formulæ Seriei quartæ dant æquationes homologas huic hypotheſi aptas ſigno $=$ inter ſe copulatas, quæ ſemper valore, non natura differunt inter ſe, cum una ſemper major altera ſit oporteat, donec in extremis limitibus, facta una æquali quadrato maximo $= \frac{a^2}{4}$, altera ſit $= (o)^2$ quadrato minimo; nec inter ſe æquales fieri poſſunt, niſi in unico caſu, in quo $m^2 = n^2 = \frac{a^2}{8}$.

§. 29. In hoc Syſtemate baſis datæ formulæ Seriei tertiæ, quæ vere pertinent ad hoc Syſtema, ſunt (X).ª & (XII).ª, utpote ortæ a (II).ª vel (III.ª) formula Seriei primæ, quarum formam eſſe propriam Syſtematis baſis datæ Capite ſuperiori oſtendimus. Hinc ſignum *minus* non quantitati datæ $\frac{a}{2}$ præfigendum eſt, ſed variabili m, vel n; ideoque rectangulum $\left\{\frac{a}{2} + m\right\} \cdot \left\{\frac{a}{2} - m\right\}$ ſigno negativo eſt afficiendum: facile tamen in hac Serie tam (IX.ª), quam (XI.ª) ad formam huic Syſtemati accomodatam reducuntur, cum noverimus in hoc Syſtemate $\frac{a}{2}$ ſemper majorem eſſe m, vel n: ac proinde rectangulum $\left\{\frac{a}{2} + m\right\} \cdot \left\{m - \frac{a}{2}\right\}$ eſſe neceſſario negativum, & æquale $- \left\{\frac{a}{2} + m\right\} \cdot \left\{\frac{a}{2} - m\right\}$: quod non ita facile

in

in ſeriebus ſuperioribus percipi poteſt, in quibus majori induſtria ſuperius opus fuit, ut ad Syſtema baſis datæ reducerentur. Hinc colligas velim quantum interdum conferant ad ſimplicitatem & perſpicuitatem formulis conciliandam opportunæ adhibitæ ſubſtitutiones. Ceterum formulæ Seriei quartæ (XIV.ª) M^2

$$= \frac{a^2}{4} - \left\{ \frac{a^2}{4} - m^2 \right\} = \frac{a^2}{4} - \left\{ \frac{a^2}{4} - n^2 \right\}$$
$$= \frac{a^2}{4} \quad - n^2 \quad = \frac{a^2}{4} - \quad m^2$$

ideo ſunt in proprio Syſtemate baſis datæ collocatæ, quia ortum ducunt a (X.ª) & (XII.ª) Seriei tertiæ, quæ jam ad Syſtema baſis datæ ſunt determinatæ: (XIII.ª) vero, ac (XV.ª) ad alterutrum Syſtema pertinere quidem poſſunt, prout $\frac{a}{2}$ majorem, vel minorem m, aut n velis; ſed nondum ſunt determinatæ, utpote manantes a (V.ª) & (VII.ª), quæ & ipſæ indeterminatæ ſunt, cum proficiſcantur a quadrato $\frac{a^2}{4} + \frac{2an}{2} + n^2$, vel ab $\frac{a^2}{4} + \frac{2a}{2} m + m^2$, quæ (ut vidimus *Cap.* III. hujus *Libri*) apta quidem ſunt ad utrumque Syſtema amplectendum, neutri tamen applicata.

§. 30. Sumamus nunc formulas (XVII.ᵃᵐ) & (XIX.ᵃᵐ) $M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 = \frac{a^2}{4} - m^2$, quas deduximus a quadraticis (XIV.ª) & (XVI.ª), atque ideo & ipſæ quadraticæ. Verum quemadmodum hæ a rectangulari natura ad quadraticam tranſlatæ fuerunt; ita illæ a quadratica, quam habent ad rectangularem transferri poſſunt, ſi fiat $MM = \frac{a^2}{4} - n^2 = \left\{\frac{a}{2} + n\right\} . \left\{\frac{a}{2} - n\right\} = \frac{a^2}{4} - m^2 = \left\{\frac{a}{2} + m\right\} . \left\{\frac{a}{2} - m\right\}$, in quo caſu $M = \frac{a}{2} + n$, $M = \frac{a}{2} - n$ inæquales, nec amplius MM quadratum, ſed $MM = MN = \left\{\frac{a}{2} + n\right\} . \left\{\frac{a}{2} - n\right\} = \left\{\frac{a}{2} + m\right\} . \left\{\frac{a}{2} - m\right\} = MN$, ſive rectangulum. Quod ſi in hac ultima æquatione ponatur $\frac{a}{2} - n = m$ in primo membro, $\frac{a}{2} - m = n$ in ſecundo; erit

$$MN = \overline{\frac{a}{2} + n} . \overline{\frac{a}{2} - n} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m} . m = \overline{\frac{a}{2} + m} . \overline{\frac{a}{2} - m} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} . n;$$

vel facto $\frac{a}{2} + n = m$, $\frac{a}{2} + m = n$,

MN

$$MN = \overline{\tfrac{a}{2}+n}\,.\,\overline{\tfrac{a}{2}-n} = \overline{m}\,.\,\overline{\tfrac{a}{2}+\tfrac{a}{2}-m} = \overline{\tfrac{a}{2}+m}\,.\,\overline{\tfrac{a}{2}-m} = \overline{n}\,.\,\overline{\tfrac{a}{2}+\tfrac{a}{2}-n},$$

eadem ac ſuperior, ſed inverſa; ita ut ſi ex. gr. (*fig.* 3.) in ſuperiori ſit $M = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m = AD$, & $N = m = BD$; erit in hac M $= Ad$, & $N = Bd$, &c, ut *Cap.* I. hujus *Libri* admonuimus. Hoc vero peracto ad rectangula media A E &c. in quadrilateris A B N I &c. *Cap.* I. commemoratis contenta, atque ad limites rectilineos quadrati inſcripti devenimus. En igitur quomodo a limitibus rectilineis quadrati maximi L l′ a prima Serie indicatis ad limites rectilineos quadrati N N′ inſcripti maximo L l′, quibus rectangulum datum ſemper applicatur, ſola quadratorum primæ Seriei mutata forma, tranſitus fit ad ſecundam Seriem. Ex hac, ope ſubſtitutionis $\frac{a}{2} - n = m$, devenitur ad Seriem tertiam rectangularem, qua licet ad quadrata ad angulum rectum, ſive ad Seriem quartam devenire; modo quæ erant rectangula ut quadrata conſiderentur. Quæ ſeries quarta, ſubſtitutione $\frac{a^2}{4} - n^2 = m^2$, & $\frac{a^2}{4} - m^2 = n^2$, exhibet formulas quadraticas (XVII.^{am}), ac (XIX.^{am}), quæ iterum, cum ad rectangula reduci poſſint a formulis (XXI.^{a}) & (XXIII.^{a}) indicata, harum ope facilis patet aditus ad (XXV.^{am}) & (XXVI.^{am}), ſive iterum ad rectangula media A E &c. a *figura* 3.^{a} exhibita. Vide igitur, quomodo aut variata tantum forma atque connexione terminorum inter ſe formulæ unius, aut ſubſtitutione æqualis pro æquali, aut pro varia natura, quæ iiſdem productis tribuitur, productum M M, quod formulæ (III.^{a}) primum comparatum fuerat, hujuſce transformatione artificiorum ope, quæ ſupra indicavimus, valorem modo, modo naturam quantitatis, modo utrumque mutare poſſit: ut tandem opinio illa, quæ ſigno = non niſi notionem æqualitatis nimis anguſtam tribuit, penitus tollatur.

§. 31. Fateor equidem & libens ſignum hoc æqualitatem, atque etiam identitatem ſignificare aliquando poſſe; ſed ex dictis luce clarius patet quam longius hujuſmodi notio amplianda ſit, ut totum hoc negotium difficillimum ſane, ac apprime neceſſarium pleno in lumine collocetur. Nam cum valor M^2 comparati ſingulis formulis Syſtematis baſis datæ noſtræ *Tabulæ* ſemper pendeat a valore n, quæ eſt unica variabilis intra certos limites conſtituta, valor etiam M^2 intra certos limites & ipſe concludatur oportet; qui limites tam a vario valore ipſius n, quam a varia modificatione formulæ diverſi aſſignantur. Triplici igitur modo valor M^2 mutari poteſt: primo, eadem ſemper in formulis ſervata forma, mutatur valor M^2 mutatione tantum valoris n; ſecundo, mutata tantum earum forma, retento eodem valore ipſius n; tertio denique, quando & forma, & valor n mutatur. Itaque in aſſumpta ex. gr. Seriei primæ noſtræ *Tabulæ* æquatione

ne $M^2 = \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2$ æqualitas quidem inter utrumque membrum intercedere poteſt, dummodo M^2 is tribuatur valor, qui cum ſecundo membro conciliari poſſit: ſed ex dictis valor n in ſecundo membro intra limites zero minimum, & $\frac{a}{2}$ maximum contineri debet, ut eodem tempore ſuæ homologæ æquationi $\frac{a^2}{4} - 2 . \frac{a}{2} - n . n - n^2$ ſatisfaciat: ergo M^2 omnes illi valores tribui poterunt, qui intra limites $\frac{a^2}{4}$ minimum, & $\frac{4a^2}{4} = a^2$ maximum continentur. At quoniam eſt $M^2 = \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}(-n) + n^2 = \frac{a^2}{4} - 2 . \frac{a}{2} - n . n - n^2$, quæ oritur a varia ratione efferendi formulam; hac facta mutatione, retento etiam in utraque eodem valore n, nequit M^2 utriſque ſatisfacere, niſi in unico caſu, in quo, facta $n = 0$, quadratum $M^2 = \frac{a^2}{4}$ minimum primæ formulæ æquale eſt quadrato maximo $\frac{a^2}{4}$ ſecundæ: in ceteris caſibus ſi M^2 æquale ſit primæ, ipſius valor ab $\frac{a^2}{4}$ minimo uſque ad $\frac{4a^2}{4}$ maximum procedit: ſi vero æquale fiat ſecundæ, valor M^2 a $(0)^2$ minimo non ultra $\frac{a^2}{4}$ maximum progredi poteſt: ideoque utriſque eodem tempore nequit ſatisfacere. Sed data una formula neceſſario conſequitur altera: ergo ſignum $=$, quo ſuperiores formulæ inter ſe, & cum M^2 connectuntur, non poteſt æqualitatem ſignificare, ſed tantum indicare non poſſe M^2 affici valore, quem requirit prima formula, quin & valorem a formula ſecunda quæſitum ſuſcipiat, ut utriſque ſatisfaciat. Itaque ſi valorem datum tribuas M^2, quod convenit primæ formulæ, & hanc in ſecundam convertas, in errorem ſane graviſſimum incideris, ſi hanc ſecundam eidem valori dato M^2 æqualem eſſe poſſe judicaveris. Quare non arbitrio, & inconſulto quantitatibus, quæ ſymbolis datis in Analyſi deſignantur, quicumque valor (ut vulgo fit) tribui poteſt, eo ſolum nomine, quod datæ ſint; ſed & ipſæ intra limites neceſſarios conſtitutæ legibus coercendæ ſunt, quas formula, cui comparantur, jubet; quæ cum artificiis indicatis naturam, vel valorem, vel utrumque mutare poſſit, mutantur etiam limites intra quos valor M^2 datus concludendus eſt.

§. 32. Rurſus, ut in eodem exemplo perſiſtamus, ſi ponamus in æquatione ſuperiori $M^2 = \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}(-n) + n^2$ valorem n majorem $\frac{a}{2}$, ita ut M^2

exce-

excedat valorem a^2, nemo erit qui legitime id fieri poſſe neget: tamen valorem hunc majorem $\frac{a}{2}$ loco n in æquatione propoſita ſubſtitutum repugnare ſenties, ſumpta æquatione huic homologa $\frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2} - n} - n^2$. Cum enim eodem tempore utrique ſatisfaciendum ſit, ex prima erit $M = \frac{a}{2} + (-n)$, ex ſecunda $M = \frac{a}{2} - n$; ſed, facta n in prima majori $\frac{a}{2}$, erit in ſecunda $M = \frac{a}{2} - n$ negativa, quæ oſtendit in hac hypotheſi $n > \frac{a}{2}$ in hoc Syſtemate repugnare: fieri enim nequit, hoc poſito, ut ſit $M + n = \frac{a}{2}$; repugnat enim in hoc Syſtemate baſis datæ, in quo duarum variabilium ſumma debet eſſe æqualis $\frac{a}{2}$, ponere unam ex iſtis variabilibus majorem baſi integra $\frac{a}{2}$. Hæc tamen repugnantia, in quam impingimus in hoc Syſtemate, facile tollitur, ſi facta permutatione variabilis in datam, & datæ in variabilem aſſumas formulam $M^2 = n^2 + 2n\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \frac{a^2}{4} = n^2 - 2.\overline{n - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}$, quam ad Syſtema baſis variabilis pertinere docuimus, in quo n nequit eſſe minor $\frac{a}{2}$. Nam, extracta radice, erit $M = n + \left\{-\frac{a}{2}\right\} = n - \frac{a}{2}$, & æquationes partiales homologæ $M = n + \left\{-\frac{a}{2}\right\}$, $M = n - \frac{a}{2}$; quæ æquatio utraque ſemper verificari poteſt, poſita $n = \frac{ga}{2}$, (g intra limites 1, & infinitum)

$$M = n + \left\{-\frac{a}{2}\right\} = \frac{ga}{2} + \frac{a}{2} = \overline{g+1}.\frac{a}{2}$$

$$M = n - \frac{a}{2} = \frac{ga}{2} - \frac{a}{2} = \overline{g-1}.\frac{a}{2}.$$

Ergo in hoc Syſtemate reſpectu primæ formulæ M^2 intra limites $\frac{4a^2}{4}$ minimum, & ∞ continetur, M^2 vero reſpectu ſecundæ a $(0)^2$ minimo uſque ad infinitum procedit. Si vero fiat $n < \frac{a}{2}$, prima quidem M^2, vel M repugnare non videtur; tamen ſuppoſitio hæc cum homologis conciliari nequit: fit enim utraque negativa, qua declaratur repugnare in hoc Syſtemate ſuppoſitionem hanc. Nam in

in æquatione $M + \frac{a}{2} = n$ ſemper n major eſſe debet $\frac{a}{2}$, nec niſi in limite minimo $= \frac{a}{2}$, facta $M = 0$: non poteſt igitur ea quantitas minor eſſe $\frac{a}{2}$, quę debet eſſe ęqualis ſummę $\frac{a}{2} + M$.

§. 33. Hinc alia non minus nova, quam neceſſaria eruitur veritas, quę quicquid de imaginario in §. 25. *Cap.* III. hujus *Libri* ſtatuimus ſemper magis confirmat, atque illuſtrat: imaginarium nimirum non ex ipſa extractione radicis quadratę quantitatis negativę actu peracta ortum ducere, quemadmodum Analyſtę omnes hactenus decreverunt, ſed altius ejus originem repetendam eſſe, in ipſa ſcilicet poſitivi cum negativo comparatione, a qua, extracta hinc inde radice, oritur illud, quod dicitur imaginarium. Si enim hanc ultimam conſecutionem repugnare contendunt, intelligant hanc repugnantiam prius exiſtere, antequam ipſa actu extrahatur radix, in ipſa nimirum ęquatione, qua fit poſitivum ęquale negativo; niſi eo modo intelligatur, atque tractetur, quo ſuperius & in *Cap.* III. docuimus. Nam ſi ad illud ipſum, quod primo ſumpſimus, Syſtema ęquatio illa referatur, abſurda eſt & repugnans, quia repugnat negativum fieri illud, quod ex natura Syſtematis neceſſario poſitivum ſit oportet: ideoque ęquatio poſitivi ęqualis negativo in eodem Syſtemate contradictionem involvit, quin ullum appareat in ipſa ęquatione radicis quadratę quantitatis negativę veſtigium. Quod ſi in calculo communi frequentiſſime hiſce radicalibus imaginariis quaquaverſum implicamur, fatendum tandem eſt in Analyſi communi ex ipſo eam colentium teſtimonio ideo in imaginaria offendi, quia in ęquationem inciditur $1 = -1$; hac enim ſublata etiam radicalia imaginaria ſtatim tollantur neceſſe eſt: quę imaginaria ſi repugnare velimus, repugnet & ipſa ęquatio poſitivi cum negativo oportet; quam, male intellectam, & prępoſtere applicatam tamquam primam mali labem omnes tamen libenter ab omni noxa liberant, & toties uſurpant, quoties extractione radicis in eam, quam damnant, radicem imaginariam impingi poteſt. Hęc ſerio perpendens quis non jure mirabitur, cum ſentiat ęquationem hanc poſitivi cum negativo in calculo communi neceſſariam, quam ſibi permittunt, probant, & frequentiſſime uſurpant, ſine qua nulla eſſet imaginarii radicalis exiſtentia & notio, tunc demum falſitatis inſimulari, cum mihi propriam tribuunt, atque exprobrant tamquam ex meo penu, atque ex meis male inſtitutis calculis ſolum depromptam, qua tantum permoti quicquid edidi dictatoria virga, nullo ſuffragante, damnarunt: cum tamen non niſi mihi tribui jure poſſit modus, quo ab ea repugnantia, cui male intellecto ſigno $=$ atque ignorata prorſus duplicis Syſtematis intima inter ſe conjunctione per vim ſubjacent, primus liberare, nec perperam ut credo, conatus ſum.

§. 34. Poſtquam §§. 30, & 31 ſuperioribus oſtenderimus quomodo ex varia ejuſdem formulę transformatione, aut ex legitimis adhibitis ſubſtitutionibus valor M^2 & quoad naturam, & quoad quantitatem mutetur, limitibus, intra quos vagari licet, mutatis, qui diverſi fiunt, & ita uniuſcujuſque formulę proprii, ut

extremo uno communi excepto, valores dati, qui M^2 tribui poſſunt, non niſi uni, aut alteri formulę, quibus comparatur, conveniant, quorum ſubſtitutione non niſi inter ipſum M^2, & inter unam aut alteram formulam comparationis ęqualitas intercedere poſſit; videamus nunc quomodo res ſe habeat, ſi, ſervata in formulis comparationis ęqualitate valoris, natura tantum quantitatis mutetur. Ut id perſpicue fiat, ex formulis noſtrę *Tabulæ* ad Syſtema baſis datę pertinentibus accipiatur ex. gr. (XIV.ª) Seriei quartę, a qua exhibetur ęquatio $M^2 = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a^2}{4} - m\right\}^2$, ſive $M^2 = m^2$. Facile unuſquiſque videt in hac ultima non ſolum ęqualitatem valoris inter utrumque membrum intercedere, ſed etiam identitatem: quo valore ſubſtituto pro m^2 in prima ęquatione invenitur $M^2 = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a^2}{4} - M^2\right\}$. Hac tamen facta ſubſtitutione, ut valor M^2 in utroque membro communis ſit & idem; tamen, identitate inter utrumque membrum ſublata, non niſi ęqualitas inter ipſa remanet: Nam (*Tab.* VI. *fig.* 10.) in triangulo rectangulo CEB, vocatis m, n lateribus CE, BE, erit ęquatio $M^2 = M^2$, ſive $\overline{BE}^2 = \overline{BE}^2$ identica; at in ſecunda $\overline{BE}^2 = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a^2}{4} - M^2\right\} = \overline{CB}^2 - \overline{CE}^2$, $\overline{BE}^2$ ęquale quidem eſt differentię quadratorum $\overline{CB}^2$, $\overline{CE}^2$; ſed eſt ab his prorſus diverſum: hac igitur facta formulę modificatione in ęquatione XVI.ª tollitur identitas, remanet æqualitas. Huc perducti ſtatim ad alios limites, ad alia loca geometrica a primis omnino diverſa deferimur: non enim amplius ad limites rectilineos quadrati inſcripti NN′ (*fig.* 3.), neque ad rectangula AD.DE, &c. in quadrilateris ſuperius indicatis contenta conſtructio pertinet; ſed (*fig.* 10.) ad triangulum rectangulum CEB ſuper uno, aut altero ex quatuor lateribus AC, BC, CN, CN′ hinc, vel inde conſtitutum, utriſque membris ęqualibus eamdem naturam quadraticam referentibus.

§. 35. Verum cum hoc etiam altero modo efferri poſſit formula, nempe

$$M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2,\ \text{XVII.ª} = \left\{\frac{a}{2} + n\right\} . \left\{\frac{a}{2} - n\right\},\ \text{XXI.ª} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m,\ \text{XXV.ª} = AD.BD$$

$$= m.\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}$$

$=$ Ad.Bd &c. (*fig.* 3.): quę requirit quadratum ęquale rectangulo, & viceverſa; hac ęquatione inſtituitur comparatio inter M^2 quadratum proprie dictum, & rectangulum, ſive inter quantitatem valore alteri ęqualem, ſed diverſę naturę; atque ideo inveniendum eſt quadratum, quod ęquale ſit rectangulo AD.BD &c, quod pertinet ad unum, vel ad alterum latus quadrati inſcripti maximo IL′. Hinc ut limites inveniantur, ſive locus geometricus huic hypotheſi accomodatus, ex puncto D fluente erigenda eſt normalis, cujus quadratum ſem-

ſemper ęquale rectangulo A D . B D &c, conſtructionem exhibeat regularem, quę valores omnes hujuſce normalis a minimo uſque ad maximum complectatur, qui tribui poſſunt quantitati M, ut inter hujuſmodi membra ſemper ęqualitas intercedat. Hoc conſtituto a limitibus rectilineis ſupra commemoratis ad limites curvilineos tranſitum fecimus, de quibus in ſequenti Capite agam. Nunc ſatis ſit animadvertere, latus ad normam erectum ex puncto D quadrati quęſiti contineri intra limites N B, vel N A &c. lateris quadrati inſcripti, & N L vel B L, N l, vel A l &c., quę ſunt parallelę, & ęquales C B, vel C N; N l vel A l &c, prout axis A B, vel N N′ ſumitur: atque latus quadrati quęſiti ſit ſemper majus quacumque D E, vel D′E &c. ordinata trianguli C N B, & minus C N, vel C B $= \frac{a}{2}$ latere quadrati $\frac{a^2}{4}$ ęqualis quartę parti quadrati maximi. Cum enim latus hujuſmodi quadrati debeat eſſe medium geometricum proportionale inter A D & B D, latus quęſitum erit ſemper minus A D, majus B D; ac non niſi in limite maximo $m = \frac{a}{2}$, vel in limite minimo $n = 0$ ęquale B C, vel A C. Cum vero rectangulum $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m} \,.\, m$ ſuper utroque axe, & ab utraque parte ſumi poſſit; patet hujuſmodi rectangulum tam a puncto B, in quo ſumptum in axe A B eſt nullum uſque ad N, in quo eſt maximum procedere poſſe, quam ſumptum in axe N N′ a puncto N, in quo eſt nullum uſque ad punctum B, in quo eſt maximum, contraria directione progredi, locumque geometricum deſcriptum ab extremitate normalis D E, vel D′E $= m$ eſſe in primo caſu B N, in ſecundo N B latus quadrati inſcripti maximo, quod tamen ſemper in utroque caſu ſumitur poſitivum. Locus vero geometricus deſcriptus a normali ex puncto D erecta, cujus quadratum rectangulo $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m} \,.\, m$ ęquale ſit; ex puncto N tranſit per B, vel ex puncto B per N, totuſque intra triangulum N B L continetur. Cum vero quę diximus reſpectu ad latus N B applicari poſſint ceteris lateribus quadrati inſcripti maximo, locus geometricus ab extremitate ordinatę M deſcriptus initium ſumens ab uno, vel ab altero puncto extremitatis axium per cetera puncta, dextrorſum vel ſiniſtrorſum procedens, tranſeat neceſſe eſt; atque, integra revolutione completa, ſemper in ſe ipſum rediens nullo neceſſario termino concluditur. Hęc mire conveniunt cum illis, quę *Capite* I. hujuſce *Libri* indicavimus, quęque in *Parte* II. enucleanda relinquimus.

§. *36.* Vidimus hactenus membrum ſolitarium M M ſecundæ dimenſionis, quod oritur ex producto variabilium Syſtematis linearis integri baſis datæ æquationis $m + n = a$, in duas æquationes partiales diviſæ $m = \frac{a}{2} + n$ Syſtematis baſis variabilis, $m = \frac{a}{2} - n$ Syſtematis baſis datæ tot diverſimodis rationibus trans-

formari poſſe, quot variationes ſubire poſſunt formulæ, quibus comparatur, ortæ ab una eademque formula varie diſpoſita atque præparata: atque ideo iis tantum valoribus obnoxium eſſe poſſe, quos unaquæque comparationis formula ſuſcipere poteſt. Quare ſi MM conferatur cum formulis noſtræ *Tabulæ*, quas ad Syſtema baſis datæ pertinere docuimus, patet valorem quemcumque producti MM intra limites maximum $\frac{4a^2}{4}$, & minimum zero concludi debere: maximus autem valor exhibetur a formula III.ª quadratica, in qua n nequit excedere valorem $\frac{a}{2}$: ideoque latera hujuſce quadrati ſunt limites maximi, intra quos loca geometrica aliarum formularum hoc quadrato ſemper minorum neceſſario concluduntur; minimus vero valor ipſius MM eruitur primum ab ejus homologa II.ª, quæ dat quadratum differentiæ, quod, facta $n = \frac{a}{2}$, fit zero. Hiſce igitur tantum formulis Syſtematis baſis datæ conſtitutis, nullus alius valor datus arbitrio noſtro relinquitur producto MM tribuendus, quam qui intra ſtatutos limites continetur. Ipſum vero productum MM naturam unius quadrati vel rectanguli ſolitarii, aut plurium ſimul ſumptorum aſſumere poteſt, ope eorum artificiorum, quæ ſuperius explicavimus. Ne tamen putes formulas a noſtra *Tabula* exhibitas omnem variationum, quæ dari poſſunt, ſeriem exhauſiſſe: in *Parte* enim II.ª cum de diviſione & conjunctione legitima horum Syſtematum agemus, demonſtrabitur infinitis prorſus modis unam eamdemque formulam variare poſſe, ideoque & ipſum MM & quoad naturam, & quoad quantitatem. Nunc non niſi illas recenſuimus, quæ oriuntur a ſola diviſione Syſtematis linearis integri baſis datæ æquationis $m + n = a$ in duo Syſtemata partialia diviſæ, ſive a diviſione bifariam facta baſis integræ a, qua, præter duo data extrema puncta A, & B, alterum C medium inter hæc duo datum conſtituitur.

§. 37. Quod ſi hiſce tantum tribus punctis datis definitis valor MM excedat limites conſtitutos a Syſtemate baſis datæ, ſi MM comparetur formulis Syſtematis baſis datæ, fit quidem imaginarium, ſive nullum, quia quæritur in eo Syſtemate, in quo eſſe non poteſt: ſed ſi confugiamus ad formulas noſtræ *Tabulæ*, quæ pertinent ad Syſtema baſis variabilis, omnia rite procedunt, & MM ſemper reale conſtituunt. Id vero toties continget, quoties, ſuppoſita identica utraque formula, in æquationem $1 = -1$ impingitur, ut ſatis ad rem, quam nunc agimus, Capite III. & hoc hujus Libri explicatum fuit. Oſtendimus enim tranſitum ab uno ad alterum Syſtema legitime fieri permutatione variabilium in datas, ac datarum in variabiles; ex qua permutatione duplex oritur formula, altera propria Syſtematis baſis datæ, Syſtematis baſis variabilis altera; quæ ſi identicæ ſumantur, atque ideo variabiles in utraque ea tantum lege ponantur fluere, quam unum vel alterum Syſtema requirit, ſemper neceſſario ad æquationem $1 = -1$ nos ducunt: nam limites utriuſque Syſtematis ita ſe ſe reſpiciunt, ut qui eſt maximus in Syſtemate baſis datæ, fit minimus in Syſtemate baſis variabilis: fluentium vero in primo creſcente una, altera decreſcit; utraque vero creſcit & decreſcit,

ſcit, manente ſemper inter ipſas eadem differentia, in Syſtemate baſis variabilis. Itaque MM comparatum formulæ $3.^a$ Syſtematis baſis variabilis eſt quadratum, quod nequit eſſe minus $\frac{4a^2}{4}$, cum n nequeat eſſe minor $\frac{a}{2}$, creſcere vero poteſt ad infinitum: comparatum vero ($4.^{tæ}$) fit zero, quemadmodum eſt zero comparatum formulæ $IV.^æ$ Syſtematis baſis datæ: hac tamen differentia, quod in $IV.^a$ M^a a maximo $\frac{a^2}{4}$, quando $n = 0$, decreſcit uſque ad minimum $= (0)^2$, quando n maxima $= \frac{a}{2}$; comparatum formulæ $4.^{tæ}$ fit zero, quando n minima $= \frac{a}{2}$, atque, creſcente n ab $\frac{a}{2}$ uſque ad infinitum, & ipſum ad infinitum uſque progreditur.

In ſequenti *Capite* diligentius in ceteras formulas noſtræ *Tabulæ* ad Syſtema baſis variabilis pertinentes inquiremus; nunc ſatis erit oſtendere quomodo a ($10.^a$) deducta ex ($6.^{ta}$), quæ eruitur a ($2.^a$) tranſitus fiat, formulæ ($14.^a$) auxilio, ad ($18.^{am}$), ($26.^{am}$), ac tandem ad ($30.^{am}$).

§. 38. Ut igitur id conſequamur, ſumatur æquatio $n^2 + 2n\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{2a}{2}(-n) + (-n)^2$, cujus primum membrum diximus pertinere ad Syſtema baſis variabilis, ſecundum ad Syſtema baſis datæ: hæc, liberata a vinculo coeficientis 2, fit $nn \overline{+ n + n -} \frac{a}{2}. - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} \overline{+ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}. - n$, ſive $nn - \left(n+n-\frac{a}{2}\right).\frac{a}{2} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right).n$; &, facta $n-\frac{a}{2} = m$, erit $nn - (n+m).\frac{a}{2} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} - m\right).n$: ſed $\frac{a}{2} = n - m$ (in qua n ſemper major m, atque ideo $n - m$ ſemper poſitiva), & $n = \frac{a}{2} + m$; ergo ſubſtituto in primo membro $n-m$ pro $\frac{a}{2}$, in ſecundo $\frac{a}{2}+m$ pro n, æquatio erit $nn-(n+m).(n-m) = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left\{\frac{a}{2}-m\right\}.\left\{\frac{a}{2}+m\right\}$. Primum membrum æquale eſt ($10.^a$) Sy-

ſte-

ſtematis baſis variabilis ; ſecundum ſpecie tenus videtur æquale X.ª Syſtematis baſis datæ: ſed quoniam in Syſtemate baſis variabilis m ſemper major $\frac{a}{2}$; ergo, ſi ſecundum membrum ad idem Syſtema baſis variabilis referatur, erit factor $\frac{a}{2} - m$ negativus, qui erat in proprio Syſtemate poſitivus; ideoque ſecundum membrum, ut Syſtemati baſis variabilis accomodetur, ſic erit efferendum $-\left\{\frac{a}{2}-m\right\}.\left\{\frac{a}{2}+m\right\} = \left\{m-\frac{a}{2}\right\}.\left\{m+\frac{a}{2}\right\}$, ut ſit æquatio $nn - (n+m).(n-m) = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \left\{m-\frac{a}{2}\right\}.\left\{m+\frac{a}{2}\right\}$. Verum donec productum hoc $(n+m).(n-m)$ vicem gerit rectanguli, monet idem eſſe variabile ſemper atque ignotum: ut igitur determinetur, tranſitus fiat in utroque membro a rectangulis ad quadrata, & habebitur $n^2 - (n^2 - m^2) = \frac{a^2}{4} + \left\{m^2 - \frac{a^2}{4}\right\}$: primum membrum eſt formula (14.ª), cum $n^2 - m^2$ ſit ſemper poſitivum; invenimus enim n ſemper majorem m; ſecundum vero, quod XIV.ᵃᵐ Syſtematis baſis datæ ſimulabat, eſt revera æquale formulæ (23.ª) Syſtematis baſis variabilis. Nam in XIV.ª terminus $\frac{a^2}{4} - m^2$ eſt poſitivus, & $\frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a^2}{4} - m^2\right\}$ differentia quadratorum $\frac{a^2}{4}, \left\{\frac{a^2}{4} - m^2\right\}$; contra vero (23.ª) $m^2 - \frac{a^2}{4}$ eſt poſitivus, & $\frac{a^2}{4} + \left\{m^2 - \frac{a^2}{4}\right\}$ indicat ummam quadratorum $\frac{a^2}{4}, \left\{m^2 - \frac{a^2}{4}\right\}$: atque ideo, quod erat negativum in primo, fit poſitivum in ſecundo Syſtemate; & quod erat illic differentia quadratorum, hîc ſummam ſignificat. Æquatio igitur huic hypotheſi accomodata erit $n^2 - (n^2 - m^2) = \frac{a^2}{4} + \left\{m^2 - \frac{a^2}{4}\right\}$: at in primo membro n^2 poſitivum, & $-(n^2 - m^2)$ negativum, & in ſecundo $\frac{a^2}{4}$, & item $m^2 - \frac{a^2}{4}$ poſitivum; ut igitur inter utriuſque membri terminos legitima inſtitui poſſit comparatio, ſic æquatio ordinetur $n^2 - (n^2 - m^2) = \left\{m^2 + \frac{a^2}{4}\right\} - \frac{a^2}{4}$, in qua n^2 poſitivum comparari poteſt cum $m^2 + \frac{a^2}{4}$ poſitivo, & $-(n^2 - m^2)$ negativum cum negativo $-\frac{a^2}{4}$.

Fa-

Facta igitur $n^2 = m^2 + \frac{a^2}{4}$, erit $n^2 - m^2 = \frac{a^2}{4}$, a qua ruſus eruitur eadem prima quadratica formula $n^2 = m^2 + \frac{a^2}{4}$, quæ utræque, cum in idem conveniant, legitimę cenſendę ſunt: in utraque enim n^2 vicem gerit quadrati lateris variabilis angulo recto oppoſiti, ex quo elegantiſſima in *Capite* ſequenti conſtructio concinnabitur.

§. 39. Sed ut hoc magis confirmetur atque illuſtretur, demonſtrandum quomodo ab eadem identica ęquatione $m^2 = m^2$ utraque Syſtemata & ęquationes omnes ad utrumque Syſtema pertinentes eruantur. Nam quoniam $m^2 = m^2$, erit $m^2 = n^2 - (n^2 - m^2)$; &, facto tranſitu a quadratis ad rectangula, erit $mm = nn - (n - m).(n + m)$: nunc ponamus $n + m = \frac{a}{2}$, ſive ponamus Syſtema baſis datę, in quo ſcimus ſummam variabilium datam eſſe: erit igitur in hac hypotheſi $mm = nn - (n - m).\frac{a}{2}$; ſed ſi $n + m = \frac{a}{2}$, erit $-m = n - \frac{a}{2}$: ergo $mm = nn - \left\{n + n - \frac{a}{2}\right\}.\frac{a}{2}$ $= nn + \left\{-n - n + \frac{a}{2}\right\}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2$ $= \frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2}} - n.n - (-n)^2 = \frac{a^2}{4} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.(-n) = \frac{a^2}{4} - .\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n.n}$ $= \frac{a^2}{4} - .\overline{\frac{a}{2} + m}.\overline{\frac{a}{2} - m}$ (poſita $\frac{a}{2} - n = m$) $= \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a^2}{4} - m^2\right\}$ (1.ª), in qua $\frac{a}{2}$ ſemper major m, ut Syſtema baſis datę requirit. Quod ſi in prima eadem ęquatione aſſumpta $mm = nn - (n - m).(m + n)$ velimus $n - m = \frac{a}{2}$, quę eſt proprietas Syſtematis baſis variabilis; erit $m = n - \frac{a}{2}$, &, facta ſubſtitutione, erit $mm = nn - (n - m).(m + n) = nn - \left\{n + n - \frac{a}{2}\right\}.\frac{a}{2}$ $= nn + \left\{n + n - \frac{a}{2}\right\}.-\frac{a}{2} = nn + 2n\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}^2$ $= nn - 2.\overline{n - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2} - \left\{-\frac{a}{2}\right\}^2 = n.\overline{n - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}} + \left\{\frac{a}{2}\right\}^2$; & (fa-

cta

ſta $n - \frac{a}{2} = m$) $= \left\{\frac{a}{2} + m\right\} . \left\{ -\frac{a}{2} + m \right\} + \frac{a^2}{4} = m^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$

$= \left\{ m^2 + \frac{a^2}{4} \right\} - \frac{a^2}{4}$ (2.ª), quę pertinet ad Syſtema baſis variabilis, cum

ſit ſemper $m > \frac{a}{2}$. Hęc, licet videatur identica cum (1.ª)', tamen ab ipſa multum differt: (1.ª) enim dat differentiam quadratorum ad triangulum rectangulum, in quo $\frac{a}{2}$ eſt latus oppoſitum angulo recto, ſive hypothenuſa: in (2.ª) hypothenuſa eſt variabilis $= \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}}$, & $\frac{a}{2}$ latus datum: in (1.ª) $\frac{a^2}{4} - m^2 = n^2$, Syſtema quadraticum baſis datę; in (2.ª) $m^2 + \frac{a^2}{4} = n^2$, Syſtema quadraticum baſis variabilis: ac tandem, facta hac ultima ſubſtitutione, erit (1.ª) m^2

$= \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a^2}{4} - m^2\right\} = \frac{a^2}{4} - m^2$; (2.ª) $m^2 = \left\{m^2 + \frac{a^2}{4}\right\} - \frac{a^2}{4} = n^2 - \frac{a^2}{4}$:

a quibus, ſi identicę ſumptę fuiſſent, deduceretur $1 = -1$, vel $-1 = 1$. Vide igitur quomodo ab una atque identica æquatione eruantur æquationes homologæ utriuſque Syſtematis, & quomodo ab uno ad alterum Syſtema tranſitus fiat, ut invictiſſime demonſtretur veritas formularum noſtræ *Tabulæ*, & quicquid ſuperius diverſa ratione, ac ſenſim deduximus.

§. 40. Illud inſuper addo, quod ſi ut fecimus §. 35. in Syſtemate baſis datæ, ubi comparatione inſtituta inter M^2 quadratum & rectangulum $\left\{\frac{a}{2} + n\right\} . \left\{\frac{a}{2} - n\right\}$ invenimus limites ordinatæ Loci geometrici in Capite ſequenti deſcribendi, ita in hoc Syſtemate baſis variabilis fiat in æquatione (2.ª) §. ſuperioris m^2

$= \left\{n + \frac{a}{2}\right\} . \left\{n - \frac{a}{2}\right\}$; etiam in hoc Syſtemate a limitibus rectilineis ad curvilineos tranſitus fit, quorum Locus geometricus & ipſe in ſequenti Capite invenietur. Nunc limites, intra quos latus m quadrati m^2 ſive Locus geometricus concluditur, dabimus (ut in eodem §. 35. factum fuit). Ut hoc facile, & eleganter perficiamus, animadvertendum eſt nos §. 15. *Cap.* II. hujus *Libri* demonſtraſſe (*Tab.* V. *fig.* 5.) $\left\{\frac{a}{2} + n\right\} . \left\{-\frac{a}{2} + n\right\} = AD.BD$

$= Bd.Ad = N'D'.ND' = Nd'.N'd'$; quibus ſingulis unum, aut alterum, ſurſum, vel deorſum rectangulum reſpondere poſſe oſtendimus: ergo ſi fiat m^2

=

$= \left\{ \frac{a}{2} + n \right\} . \left\{ - \frac{a}{2} + n \right\}$, erit m latus quadrati, quod æquale eſt rectangulo A D . D E, vel A D . D E' &c., medium proportionale inter A D . D E &c.: ergo erit latus m minus A D, & majus D E; ſed A D = D E'', cum ſit etiam C A N angulus ſemirectus, ergo latus quadrati m^2 erectum ad normam ex puncto D fluente, quod vicem gerit ordinatæ, deſcribet locum geometricum a ſuperiori æquatione præceptum, qui inter lineas rectas parallelas B E, A E'' a punctis B, A uſque ad infinitum verſus eamdem partem E, E'' productas contineatur neceſſe eſt. Quæ ratio cum ſingulis octo rectangulis applicari poſſit, lineæ B E, N E''; B E', N' E''' hinc inde ad infinitum productæ dabunt limites, intra quos ſinguli octo rami locum geometricum conſtituentes, & ſingulis octo rectangulis reſpondentes ad infinitum producti concluduntur. Hujuſmodi tamen limites anguſtioribus terminis coerceri poſſunt, ſi e centro ducantur hinc inde indefinitæ z' Z, z Z' parallelæ B E, B E'. Nam, ſumpta C d = C D, erit rectangulum A D . B D $= \overline{dC + CB} . \overline{DC - CB}$, & d C + C B = d B $= n + \frac{a}{2}$; D C — C B = D B $= n - \frac{a}{2}$ (ut docuimus *Cap.* V. *Lib.* I.): ergo $m^2 = \left\{ \frac{a}{2} + n \right\} . \left\{ - \frac{a}{2} + n \right\}$ = A D . B D

$$= dB . DB = \overline{dC + CB} . \overline{DC - CB} = \overline{DC}^2 - \overline{CB}^2,$$

$$\left\{ n + \frac{a}{2} \right\} . \left\{ n - \frac{a}{2} \right\} = n^2 - \frac{a^2}{2}$$ facto tranſitu ad quadrata. Quare $m^2 < n^2 < \overline{DC}^2$; ſed C D = D Q: ergo $m^2 < \overline{DC}^2 < \overline{DQ}^2$; & $m <$ D C $<$ D Q. Verum ſuperius invenimus $m >$ D B = D E; ergo $m >$ D E $<$ D Q. Hoc applicatum ceteris rectangulis elegantiſſime determinat limites infinitos, ſive aſymptotos z' Z, z Z', intra quas Locus geometricus Syſtematis baſis variabilis huic eidem Syſtemati aptus deſcribendus contineri debet.

§. 41. Præcipua vero, ac univerſalis & apprime neceſſaria conſecutio, quæ ex modo explicatis deducitur, illa eſt, qua ſtatuitur ſigna ± terminis cujuſcumcumque æquationis linearis vel ſecundæ dimenſionis affigenda, aliis omnino legibus moderanda eſſe, quam quæ hactenus in uſu fuerunt omnium conſenſu receptæ. Cum enim ex dictis luce clarius pateat ſigna iſtiuſmodi æquationum terminis præfigenda mutari debere, prout unum vel alterum Syſtema, ad quod pertinent, & prout æquationes homologæ ejuſdem Syſtematis requirunt; niſi prius Syſtema ipſum & æquatio homologa determinetur, fieri non poteſt ut hujuſmodi ambiguitas tollatur. Porro nulla alia nobis ſupereſt via ad id conſequendum, niſi illa, quam nobis offert membrum ſolitarium M M, cui formulas no-

ſtræ *Tabulæ* comparavimus, cujus determinatione eruatur & Syſtema, ad quod pertinere poſſit, & æquatio ipſius Syſtematis, ad quam referatur. Verum cum *Cap.* I. §. *6.* & ſeqq. *Lib.* II. oſtenderimus æquationes ſecundæ dimenſionis ortas ab uno, vel ab altero Syſtemate natura ſua eſſe infinite indeterminatas, & Capite ſequenti oſtendam, determinato etiam valore M M, variabiles ipſas non niſi intra limites determinari poſſe; patet, determinato etiam producto M M, quod tunc *homogeneum comparationis* vulgo appellatur, non determinari niſi diverſas formulas, ad quas pertinere poteſt, repudiatis aliis, quæ nullo modo cum hoc *homogeneo comparationis* conciliari poſſunt. Itaque intra anguſtiores terminos determinato valore M M coercemur, neque eidem formulæ quicumque valor datus tribuendus M M arbitrio noſtro relinquitur, ſed tantum intra quoſdam limites, qui & cum identitate formulæ, quam ſumpſimus, & cum valore M M conſtituto conciliari poſſint: quibus prætergreſſis, aut valor *homogenei comparationis* mutandus eſt, aut formula in aliam artificiis traditis transformanda. Quoties igitur data æquatione inciditur in poſitivum æquale negativo (quæ eſt prima, ut dixi §. 33, mali labes), toties docemur valorem datum, qui intra certos limites arbitrio noſtro relinquitur, a nobis male conſtitutum fuiſſe, cum nequeat æquationi propoſitæ applicari: docemur inſuper, ſi valorem, quem temere in hoc caſu ſtatuimus, retinere velimus, aſſumptam formulam artificiis analyticis in aliam mutandam, quæ cum ipſo poſſit conciliari. Poſitivum igitur æquale negativo, ex quo deſcendit reale æquale imaginario, eo ipſo quo in datis illis circumſtantiis repugnantiam abſolutam indicat, admonet etiam ad illam formulam confugiendum eſſe, in qua fiat poſitivum illud, quod in prima aſſumpta, mutatis circumſtantiis, factum fuerat negativum. Analyſis igitur, ſi quod præcipit recte intelligatur, varia deſcriptione Locorum geometricorum atque Curvarum, quæ affectionibus quibuſdam analyticis reſpondent, ob oculos nobis ponit diverſa limitum genera, intra quæ valores dati contineri poſſunt, ut quod in uno, mutatis circumſtantiis, obtineri nequit, in aliis neceſſario vinculo inter ſe colligatis proſpere conſequamur.

§. 42. Hæc, quæ ulterius perſequemur in Capite ſequenti, animadvertiſſe ſufficiat in hoc Capite, cui finem imponam ordine recenſendo præcipuas ac univerſales, quas in Capitibus II, III, & hoc invenimus, veritates, quemadmodum factum vides in §. 56. *Capitis* I. hujus *Libri*.

Defin. Syſtemata lineare baſis datæ & lineare baſis variabilis tunc erunt homologa, cum ſumma variabilium Syſtematis primi æqualis differentiæ variabilium alterius ſit eadem, ac data: ita $m + n = a$, *&* $m - n = a$ *conſtituunt duo Syſtemata, baſis datæ primum, baſis variabilis alterum, quæ diverſa Syſtemata* homologa *appellamus.*

Prop. I. Hujuſmodi homologa Syſtemata baſis datæ, & baſis variabilis ita inter ſe neceſſario vinculo colligantur, ut nequeant a ſe invicem ſeparari: id patet ex ipſa definitione, atque ex dictis.

Prop. II. Quodcumque Syſtema lineare baſis datæ dividitur in duo Syſtemata partialia baſis datæ, & baſis variabilis, ex quorum producto oritur ſemper Syſtema quadraticum baſis datæ. Ita data æquatione Syſtematis integri baſis datæ

$m + n$

$m + n = a$, Syſtemata partialia erunt $m = \frac{a}{2} + n$, $m = \frac{a}{2} - n$; eorumque productum $m^2 = \frac{a^2}{4} - n^2$, & $m^2 + n^2 = \frac{a^2}{4}$ Syſtema quadraticum baſis datę ex *Defin.* 2. §. 56. *Capitis* I. hujus *Libri*. Vel $n = \frac{a}{2} + m$, $n = \frac{a}{2} - m$; & $n^2 = \frac{a^2}{4} - m^2$, ſive $n^2 + m^2 = \frac{a^2}{4}$ Syſtema alterum quadraticum baſis datæ homologum primo in Syſtemate integro lineari baſis datæ $n + m = a$.

Prop. III. Quodcumque Syſtema lineare baſis variabilis dividitur in duo Syſtemata partialia utraque baſis variabilis, ex quorum producto oritur Syſtema quadraticum baſis variabilis. Nam data æquatione lineari integra Syſtematis baſis variabilis $m = a + n$, erunt ex dictis æquationes partiales $m = n + \frac{a}{2}$, $m = n - \frac{a}{2}$, quæ in ſe ductæ dant $m^2 = n^2 - \frac{a^2}{4}$, & $m^2 + \frac{a^2}{4} = n^2$ ex §. 2. *Cap.* III. hujus *Libri*. Sed quoniam æquatio prima ex dictis eſſe poteſt $n = a + m$, & æquationes partiales $n = m + \frac{a}{2}$, $n = m - \frac{a}{2}$; habetur etiam $n^2 = m^2 - \frac{a^2}{4}$, ſive $n^2 + \frac{a^2}{4} = m^2$ Syſtema alterum quadraticum baſis variabilis alteri homologum in Syſtemate integro baſis variabilis $n = a + m$.

Prop. IV. Eadem formula analytica ſecundæ dimenſionis varie modificata, & ſubſtitutione æqualis pro æquali in aliam formam mutata, modo valorem, naturam modo, modo utrumque mutat; adeoque & ipſa conſtructio geometrica, cui reſpondet. Hæc veritas in toto hoc *Libro* II. pluribus modis evincitur: vide tamen §§. 38, & 39. *Capitis* hujus.

Prop. V. Formula analytica artificiis, quæ legitima in toto hoc Opere demonſtravimus, in alias mutata formas ſigno = neceſſario cum ſuis homologis conjungitur, atque ideo per antecedentem ab identitate ad æqualitatem, & ab hac ad homologas inæquales tranſitum faciat, vel viceverſa, neceſſe eſt §§. 30, 31, 38, & 39. hujus.

Prop. VI. Signum itaque = univerſim ſumptum non eſt niſi vinculum illud, quo æquationes homologæ unius Syſtematis, aut diverſi copulantur; a quibus tamen non excluditur æqualitas & identitas. §§. 44, 45, 46, & 47 *Cap.* III. Hinc vide quam in arctum compulerit hanc ſigni = notionem Analyſis communis.

Prop. VII. Eadem formula analytica identice ſumpta, quæ eſt poſitiva in ſuo proprio Syſtemate baſis datæ, vel baſis variabilis, fit negativa in homologo baſis variabilis, vel datæ. §§. 23, & ſeqq. *Cap.* III. *Libri* hujus, ac paſſim in hoc.

Prop. VIII. Quæcumque formula, quæ in ſuo proprio Syſtemate ſit negativa, non amplius pertinet ad primo ſumptum Syſtema, ſed ad alterum, in quo, cum eſſet negativa, ſit poſitiva: & quæcumque formula, quæ erat negativa in aſſumpto Syſtemate, ſi fiat poſitiva, remanet in eodem Syſtemate, quod tunc vere illi convenit. *Cap.* III. hujus *Libri* §§. 23, & ſeqq.

Prop. IX. Membra cujuſcumque æquationis, quæ identice ſumpta ſive ad idem Syſtema relata, dant poſitivum æquale negativo; ſi ad ſuum ſingula proprium Syſtema referantur, fieri ambo poſitiva jam ſatis in *Cap.* III., & IV. hujus *Libri* §§. ſuperius citatis demonſtratum fuit.

Prop. X. Quoties in æquationibus offenditur poſitivum æquale negativo, licet ſemper negativum in poſitivum, vel poſitivum in negativum mutare, ſi nimirum alterutra a proprio ad improprium, vel ab improprio ad proprium Syſtema reducatur. Patet ex citatis.

Prop. XI. Cuicumque formulæ ab uno ad alterum Syſtema legitimus tranſitus anquiritur, aut mutatione ſignorum $\pm$ in terminis, aut, quod elegantius eſt, ſi variabiles permutentur in datas, & datæ in variabiles. Ex eodem *Cap.* III. hujus *Libri*.

Prop. XII. Signa $\pm$ terminis cujuſcumque formulæ præfigenda non pendent ab iis legibus, quæ hactenus vulgo traditæ ſunt, ſed a Syſtemate, in quo continentur, & a varia ipſius formulæ transformatione. Hoc clare evincitur ex antecedentibus, & ex §. 40. hujus *Capitis*.

Prop. XIII. *Criterium*, quo tuto dignoſci poſſit ad quod Syſtema æquatio quæcumque pertineat, non eſt repetendum a ſignis, quibus termini tam dati, quam variabiles afficiuntur, ſed a valore qui quantitatibus datis tribuitur. §. 41. hujus *Capitis*.

Prop. XIV. In Analyſi itaque ſpecioſa quantitates, quæ prout conſtantes ſymbolis a, vel b &c. deſignantur, licet improprie nomine datarum, quia non fluunt, appellentur; tamen ſunt quoad valorem indeterminatæ. Quare ex antecedenti indeterminatum ſit etiam oportet Syſtema, ad quod formula variabilibus & hiſce conſtantibus conflata pertinere poteſt.

Prop. XV. Nulla alia igitur in Analyſi ſpecioſa relinquitur methodus determinandi Syſtema, niſi ut ſtatuantur limites, intra quos hujuſmodi datæ cum proprio Syſtemate conciliari poſſint: quibus prætergreſſis datæ cum aſſumpto Syſtemate repugnantes poſſunt tamen ad alterum Syſtema confugere, atque cum ipſo amice conſociari. Id fit deſcriptione, & præparatione Locorum geometricorum, quæ diverſa prorſus, prout diverſi ſunt limites, qui conſtantibus aſſignari poſſunt, apta ſunt ſingula (prout res fert) ad conciliandum Syſtema cum conſtantium valore dato. §. 41. hujus *Capitis*.

Prop. XVI. In Analyſi ſpecioſa formula quæcumque poſitive & negative ſumenda eſt, atque utraque ſigno $=$ conjungenda, ut illud membrum tantum eligatur, quod propoſitis conditionibus, pro re nata, ſatisfaciat: idem obtinebitur, ſi in alterutro æquationis membro permutentur variabiles in datas, & datæ in variabiles.

Prop. XVII. Hinc membrum illud, quod conditionibus propoſitis repugnat, tamquam

quam nullum cenſendum eſt, & comparatio termini ſolitarii M M noſtræ *Tabulæ* cum illo, quod legitimum eſt, tantum inſtituenda eſt. §§. 25, & 26. Cap. III. hujus *Libri*.

Prop. XVIII. Methodus communis, quæ docet mutanda eſſe ſigna in terminis, qui ab una ad alteram ſigni = partem transferuntur, ab uno ad alterum Syſtema nos ducit. §. 34. *Cap.* III. hujus *Libri*. Ut igitur propoſito facili exemplo oſtendam quomodo in methodo communi præparanda ſit quæcumque formula ad utrumque Syſtema ſuſcipiendum pro diverſitate valoris, qui tribui poteſt quantitatibus conſtantibus, ſed indeterminatis: ſit formula $n - \frac{a}{2}$, quam ſcimus pertinere ad Syſtema baſis variabilis, in quo n minima $= \frac{a}{2}$, maxima $= \infty$. In hac, facta n minima $= \frac{a}{2}$, erit $n - \frac{a}{2} = 0$; ac, translatis more communi terminis, erit $0 = \frac{a}{2} - n$: verum facta hac translatione a Syſtemate baſis variabilis ad Syſtema baſis datæ delati fuimus, in quo, facta n maxima $= \frac{a}{2}$, eſt $\frac{a}{2} - n = 0$: erit igitur in limite n minimo primi, in limite vero maximo ſecundi Syſtematis $0 = n - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} - n$. Verum in caſibus mediis n in primo a minimo $\frac{a}{2}$ uſque ad infinitum progreditur, in ſecundo a maximo $\frac{a}{2}$ uſque ad o decreſcit: ergo, creſcente una, decreſcente altera, fit $M = n - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} - n$: ac tandem $M = n - \frac{a}{2}$, $M = \frac{a}{2} - n$; ſive $M + \frac{a}{2} = n$, $M + n = \frac{a}{2}$: prima ad Syſtema baſis variabilis, ſecunda ad Syſtema baſis datæ pertinet. Idem in aliis formulis ſecundæ dimenſionis evenire quæ hiſce *Capitibus* diximus ſatis aperte demonſtrarunt.

Prop. XIX. Æquatio, ex qua, poſitis identicis utriſque membris, eruitur poſitivum æquale negativo eſt abſurda, atque abſolutam involvit contradictionem; quia contra naturam Syſtematis, in quo eſt, cogitur fluere variabilis eo modo, quo altera in altero Syſtemate conſtituta rite fluit, ut proprium ipſius Syſtema requirit. Repugnantia igitur hæc, & prima *imaginarietatis* cauſſa repetenda eſt ab ipſa æquatione abſurda $1 = -1$, a qua a turbido tamquam fonte manat illud $\sqrt{-1}$, quod dicitur in Analyſi communi imaginarium, cui tantum quicquid mali creditur in hanc Scientiam irrepſiſſe tribuitur (§. 33. hujus Capitis).

Hinc

Hinc quid mirum ſi irrito conatu hactenus hoc ab Analyſi eliminare tentaverint ii, qui de hoc tantum ſolliciti primam mali labem, ſcilicet $1 = -1$ foverunt ita, ut hac unanimi conſenſu probata frequentiſſime utantur? quemadmodum in *Cap.* VI. hujus *Libri* luce clarius patebit.

Prop. XX. Repugnantia tamen, quam præfefert æquatio $1 = -1$, & ab hac derivata $1 = \sqrt{-1}$, quæ tamen ſola dicitur imaginaria, non ab intima ipſius rei natura, ſed ab errore noſtræ mentis proficiſcitur, quæ falſis opinionibus præoccupata, ea ſimul inter ſe, ac in eodem Syſtemate copulare conatur, quæ e diametro opponuntur: idem enim relatum ad eumdem comparationis terminum non poteſt eſſe ſimul & poſitivum, & negativum. *Cap.* III. hujus *Libri* §§. 23, & ſeqq. Tantum igitur abeſt ut imaginarium ſit aliquid neceſſarium, & cum intima Scientiæ, quam nunc habemus, natura conjunctum, ut ab ipſa Analyſeos Scientia, ſi recte intelligatur, doceamur hoc ſtatim tolli, atque evaneſcere, ſi præjudicata opinio tandem eradicetur.

Prop. XXI. Fieri igitur non poteſt ut imaginarium ſit aliquid abſoluti, quod nequeat univerſim ab Analyſi eliminari, cum fieri nequeat ut error mentis noſtræ ſit aliquid abſolutum & neceſſarium. Quin imo ipſa imaginarii notio relativa, quam ſupra explicavimus nos docet notionem realem huic oppoſitam reſpondeat oportere, ac veluti manu ducit ad proprium Syſtema, in quo eſt reale, inveniendum. Hoc intellecto in *Parte* II.ª imaginarii ope imaginarium ipſum ab univerſa Analyſi eliminabimus.

Prop. XXII. Ideo licet in æquationibus mixtis ex realibus & imaginariis terminos omnes imaginario $\sqrt{-1}$ affectos zero comparare, quia per *Prop.* XVI.ªᵐ imaginarium in Syſtemate cui tribuitur eſt revera nullum. Hæc propoſitio jam a Clariſſimo Bougainville a me in *Cap.* III. *Libri* ſuperioris §. 65. citato calculi Fluxionum auxilio demonſtrata, ſatis fuiſſet una ad imaginarium perpetuo tollendum, ſi ex veris ac ſuis principiis deducta elementaris Analyſeos ope evidentiſſime cognoſceretur: æquatio enim quæcumque in duas ſemper dividi poſſet, qua methodo ſemper liceret imaginarium tollere: in hac tamen methodo tractanda caute incedendum eſſe ſuo loco oſtendam.

Prop. XXIII. Dato *zero abſoluto* etiam *infinitum abſolutum* neceſſario dari debet. Hoc ex ipſa *Propoſitione* XVII.ª facile deducitur, quæ cum demonſtraverit in limite minimo $n = \frac{a}{2}$ in Syſtemate baſis variabilis, ac in limite maximo $n = \frac{a}{2}$ in Syſtemate baſis datæ æqualitatem intercedere inter $M = n - \frac{a}{2}$ S. Y. $= \frac{a}{2} - n$ S. A, oſtendit etiam n in Syſtemate baſis variabilis ſemper ſupra $\frac{a}{2}$ creſcere, in Syſtemate vero baſis datæ infra $\frac{a}{2}$ decreſcere debere: atque ideo ſi

pona-

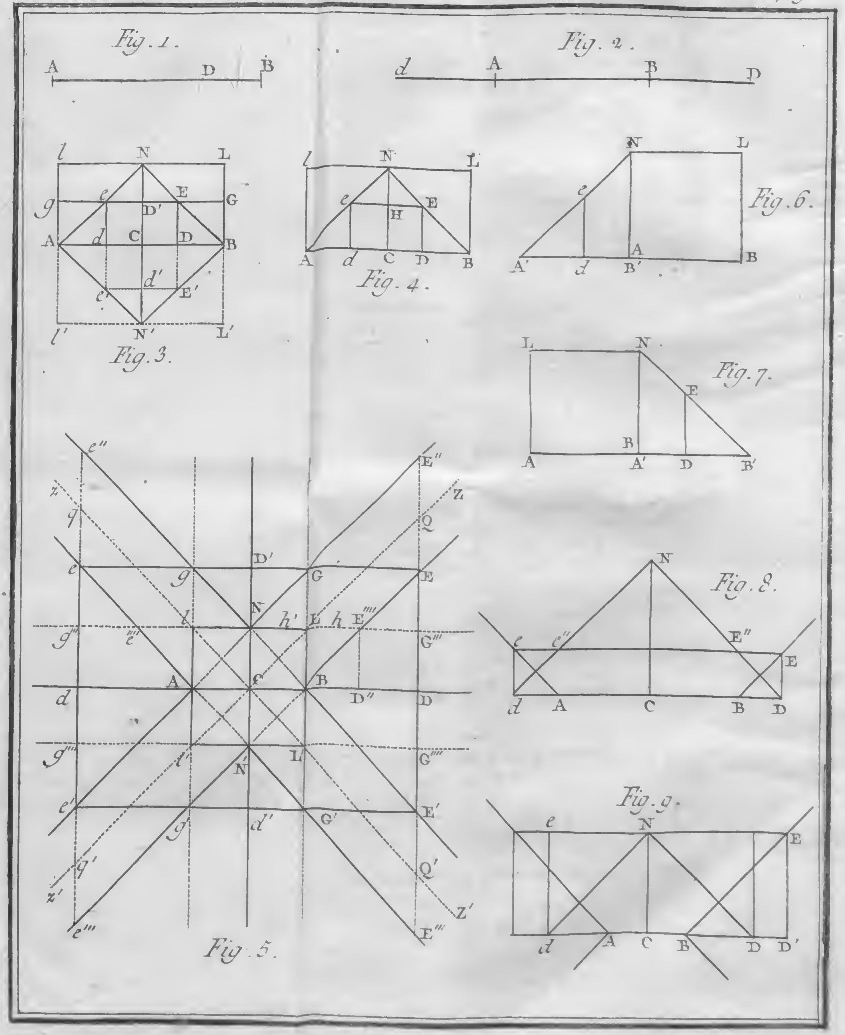

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

Fig. 10.

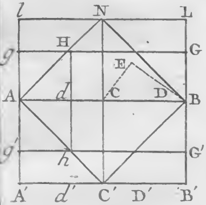


Fig. 11.

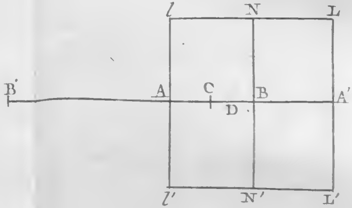


Fig. 12.

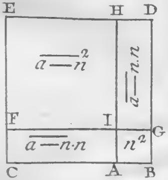


Fig. 13.

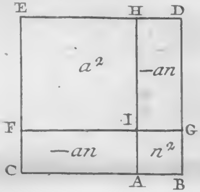


Fig. 14.

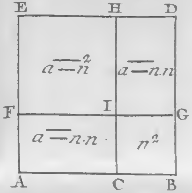


Fig. 15.

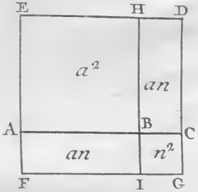


Fig. 16.

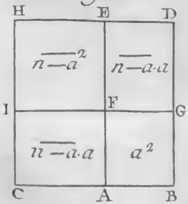


Fig. 17.

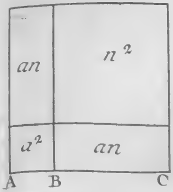
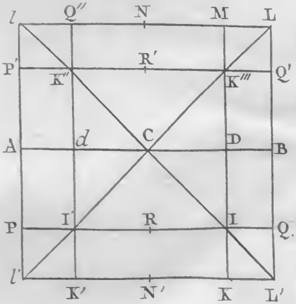


Fig. 18.



ponatur n creſcere ſupra $\frac{a}{2}$, M in Syſtemate quidem baſis variabilis ſupra zero uſque ad infinitum magis ſemper creſcere poterit, in Syſtemate vero baſis datæ numquam poterit decreſcere infra zero, cui in hac hypotheſi perpetuo æqualis erit, cum n extra limites Syſtematis baſis datæ jam exceſſerit, uti monuimus §§. 25, & 26. *Cap.* III. hujus *Libri*. Porro quando abſolute quæritur valor M in limite maximo ipſius n, quæritur valor formulæ $n - \frac{a}{2}$ in utroque Syſtemate, quam ſcimus per *Propoſitionem* I.am ad utrumque pertinere: atque ideo ſolutio hujuſce Problematis in duplici æquatione $M = \infty - \frac{a}{2}$ S.Y. $= \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$ S.A. neceſſario vinculo colligata requirenda eſt: quæ docet valorem M, qui quæritur in Syſtemate baſis datæ eſſe nullum, in Syſtemate baſis variabilis eſſe infinitum, cum n maxima in Syſtemate baſis datæ ſit $= \frac{a}{2}$, in Syſtemate baſis variabilis $= \infty$. Ab hac igitur una formula præter Propoſitiones VIII.am & XVII.am ſatis clare demonſtratur eſſe *abſolutum Infinitum* ita neceſſarium, ac reale, ut eſt neceſſarium & reale *abſolutum zero*. His adde quæ diximus *Capite* VI. *Libri* I., & §§. 10, 11, 12, & 13. *Cap.* II. hujus *Libri*. De quo tamen Infinito plura ſuo loco. Hæc omnia, quorum præcipua in unum quaſi corpus collecta hîc & in fine *Cap.* I. hujus *Libri* Lectorum oculis ſubjicienda curavi, neceſſario præmittenda fuiſſe, antequam ad completam æquationum ſecundi gradus ſolutionem tradendam accederemus, quiſque facile intelliget, ſi modo patientem dicendis accommodet aurem.

CAPUT V.

De limitibus curvilineis æquationum ſecundæ dimenſionis, utriuſque Syſtematis, ac de completa earum ſolutione.

§. 1. UT tandem ex veritatum omnium, quas ſupra invenimus, complexu, illum quem initio nobis propoſuimus fructum ſane uberrimum in ſolutione obtinenda æquationum ſecundæ dimenſionis nulla imaginarii labe infecta colligamus; revocetur, Propoſitione I. Capitis antecedentis ſtatutum fuiſſe quamcumque æquationem ſecundæ dimenſionis ortam a producto variabilium Syſtematis linearis in duo partialia Syſtemata diviſi pertinere poſſe tam ad Syſtema baſis datæ, quam ad Syſtema baſis variabilis huic homologum, cum æquatio linearis integra, a qua derivatur æquatio ſecundæ dimenſionis poſſit eſſe tam $m + n = a$, quam $m - n = a$, vel $n - m = a$. Inſuper ſtatuimus §. *6.* Cap. I. hujus Libri quamcumque æquationem ſecundæ dimenſionis ad alterutrum Syſtema homologum relatam natura ſua eſſe indeterminatam; cum nequeat M N productum radicum alterius Syſtematis innoteſcere, & fieri datum, niſi prius arbitrio una aut altera variabilis determinetur. Nam cum æquatio prima linearis integra ſit vel $M + N = a$, vel $M - N = a$, productum M N in utroque Syſtemate tot valoribus datis affici poteſt, quot valores ad libitum tribui poſſunt uni, vel alteri variabili M, vel N; ex quo innoteſcit altera, quin Syſtema mutetur. Id vero in utroque Syſtemate infinitis modis obtineri poſſe nemo non videt; ergo patet quamcumque æquationem ſecundæ dimenſionis revera conſtare poſſe infinitis radicibus, quæ binæ & binæ ſumptæ æquationi propoſitæ ſatisfaciunt. Et ſane vidimus utrumque Syſtema lineare in duo partialia Syſtemata dividi hoc modo poſſe: $M + N = \left(\frac{a}{2} + n\right) + \left(\frac{a}{2} - n\right)$ S. A. $M + N = \left(n + \frac{a}{2}\right) + \left(n - \frac{a}{2}\right)$ S. Y.: quare tam in primo, quam in ſecundo valor M & N, atque adeo productum datum M N infinitis modis variare poteſt, prout in utroque Syſtemate licet ad libitum infinitis modis determinare valorem n, quin Syſtema integrum mutetur; quin ſcilicet ſumma $M + N = a$ in Syſtemate baſis datæ, differentia $M - N = a$ in Syſtemate baſis variabilis mutationem ſubeat ullam: dummodo variabiles illæ binæ & binæ ſumantur, quas homologas appellavimus, quia in primo Syſtemate earum ſumma, in ſecundo earum differentia ſemper conſtans & æqualis a perſeverat.

§. 2.

§. 2. Duobus autem modis arbitrio noſtro relinquitur determinatio æquationis ſecundæ dimenſionis, determinando nempe valorem n, ex quo determinatur productum M N, vel determinando productum M N, ex quo n determinatur. Primo modo variabili n tribui quidem poſſunt valores dati a zero uſque ad infinitum, quibus ſingulis productum M N apte determinatur; at animadvertendum eſt valores n a zero uſque ad $\frac{a}{2}$ convenire Syſtemati baſis datæ; ideoque intra hoſce limites æquationem ſecundæ dimenſionis pertinere ad Syſtema baſis datæ, ac producto M N eos tantum valores datos convenire, qui eruuntur a formulis noſtræ *Tabulæ Cap.* IV. hujus *Libri* pag. *366*, quas hujuſce Syſtematis proprias diximus. Hiſce limitibus a valore n prætergreſſis ſtatim M N fit negativum, noſque defert ad poſitivum æquale negativo; quo docemur valorem hunc, quem tribuimus n, in hoc Syſtemate repugnare, quemadmodum *Propoſitio* VIII. ejuſdem *Cap.* IV. oſtendit. Hæc tamen repugnantia non eſt abſoluta: poſita enim n majori $\frac{a}{2}$, ſtatim ad Syſtema alterum baſis variabilis huic homologum transferimur, in quo n a limite minimo $\frac{a}{2}$ uſque ad infinitum exſpatiari poteſt, quin Syſtema mutetur; valoreſque ipſius M N pendent a formulis ejuſdem *Tabulæ* ad Syſtema baſis variabilis pertinentibus, quarum comparatione invenies ſemper poſitivum æquale poſitivo, donec intra limites ſtatutos valorem n contineas at facta n minori $\frac{a}{2}$, M N in hoc Syſtemate fit iterum negativum, quod tamen invenimus poſitivum in Syſtemate baſis datæ, ad quod conſequenter ex dictis fit tranſitus. Quare univerſim, & abſolute loquendo non repugnat producto M N quemcumque valorem a zero uſque ad infinitum tribuere, ut ſemper poſitivum æquale poſitivo invenias: repugnat vero hujuſmodi valores omnes a zero uſque ad infinitum eidem Syſtemati tribuere; cum limites alterutrius Syſtematis, intra quos legitime continetur valor n, ſint prorſus diverſi, & inter ſe ita comparati, ut, quod eſt negativum in uno, fiat poſitivum in altero; & viceverſa. Hinc pro diverſo valore dato, quem ſuſcipere poteſt n, ſumendum eſt unum potius, quam alterum Syſtema homologum, & formulæ, quas alterutrius Syſtematis proprias oſtendimus.

§. 3. Conſtituta igitur baſi a conſtituuntur limites, qui utrique Syſtemati conveniunt: at cum ex valore n arbitrio poſito pendeat determinatio valoris producti M N, & cum ex determinatione valoris n determinetur etiam Syſtema, ad quod pertinere debet productum M N, productum hoc M N ad illud Syſtema referendum eſt, quod requirit valor datus n, ut omnis repugnantia tollatur. Illud tamen diligenter obſervandum in formulis algebraicis quantitates literis a, b &c. expreſſas male nomine *datarum* deſignari, quæ rectius *conſtantes* appellandæ eſſent, ut intelligatur has quidem non eodem modo fluere, quo illæ, quæ *variabiles* nuncupantur, ſed tamen indeterminatas eſſe, limitibuſque coerceri, quippe quæ nondum ad valorem numericum & unum determinatæ

fuerint. Verum cum limites utriuſque Syſtematis diverſi ſint, pro diverſitate valoris numerici ac vere dati, qui hiſce conſtantibus tribui poteſt, determinandum eſt Syſtema, ad quod pertinet formula algebraica huic ita propria, ut alteri minime poſſit applicari. Itaque donec formula literis algebraicis tantum & fluentibus conflatur, ad utrumque Syſtema præparanda eſt: abſtracte enim *n* conſiderata, ac ſumpto M N = *fg* conſtanti quidem, ſed indeterminato, niſi prius determinentur limites, intra quos valores *fg* relati ad baſim *a* Syſtematis concluduntur, numquam poteris & Syſtema, & formulas huic producto *fg* proprias, Syſtemate altero repudiato, legitime aptare. Atque ideo Syſtema, ad quod M N referendum eſt, non eſt deſumendum (ut vulgo hactenus factum fuit) a ſignis $\pm$, quibus termini formularum ſecundæ dimenſionis inter ſe uniuntur; ſed ſigna $\pm$ terminis affigenda ſunt prout requirit valor, quem tribuimus M N, cui aptanda eſt formula, quæ vere illi competit. Formulæ igitur utriuſque Syſtematis, quas ſupra *Tabula* noſtra pag. 366. recenſuit, ſunt ſemper in promptu tenendæ, ut ad eas, ad quas ſtatutis limitibus ipſius *n* determinatione valorum conſtantium *a* & producti *fg* formula numerica pertinere poteſt, referatur. Hac enim determinatione non amplius formula ad utrumque Syſtema amplectendum indifferens eſt, ſed uni ita adhæret, ut cum altero conciliari nequeat. Quare luce clarius patet (ut id ad ravim uſque repetamus) imaginarium non eſſe niſi relativum ortum ab errore Syſtematis, cui applicatur. Hactenus enim formulæ algebraicæ, quæ vere indeterminatæ ſunt, atque ideo ad utrumque Syſtema, pro re nata, amplectendum præparandæ eſſent, non niſi ad unum tantum artificiis communibus determinantur, cujus limitibus arbitraria determinatione conſtantium prætergreſſis inciditur in poſitivum æquale negativo, ſcilicet in imaginarium, a quo ignoratione alterius Syſtematis fruſtra ſe ſe expedire ad hæc uſque tempora Analyſtæ conati ſunt, minime intelligentes (quod ſæpius in meis Opuſculis fruſtra inculcavi) non dari poſſe in improprio Syſtemate imaginarium, quin ſuum reale in proprio Syſtemate reſpondeat. His adde quæ diximus *Capp.* antecedentibus. Videant igitur quo jure ii, ut nihil intentatum relinquerent ad labefactandam meam inchoatam Theoriam, quam convellere jure non poterant, in vulgus diſſeminaverint hanc quidem aliquo modo aptari poſſe formulis algebraicis, ſed omnino ineptam eſſe ad formulas numericas extricandas: quaſi vero præcipuus meæ Theoriæ finis ad numericas non dirigatur, & methodus nota, quæ deficit in algebraicis, ad numericas ſolvendas omnino par inventa fuerit: verum de hoc infra.

§. 4. Secundus modus, quo diximus poſſe æquationem ſecundæ dimenſionis natura ſua indeterminatam aliquo modo determinari, in eo ſitus eſt, ut tribuantur producto M N valores dati arbitrio, ſive ponatur productum M N primo datum, quod *homogeneum comparationis* vulgo nuncupatur, ex quo eruendi ſunt valores *n* in formulis, qui huic producto M N dato vere reſpondeant. Sed quoniam in formulis algebraicis, ut dixi, homogeneum comparationis conſtans, quod appellabo *fg*, vere indeterminatum eſt; nulla alia via nobis ſupereſt, niſi ut determinentur limites utriuſque Syſtematis, ad quorum alterutrum, determinatione numerica atque vere data valoris *fg*, formula referenda eſt. Hinc viden-

dendum utrum valores M N arbitrio ſumpti conciliari poſſint cum valoribus ſecundæ dimenſionis formularum Syſtematis baſis datæ, an baſis variabilis; inveniendique ſunt limites utriuſque Syſtematis, ut judicium tutum fieri poſſit ad quodnam Syſtema productum M N $= fg$ jam determinatum pertineat. Quare in æquationibus ſecundæ dimenſionis ſuperius commemoratis, aut ex valore n eruendus eſt valor M N producti, qui mutari quidem poteſt ſine mutatione Syſtematis, donec n in eodem Syſtemate perſiſtit; mutatur vero valor n & Syſtema mutatione Syſtematis ipſius n: & formulæ eam ſubeunt mutationem, quam requirit Syſtema, cui valor datus n vere competit: aut ex dato producto M N determinandus eſt valor n, ac Syſtema, ſive formulæ comparationis, quæ conformandæ ſunt, ut productum datum M N & Syſtema, ad quod pertinent, requirunt: hîc etiam formulæ mutari poſſunt ſine mutatione Syſtematis, vel mutari poſſunt formulæ cum Syſtematis mutatione. Hinc Problema directe vel inverſe tractari poteſt: primo modo terminus primus comparationis ſunt formulæ, quæ datæ ſupponuntur, ad quas valor M N conformandus eſt, atque ideo prout variabilis ſumendus; ſecundo modo M N terminus primus comparationis ſupponitur datus, & formulæ variabiles apte diſponendæ & quoad valorem & quoad Syſtema, & valori dato M N aptandæ.

§. 5. In utroque tamen Problemate tractando caute incedendum eſt. Ne igitur in errorem incidamus, invenienda eſt primum in Syſtemate baſis datæ formula illa, cujus limites maximi valore ſuperent valores alios omnes maximos illarum formularum, quæ ab ipſa varie modificata, ut præcipue docuimus Cap. antecedenti, derivantur, ut hoc maximo maximorum ejuſdem Syſtematis invento tutum judicium fieri poſſit utrum homogeneum comparationis limite hoc maximo minus ſit vel ad ſummum ei æquale, an illum ſuperet: ſi minus, aut æquale huic maximo ſit homogeneum comparationis, æquatio pertinet ad Syſtema baſis datæ; ſi vero majus, ad Syſtema baſis variabilis confugiendum eſt. Ut hoc exemplorum appoſitione clarius intelligatur, æquationem ſecundi gradus mihi ſolvendam propono eamdem inſiſtens viam, quam mihi §§. 38. & 39. *Cap.* antecedentis monſtrarunt. Sumo igitur æquationem ſecundæ dimenſionis ad Syſtema baſis datæ pertinentem $mn = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n.n$, in qua rectangulum mn, uti novimus, non poteſt ſuperare valorem $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$. Poterit igitur quodcumque rectangulum M N in hoc Syſtemate æquatione $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - mm = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right).n$ $=$ M N concludi; in hac enim cum rectangulum propoſitum M N debeat eſſe ſemper minus $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, ſemper poſitivum æquale poſitivo invenies, & rectangulum M N intra zero & $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, quoad valorem, conſtitutum huic æquationi ſemper legi-

time aptare poteris. Et ſane, poſito $MN = \overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}\,.\,m$, erit $\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-m}\,.\,m = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right).\,n$; & facta $\frac{a}{2}-m=n$, erit $\overline{\frac{a}{2}+n}\,.\,\overline{\frac{a}{2}-n} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}+m\right).\left(\frac{a}{2}-m\right)$; & tranſitu facto ad quadrata, $\frac{a^2}{4} - n^2 = m^2$, ſive $\frac{a^2}{4} = n^2 + m^2$ æquatio quadratica, quæ pertinet ad Syſtema baſis datæ: atque ideo legitima æquatio primo ſumpta. Ab hiſce igitur formulis rectangularibus primo ſumptis tranſitus fiat (uti docuimus) ad quadrata hoc modo, $\frac{a^2}{4} - (mn)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4} + 2.\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2 = (MN)^{\frac{2}{2}}$, in quo caſu mn, & MN naturam quadraticam referunt, ideoque utimur pro exponente nota illa $\frac{2}{2}$ §. 25. Cap. II. Lib. I. indicata ad diſtinguendas quantitates ſecundæ dimenſionis vere quadrata a rectangularibus. Verum ex hac duplici comparatione duplex oritur æquatio: (1.ª) $\frac{a^2}{4} + 2.\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2 = (MN)^{\frac{2}{2}}$, (2.ª) $\frac{a^2}{4} - (mn)^{\frac{2}{2}} = (MN)^{\frac{2}{2}}$; in quibus termini omnes, atque utraque membra ſunt vere quadrata. Attamen (1.ª) oſtendit limites zero minimum, & $\frac{a}{2}$ maximum, intra quos valor n contineri debet, ut in Syſtemate propoſito conſiſtamus. In hoc caſu $(MN)^{\frac{2}{2}}$ eſt quadratum variabile, cujus maximus valor nequit ſuperare quadratum $\overline{\frac{a}{2}+\left(-\frac{a}{2}\right)}^2$ (*Tab.* V. *fig.* 3), quod ad quadratum IL′ maximum pertinere docuimus. Et quoniam *Cap.* III. & IV. hujus *Libri* hanc eamdem formulam ſic efferri poſſe oſtendimus, ut ſit $\frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2}-n}\,.\,n - n^2 = (MN)^{\frac{2}{2}}$ hæc ipſa formula dabit $\frac{a^2}{4} + 2.\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2 = \frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2}-n}\,.\,n - n^2 = (MN)^{\frac{2}{2}}$ quadrata media homologa

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AC+CD}^2 = \overline{BC-CD}^2 = \overline{N'C+CD'}^2 = \overline{NC-CD'}^2 \\ \overline{AC-Cd}^2 = \overline{BC+Cd}^2 = \overline{N'C-Cd'}^2 = \overline{NC+Cd'}^2\end{array}\right\} = (MN)^{\frac{2}{2}},$$

quo-

quorum radices, cum ſint puncto dato C medio diviſæ, ſumendas eſſe docuimus §. 11. *Cap.* IV. hujus *Libri* in linea A B, vel N N′ poſitione conſtanti & data per centrum C tranſeunte. Hinc in limitibus $\frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}.\left(-\frac{a'}{2}\right) + \left(-\frac{a'}{2}\right)^2$

$$= \overline{\frac{a}{2} + \left(-\frac{a'}{2}\right)}^{2} = \overline{\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}}^{2} = 4\frac{a^2}{4} = \text{qu. C L} + \text{rect. C l} + \text{rect. C L}' + \text{qu. C l}'$$

$= \&c. = \left(\frac{o}{2}\right)^2 = \text{l L}' = \text{L}' = \&c. = (\text{M N})^{\frac{2}{2}}$. Vide §. 19. *Cap.* IV. hujus *Libri*.

§. 6. Hoc igitur artificio, & hac æquatione non ſolum $(\text{M N})^{\frac{2}{2}}$ quadratum referens eſt variabile, ſed etiam tam quadratum majus, quam minus homologum repræſentare poteſt, ideoque in extremo limite tam quadratum nullum, quam quadratum maximum huic homologum, intra quod omnia, quæ pertinent ad hoc Syſtema, peragi debere *Cap.* IV. demonſtravimus. Super itaque data A B $= a$ (*Tab. V. fig.* 3.) diviſa bifariam in C deſcribantur duo quadrata, duoque rectangula ſimul æqualia, ſive deſcriptum quadratum maximum l L′ intelligatur diviſum in quatuor æquales partes, ac in axe A B vel N′ N ſumantur A D, B D &c., vel N′ D′, N D′ homologæ, eritque

$$\left.\begin{array}{l} \text{A D} = \text{A C} + \text{C D} = \frac{a}{2} + (-n) \\ \text{B D} = \text{B C} - \text{C D} = \frac{a}{2} - n \end{array}\right\} = (\text{MN})^{\frac{1}{2}} \text{ \&c.; \& facta } (-n) = \text{C B},$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{A D} = \text{A C} + \text{C B} \\ \text{B D} = \text{B C} - \text{C B} \end{array}\right\} = (\text{M N})^{\frac{1}{2}};\ \text{ſive } (\text{M N})^{\frac{1}{2}} = (\text{M M})^{\frac{1}{2}} = \text{M}^{\frac{2}{2}} = \text{M}$$

$= (\text{N N})^{\frac{1}{2}} = (\text{N})^{\frac{2}{2}} = \text{N}$: hoc eſt una maxima $= \frac{a}{2} + \left(-\frac{a'}{2}\right) = \text{M}$,

altera minima $= \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} = \text{B} = \text{N}$; vel viceverſa. Quare hujuſce æquationis auxilio ſtatuimus limites maximos rectilineos æquationis ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis datæ ortæ a lineari $m + n = a$ in duo Syſtemata partialia diviſa; intra quos limites alii ſecundæ dimenſionis continentur & lineas A B & N N′ (quæ axes audiunt) ad normam ſe ſecantes in centro C firmavimus.

§. 7. Illud etiam antequam progredior diligenter eſt obſervandum, ſcilicet, ſi in æquatione $\text{M N} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right).n = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.-n$

$= \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2 = (\text{M N})^{\frac{2}{2}}$ ponatur n maxima $= \frac{a}{2}$, fieri M N

=

$= \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}.\frac{a'}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}\left(-\frac{a'}{2}\right) + \left(-\frac{a'}{2}\right)^2 = \overline{\frac{a}{2} + \left(-\frac{a'}{2}\right)}^2 = (MN)^{\frac{2}{2}}$: ergo erit $M.N = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}}.\overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}} = \overline{\frac{a}{2} + \left(-\frac{a'}{2}\right)}^2 = (MN)^{\frac{2}{2}}$: ſcilicet quando in prima formula, quæ ut rectangularis conſideratur, rectangulum fit nullum (in quo caſu una ex radicibus fit maxima $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, altera minima $= o$); in hac eadem formula, conſiderata ut quadratica, fit $(MN)^{\frac{2}{2}} = (M)^2$, vel $= (N)^2$, prout in rectangulari velis vel $N = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = o$, & $M = \frac{a}{2} + \frac{a'}{2}$, vel viceverſa. Et ſane rectangulum pertinens ad Syſtema baſis datæ nequit fieri zero, niſi una ex variabilibus fiat maxima, & altera minima; ideoque quadratum primæ maximum $= 4\frac{a^2}{4}$, ſecundæ minimum $= (o)^2$. Quoties igitur in æquatione $MN = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right).n$ $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2.\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2 = (MN)^{\frac{2}{2}} = (M)^2 = \frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2}}.n.n - n^2$ $= (N)^2 = (o)^2$ rectangulum MN fit zero, in quo caſu $m = o$, $n = \frac{a}{2}$; habetur quadratum maximum $4\frac{a^2}{4}$, & minimum $(o)^2$, quæ quadrata eam legem ſequuntur, quam Capite antecedenti (*Tab.* VI. *fig.* 18.) præſcripſimus, ſcilicet ex. gr. $M^2 = IL'$, $N^2 = (L')^2$. Verum ſi comparetur rectangulum nullum cum quadrato maximo, erit $M.oN = a.oN = AB.B = \overline{AC + CB}^2$: hoc eſt, quando rectangulum eſt nullum in B, $n = CD$ fit maxima & æqualis CB; ideoque creſcente N, vel M in rectangulo, & facta maxima $= 2.\frac{a}{2}$, n in quadrato non niſi ad ſummum uſque ad $\frac{a}{2}$ augeri poteſt. Itaque, facto homogeneo comparationis $MN = fg$, & in Syſtemate baſis datæ $f + g = a$, poſitaque æquatione $fg = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$, ſi fiat $n = o$, neceſſario f vel g debet fieri maxima $= a$, & altera g vel f minima zero æqualis. At eo ipſo, quo (facta zero n) rectangulum $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$ fit zero,

ro, neceſſe eſt ut $fg = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} - m \cdot m$ fiat maximum, cum ſit $m + n = \frac{a}{2}$:
& $m = \frac{a}{2}$: ergo $f + g = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m + m = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$;
ideoque $f = g = \frac{a}{2}$. Quare cum (ut etiam *Cap.* I. hujus *Libri* oſtendimus) rectangulo minimo zero æquali reſpondeat neceſſe ſit rectangulum maximum; æquationes homologæ limitis erunt

$$MN = fg = \begin{array}{c} \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\} \cdot n \\ \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - o\right\} \cdot o \end{array} = \begin{array}{c} \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m\right\} \cdot m \\ \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right\} \cdot \frac{a}{2} \end{array}$$

: atque ideo homogeneum comparationis in hoc caſu vel debet eſſe zero, facta una maxima $= a$, altera zero; vel f & g debent eſſe æquales.

§. 8. Itaque erit $MN - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\} \cdot n = fg - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - o\right\} \cdot o$

$$MN - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m\right\} \cdot m = fg - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right\} \cdot \frac{a}{2}$$

quæ, ut ſint zero æquales, ſit oportet in prima variabilium f, g una maxima, altera minima; in ſecunda f & g inter ſe æquales, ſive æquales $\frac{a}{2}$. Erit igitur

$$MN - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\} \cdot n = a \cdot o - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - o\right\} \cdot o$$

$$= \overline{\left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right\} - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right\}} \cdot o = o \cdot o,$$

$$MN - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m\right\} \cdot m = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right\} \cdot \frac{a}{2}$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = o.$$

Verum ſi hujuſmodi formulæ rectangulares in quadraticas convertantur, erit

$$(MN)^{\frac{2}{2}} + 2\,\frac{a}{2}\,(-n) + (-n)^2 = (fg)^{\frac{2}{2}} + 2\,\frac{a}{2}(-o) + (-o)^2$$

$$(MN)^{\frac{2}{2}} + 2\,\frac{a}{2}\,(-m) + (-m)^2 = \overline{\frac{a}{2} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}}^{\,2}$$

quia rectangulum fg nequit vere quadratum fieri, niſi f ſit identica & æqua-
lis

lis $\frac{a}{2}$: atque ideo prima (facta converſione a rectangulari forma ad quadraticam) fit

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = (fg)^{\frac{2}{2}} = (a).o = M^2;$$ ſecunda

$$(MN)^{\frac{2}{2}} + 2\left\{\frac{a}{2}\right\}.(-m) + (-m)^2 = \frac{a^2}{4} + 2.\frac{a}{2}\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}^2$$

$$= \overline{\frac{a}{2} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}}^2 = M^2$$: quæ dat quadratum maximum in Syſtemate baſis datæ. In hoc igitur Syſtemate baſis datæ rectangulo zero reſpondet quadratum maximum $4\frac{a^2}{4} = a^2$.

§. 9. Hiſce poſitis unuſquiſque videt in hoc Syſtemate baſis datæ formulam $MN - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\}.n = fg - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\}.n$ tunc fieri zero, quando rectangulum $fg = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n}.n$, ſive quando $n = f$, & $g = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n$, ut ſit $f + g = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$. Verum ſi ita efferatur formula $MN + \left\{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right\}.n = fg + \left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right).n$, cum $\left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right).n$ ſit rectangulum pertinens ad Syſtema baſis variabilis, in quo $-\frac{a}{2} + n = m$, & $n = \frac{a}{2} + m$; ideoque n minima $= \frac{a}{2}$: hujuſmodi formula non poteſt fieri zero, niſi ſit $f = g = \frac{a}{2}$, ita ut, facta $n = \frac{a}{2}$, habeatur $fg + \left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right).n = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$. Hæc porro ad quadraticam conformata dabit $(MN)^{\frac{2}{2}} + 2\left(-\frac{a}{2}\right)n + n^2 = (fg)^{\frac{2}{2}} + 2\left(-\frac{a}{2}\right)n + n^2 = \frac{a^2}{4} + 2\left(-\frac{a}{2}\right)n + n^2 = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, quam ſcimus pertinere ad Syſtema baſis variabilis, atque $n^2 + 2n\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 = m^2$ eſſe unum ex quadratis minimis æquationis quadraticæ Syſtematis linearis baſis variabilis $n = a + m$, facta $m = o$: cui ex adverſo reſpondet quadratum

tum homologum minimum $n^2 - 2 . n - \frac{a}{2} . \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} = (o)^2 = n^2$ vere zero. Igitur æquatio nos docet, quando in Syſtemate baſis datæ

$$mn - \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right). n = mn - \left(\frac{a}{2} + m\right).\left(\frac{a}{2} - m\right) = (mn)^{\frac{2}{2}} - \frac{a^2}{4} + m^2 = (o)^2$$

$\left(\text{in quo quadratica } (mn)^{\frac{2}{2}} + m^2 = n^2 + m^2 = \frac{a^2}{4}\right)$ fit revera zero, in Syſtemate baſis variabilis haberi unum ex quadratis minimis hujuſce Syſtematis. Nam in Syſtemate baſis variabilis $n^2 + 2n\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)^2$ $= \frac{a}{2} . \frac{a}{2} + \left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right).n$; & facta $-\frac{a}{2} + n = m$, erit $n^2 + 2n\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)^2$ $= \frac{a}{2} . \frac{a}{2} + \left(-\frac{a}{2} + m\right).\left(\frac{a}{2} + m\right)$, quod non eſt zero, ſed eſt quadratum pertinens ad Syſtema baſis variabilis æquationis quadraticæ $\frac{a^2}{4} + n^2 = m^2$. Quo artificio a rectangulis zero in Syſtemate baſis datæ fit tranſitus ad quadratum minimum $n^2 + 2n\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)^2$ in Syſtemate baſis variabilis; & univerſim ab hoc ad Syſtema baſis variabilis. Nam quoniam eſt $mn - \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right).n$ $= o = mn + \left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right). n = mn + \left(-\frac{a}{2} + m\right).\left(m + \frac{a}{2}\right)$; & in Syſtemate baſis variabilis $\left(m + \frac{a}{2}\right).\left(m - \frac{a}{2}\right)$ poſitivum $= mn$; erit $mn - \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right).n = o$ S. A. $= mn + mn$ S. Y.: ac, facto tranſitu ad quadrata, $mn + \left(-\frac{a}{2} + m\right).\left(m + \frac{a}{2}\right) = (mn)^{\frac{2}{2}} + \left(-\frac{a^2}{4} + m^2\right)$, ſive $n^2 - \frac{a^2}{4} + m^2$: ſed $-\frac{a^2}{4} + m^2 = n^2$ in Syſtemate baſis variabilis; ergo $(mn)^{\frac{2}{2}} + \left(-\frac{a^2}{4} + m^2\right)$ $= n^2 + n^2$. Hoc eſt quæ erat differentia duorum rectangulorum æqualium ſive zero in Syſtemate baſis datæ fit ſumma rectangulorum in Syſtemate baſis variabilis; &, facto tranſitu ad quadrata, vel eſt quadratum minimum

$n^2 + 2n \left\{ -\frac{a}{2} \right\} + \left\{ -\frac{a}{2} \right\}^2 = m^2$, vel eſt ſumma duorum quadratorum æqualium n^2 æquationis $m^2 = \frac{a^2}{4} + n^2$.

§. 10. Simili modo in Syſtemate baſis variabilis $\left\{ -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n \right\} . n - \left\{ -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n \right\} . n = 0$: ſed hæc ſic efferri poteſt $\left\{ -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n \right\} . n + \left\{ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \right\} . n$, quæ ut fiat zero neceſſe eſt n in primo rectangulo, quæ pertinet ad Syſtema baſis variabilis, ſit minima $= \frac{a}{2}$, & in ſecundo pertinens ad Syſtema baſis datæ ſit maxima æqualis item $\frac{a}{2}$; erit enim $\left\{ -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n \right\} . n + \left\{ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \right\} . n$ $= -\frac{a}{2} . \frac{a}{2} + \frac{a}{2} . \frac{a}{2}$. Itaque rectangulum ſecundum pertinens ad Syſtema baſis datæ erit MN, & æquatio $MN + \left\{ -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n \right\} . n$ $= (MN)^{\frac{2}{2}} + 2 . \left\{ -\frac{a}{2} \right\} n + n^2$, quæ iterum dat quadratum minimum Syſtematis baſis variabilis, in quo n minima $= \frac{a}{2}$. Sed formula ſuperior ſic ordinari poterat $- . \left\{ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \right\} . n + \left\{ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \right\} . n = 0$; ſive

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \right) . - n + \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \right) . n = 0$$

$$= \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \right) . n + \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \right) . - n = MN + \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \right) . - n;$$

in qua n nequit eſſe major $\frac{a}{2}$: ac tandem, facto tranſitu ad quadrata, $(MN)^{\frac{2}{2}} + 2 . \frac{a}{2} (-n) + (-n)^2$; in qua ut $(MN)^{\frac{2}{2}}$ ſit vere quadratum, ſit oportet $M = N = \frac{a}{2}$; ergo $0 = \frac{a^2}{4} + 2 \frac{a}{2} (-n) + (-n)^2$, quod eſt quadratum maximum in Syſtemate baſis datæ, cui reſpondet homologum $\frac{a^2}{4} - 2 . \frac{a}{2} - n . n - n^2 = 0$. Verum quoniam $(MN)^{\frac{2}{2}} + 2 \frac{a}{2} (-n) + (-n)^2$ $= MN$

$= MN + \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right)(-n) = MN - \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right).n$ $= MN - \left(\frac{a}{2} + m\right).\left(\frac{a}{2} - m\right) = n^2 - \frac{a^2}{4} + m^2$: hæc & in hoc Syſtemate poteſt eſſe zero, cum ſit $n^2 + m^2 = \frac{a^2}{4}$. Rectangula igitur hujuſmodi tam in Syſtemate baſis datæ, quam in Syſtemate baſis variabilis poſſunt eſſe zero. Sed cum ſit etiam in prima $MN + \left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right).n$ $= MN + \left(-\frac{a}{2} + m\right).\left(m + \frac{a}{2}\right) = (mn)^{\frac{2}{2}} + \left(-\frac{a^2}{4}\right) + m^2$ $= n^2 + m^2 - \frac{a^2}{4}$, in qua m ſemper major $\frac{a}{2}$; numquam poterit æqualis eſſe zero, niſi fiat $n = 0$, & $m^2 = \frac{a^2}{4}$, & æquatio $n^2 = m^2 - \frac{a^2}{4}$; in qua, facto m^2 minimo $= \frac{a^2}{4}$, eſt alterum quadratum $n^2 = (0)^2$ item minimum. Attamen hæc eadem formula ſuperior, quæ pertinet ad Syſtema baſis variabilis $\left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right).n - \left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right).n = 0$ ſic ordinari poterit $MN - \left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right).n = 0$; &, facta $-\frac{a}{2} + n = m$ in qua n minima $= \frac{a}{2}$, erit $= (MN) - \left(-\frac{a}{2} + m\right).\left(\frac{a}{2} + m\right)$; &, facto tranſitu ad quadrata, $(MN) - \left(-\frac{a}{2} + m\right).\left(\frac{a}{2} + m\right)$ $= (MN)^{\frac{2}{2}} - \left(-\frac{a^2}{4} + m^2\right) = n^2 - \left(-\frac{a^2}{4} + m^2\right)$; quæ quidem æqualis eſt zero, cum ſit $n^2 = -\frac{a^2}{4} + m^2$. At in hoc caſu, ſi ad Syſtema baſis datæ referatur, erit $(MN) + \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\}.n = n^2 - \left\{-\frac{a^2}{4} + m^2\right\}$,

 & fa-

& facta $-\frac{a^2}{4} = -m^2 - n^2$, erit $(MN) + \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\} . n$

$= n^2 + \frac{a^2}{4} - m^2 = n^2 + n^2$.

§. 11. Quare ex dictis veritas quidem nova, ſed certa & evidens, ac maximi momenti in tota Analyſi impoſterum ſtatuenda eſt; nempe in quacumque æquatione ſecundæ dimenſionis, quæ vulgo dicitur *affecta*, in qua termini omnes ab una ſigni $=$ parte poſiti a communi methodo zero æquales fiunt, primum membrum, qui eſt complexus omnium terminorum, communi artificio ſemper ad quadratum relatum non poſſe fieri zero, ut falſo hactenus a communi Analyſtarum conſenſu creditum eſt, ſed revera eſſe maximum cum ſuo minimo conſociatum in Syſtemate baſis datæ communi vinculo ſigni $=$ (quod male ſemper æqualitatis dicitur); vel eſſe minimum finitum, cui neceſſario alterum minimum zero æquale reſpondere vidimus in Syſtemate baſis variabilis: ideoque ille ſciat impoſterum ſe vehementer errare, qui communi opinione præoccupatus complexum hujuſmodi terminorum, cui ex adverſo ope ſigni $=$ reſpondet zero, velit zero æqualem ſtatuere: hoc enim modo quod eſt quantum cum zero confunderet. Nam data æquatione $fg = \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\} . n$ ad Syſtema baſis datæ pertinente, erit quidem $fg - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\} . n = 0$, donec ſub eadem forma contineatur æquatio, in qua revera primum membrum eſt ipſum zero, dummodo ponatur rectangulum identicum a ſe ipſo ſubtractum, ut monuimus *Cap.* I. *Lib.* II., ac paſſim. Verum transformata formula in ſequentem $fg + \left\{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right\} . n = 0$, transferimur a Syſtemate baſis datæ ad Syſtema baſis variabilis, quæ non amplius differentiam ejuſdem rectanguli, ſed ſummam duorum rectangulorum ad Syſtema baſis variabilis pertinentium repræſentat. Porro ex duplici ratione, qua §. 8. oſtendimus in Syſtemate baſis datæ fieri poſſe zero ipſum rectangulum, hîc non niſi ſecundo modo indicato uti licet in hoc Syſtemate baſis variabilis, ut æquatio in hanc novam formam converſa ad nihilum redigatur. Nam cum $\left\{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right\} . n$ ſit rectangulum Syſtematis baſis variabilis, ſcimus in æquatione partiali $-\frac{a}{2} + n = m$, ſive $n = \frac{a}{2} + m$ valorem minimum, ad quem deſcendere poteſt n, eſſe $\frac{a}{2}$; ergo in æquatione $fg + \left\{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n\right\} . n = 0$, facta n minima $= \frac{a}{2}$,

erit

erit $n = \frac{a}{2} = f$, & $g = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = -\frac{a}{2}$, & æquatio

$fg + \left\{ -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n \right\} . n = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} + \left\{ -\frac{a}{2} . \frac{a'}{2} \right\} = 0$, quæ hoc tantum modo fieri poteſt zero. Verum ſi hujuſmodi æquatio ad quadraticam formam ope coeficientis 2 reducatur (quemadmodum ſemper communis methodus faciendum eſſe docet), erit $fg + \left\{ -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n \right\} . n$

$= \frac{a}{2} . \frac{a}{2} + \left\{ -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a'}{2} \right\} . \frac{a'}{2} = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} + \left\{ -\frac{a}{2} . \frac{a'}{2} \right\} = 0$

$= (fg)^{\frac{2}{2}} + 2 . \left\{ -\frac{a}{2} \right\} n + n^2 = \frac{a^2}{4} + 2 . \left\{ -\frac{a}{2} \right\} \frac{a'}{2} + \left\{ \frac{a'}{2} \right\}^2$, quæ dat quadratum minimum in Syſtemate baſis variabilis, ſed finitum, non zero. Quare in hujuſmodi æquatione $n^2 + 2n \left\{ -\frac{a}{2} \right\} + (fg)^{\frac{2}{2}} = 0$, ſi ad idem Syſtema baſis variabilis referatur, primum membrum eſt quadratum minimum, ſed finitum conſociatum cum quadrato minimo zero æquali ope ſigni $=$, & æquatio legitima

$M^2 = n^2 + 2n \left\{ -\frac{a}{2} \right\} + \left\{ -\frac{a}{2} \right\}^2 = n^2 - 2 . n \overline{- \frac{a}{2} . \frac{a}{2}} - \left\{ \frac{a}{2} \right\}^2$, ſive

$M^2 = \left[\frac{a'}{2} + \left\{ -\frac{a}{2} \right\} \right]^2 = 4 \frac{a^2}{4} = \frac{(a')^2}{4} - \left\{ \frac{a}{2} \right\}^2 = (0)^2$;

quæ oſtendit, quando minimum $M^2 = 4 \frac{a^2}{4}$, alterum minimum M^2 fieri neceſſario æquale $(0)^2$. Igitur hac æquatione methodo communi tractata non habentur niſi duo minima quadrata diverſa m^2, n^2 in Syſtemate baſis variabilis, & $(fg)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4}$, cum utraque f & g ab hac eadem æquatione ad valorem $\frac{a}{2}$ neceſſario determinetur.

§. 12. In Syſtemate vero baſis variabilis vidimus §. 10.

$\left\{ -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n \right\} . n - \left\{ -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + n \right\} . n = 0$; quam in ſequentem transformatam $\left\{ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \right\} . -n + \left\{ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \right\} . n = 0$

$\left\{ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n \right\} . - n + fg = 0$ oculis ipſis

patet

patet ad Syſtema baſis datæ translatam fuiſſe. Hæc vero duobus ſimul modis §. 8. indicatis poteſt fieri æqualis zero, vel quando n maxima in hoc Syſtemate $= \frac{a}{2}$, vel quando n minima $= 0$: primo modo poſita $n = \frac{a}{2}$ fit $f = n = \frac{a}{2}$, & $g = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$, ſive f & g inter ſe æquales, & $f + g = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$; ſecundo vero facta $f = n = 0$ fit $g = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$. Verum ſi æquatio ad quadraticam reducatur, non niſi ſecundo modo uti licet, quia ut $(fg)^{\frac{2}{2}}$ ſit vere quadratum, ſit oportet $f = g = \frac{a}{2}$, & æquatio

$$(-n)^2 + 2(-n)\frac{a}{2} + (fg)^{\frac{2}{2}} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right).(-n) + (-n)^2$$

$= \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right). - n + fg = 0$. Quare ſi ad idem Syſtema baſis datæ referatur, erit æquatio $M^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)(-n) + (-n)^2$

$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2.\overline{\frac{a}{2} - n}.n - n^2 = (0)^2$, ſive $M^2 = \left(\frac{a}{2} + \left(-\frac{a'}{2}\right)\right)^2$

$= \left(\frac{a}{2} - \frac{a''}{2}\right)^2 = (0)^2$: hoc eſt M^2 maximum $= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}}^2$, & M^2 minimum $= (0)^2$; quæ ſunt quadrata homologa limitis maximi & minimi in Syſtemate baſis datæ. Itaque a rectangulo identico in Syſtemate baſis datæ a ſe ipſo ſubtracto fit tranſitus ad ſummam duorum rectangulorum in Syſtemate baſis variabilis, quæ ut ſint zero neceſſe eſt n fieri minimam $= \frac{a}{2}$, & ab hiſce rectangulis zero æqualibus tranſitus fit ad duo quadrata homologa ambo minima in hoc Syſtemate, ſed unum finitum quidem eſt, alterum vero $= (0)^2$. A rectangulo vero identico in Syſtemate baſis variabilis a ſe ipſo ſubtracto transferimur formulæ modificatione ad duo rectangula ambo minima zero æqualia, vel ad duo rectangula maxima ſigno negativo conjuncta (quæ poſita identica fiunt zero) ad Syſtema baſis datæ pertinentia: & ab iſtis ad quadratum maximum $\overline{\frac{a}{2} + \left(-\frac{a'}{2}\right)}^2 = 4\frac{a^2}{4}$, & ad minimum $\left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right)^2 = (0)^2$ tandem ſola unius formulæ transformatione deferimur. Hinc in utroque Syſtemate zero abſoluti ope & ſigno $=$, quo quantitates limitis homologæ inter ſe colligantur, facile & eleganter tranſitus fit ab uno ad alterum Syſtema, & ad duo

duo quadrata minima homologa facto tranſitu a Syſtemate baſis datæ ad Syſtema baſis variabilis, ad duo vero quadrata, quorum unum maximum, alterum minimum, ſi a Syſtemate baſis variabilis primo ſumpto ad Syſtema baſis datæ tranſlati fuimus. Quo perventi æquationes medias utriuſque Syſtematis homologas artificiis ſupra traditis invenimus, atque imaginarium ſemper vitamus.

§. 13. Nam a quadratis ſuperius inventis maximo & minimo in Syſtemate baſis datæ, minimo & minimo in Syſtemate baſis variabilis ad media Syſtematis facto tranſitu, facile eſt nobis in alterutro Syſtemate conſtitutis ad rectangula, & ab iſtis ad quadrata ad diagonalem, ac tandem ab iſtis iterum ad rectangula propria cujuſcumque Syſtematis artificiis ſupra traditis noſmet transferre. Etenim a quadrato maximo in Syſtemate baſis datæ, & minimo

$\frac{a^2}{4} + 2\,\frac{a}{2}\,(-n) + (-n)^2 = (o)^2 = \frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2} - n}.n - n^2$, in

quibus $n = \frac{a}{2}$, fit tranſitus ad media poſito $(o)^2 = M^2$, ut æquatio ſit

$$M^2 = \frac{a^2}{4} + 2\,\frac{a}{2}.(-n) + (-n)^2 = \frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2} - n}.n - n^2.$$ Sed

$$M^2 = \frac{a^2}{4} + 2\,\frac{a}{2}.(-n) + (-n)^2 = \frac{a^2}{4} - 2.\overline{\frac{a}{2} - n}.n - (n)^2$$

$= MN = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right).n = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - .\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n - n + n\right).n$

$= \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right).n = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - mn$, facto rectangulo

$\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right).n = mn$. Fiat nunc $\frac{a}{2} - n = m$, eritque

$MN = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} + m\right).\left(\frac{a}{2} - m\right) = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - mn$; & iterum

facto tranſitu ad quadrata $M^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - m^2\right) = \frac{a^2}{4} - (mn)^{\frac{2}{2}}$:

&, facto $\frac{a^2}{4} - m^2 = n^2$, erit $\frac{a^2}{4} = m^2 + n^2$ ad diagonalem $\frac{a}{2}$, &

$M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 = \frac{a^2}{4} - (mn)^{\frac{2}{2}}$, ex qua eruitur $(mn)^{\frac{2}{2}} = n^2$ revera eſſe

quadratum, productum ſcilicet ortum ab una eademque quantitate n in ſe ipſam

ducta. Ab æquatione vero quadratica $M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 = \frac{a^2}{4} - (mn)^{\frac{2}{2}}$ iterum

ad

ad rectangula devenimus facto $MN = \left(\frac{a}{2} + n\right).\left(\frac{a}{2} - n\right)$ $= \left(\frac{a}{2} + (mn)^{\frac{1}{2}}\right).\left(\frac{a}{2} - (mn)^{\frac{1}{2}}\right)$, & facta $\frac{a}{2} - n = m$, fit MN $= \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m\right).m = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m\right).m = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right).n$ ſimplex rectangulum ad unum ex quadrilateris rectilineis noſtræ figuræ 3.ª *Tab.* V. relatum. Simili modo data eadem æquatione ſuperiori, ſed in hanc formam tranſlata $n^2 + 2n\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 = (0)^2 = n^2 - 2.n - \overline{\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} - \frac{a^2}{4}$, qua docemur hujuſmodi quadrata pertinere ad Syſtema baſis variabilis, & ambo eſſe minima, ſed primum $= 4\frac{a^2}{4}$, ſecundum $= (0)^2$, tranſitus fit ad media facto $M^2 = n^2 + 2n.\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 = n^2 - 2.n - \overline{\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} - \frac{a^2}{4}$ $= MN = mn - \left(n + n - \frac{a}{2}\right).\frac{a}{2} = mn - .\left(n + n - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)\frac{a}{2}$ $= nn - \left(n + n - \frac{a}{2}\right).\frac{a}{2} = mn - (mn)$; (nn conſideratum ut rectangulum fit mn): & facta $n - \frac{a}{2} = m$, erit $MN = mn - (n + m).(n - m)$; & facto tranſitu ad quadrata $M^2 = n^2 - (n^2 - m^2) = m^2 - (n^2 - m^2)$; & poſita, ut vidimus, $n^2 - m^2 = \frac{a^2}{4}$, $M^2 = n^2 - \frac{a^2}{4} = m^2 - \frac{a^2}{4} = N^2$: hoc eſt vel $M^2 + \frac{a^2}{4} = n^2$; vel $N^2 + \frac{a^2}{4} = m^2$, quæ transformantur in rectangulum $MN = \left(n + \frac{a}{2}\right).\left(n - \frac{a}{2}\right) = \left(m + \frac{a}{2}\right).\left(m - \frac{a}{2}\right)$; & facta $n + \frac{a}{2} = m$ $MN = m.\left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + m\right) = \left(n + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right).n$; quæ ſunt æquationes homologæ rectanguli Syſtematis baſis variabilis quadrilateri rectilinei a noſtra *figura* 5. *Tab.* V. exhibiti.

§. 14. Rurſus ab æquationibus iſtis ultimis utriuſque Syſtematis ad primas inverſo itinere progredi facile eſt. Nam in Syſtemate baſis datæ eſt $M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2$

=

$=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a^2}{4}-m^2\right)$; &, facto tranſitu ad rectangula, $MN=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}-\left(\frac{a}{2}+m\right).\left(\frac{a}{2}-m\right)$; &, facta $\frac{a}{2}-m=n$, erit $MN=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}-.\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right).n$ $=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right).-n$; factoque tranſitu iterum ad quadrata, $M^2=\frac{a^2}{4}+2.\frac{a}{2}(-n)+(-n)^2$ quadratum Syſtematis baſis datæ, in quo n nequit eſſe major $\frac{a}{2}$. Verum ſi fiat $MN=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}-.\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right).n$ $=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}+\left(-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+n\right).n$, erit quadratum $M^2=n^2+2n\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{a}{2}\right)^2$ pertinens ad Syſtema baſis variabilis, in quo n nequit eſſe minor $\frac{a}{2}$. At ex formula Syſtematis baſis variabilis $M^2=n^2-\frac{a^2}{4}$ eruitur $M^2=M^2+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}$, $=M^2-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\left(m+\frac{a}{2}\right).\left(m-\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}.\frac{a}{2}=MN$, & poſita $m-\frac{a}{2}=n$, erit $MN=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+n\right).n+\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, &, facto tranſitu ad quadratum, $M^2=n^2+2n\left(\frac{a}{2}\right)+\frac{a^2}{4}$; quod quadratum ambiguum pertinere poſſe tam ad Syſtema baſis datæ, quam ad Syſtema baſis variabilis *Cap.* IV. *Lib.* II. demonſtravimus. Verum ſi fiat $M^2=-\left(\frac{a^2}{4}-m^2\right)+\frac{a^2}{4}$, & facto tranſitu ad rectangula $MN=-\left(\frac{a}{2}+m\right).\left(\frac{a}{2}-m\right)+\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, & poſita $\frac{a}{2}-m=n$; erit $MN=-\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right).n+\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$: hæc ſi fiat $=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right).-n+\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ dabit quadratum $M^2=\frac{a^2}{4}+2\frac{a}{2}(-n)+(-n)^2$ ad Syſtema baſis datæ. Verum ſi ita diſponatur $MN=\left(-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+n\right).n+\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, dabit quadratum $M^2=n^2+2n\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{a}{2}\right)^2$ Syſtematis baſis varia-

variabilis. Quare ex utraque formula erui ſemper poſſunt omnes utriuſque Syſtematis æquationes, ut illæ, pro re nata, eligantur, quas n minor vel major $\frac{a}{2}$ neceſſario requirit. Hæc omnia, atque ſingula in ſuperioribus Capitibus ſenſim, aliaque via demonſtrata mutuam opem ad ipſorum confirmationem invicem ſibi præſtant. Etenim hæ, quas hîc veluti compendio facto recenſuimus, æquationes ab una eademque formula varie diſpoſita ac præparata profectæ ſunt æquationes illæ ſecundæ dimenſionis ad utrumque Syſtema pertinentes, quas *Cap.* I. hujus *Libri* §. *3*, ac in *Tabula Cap.* IV. ejuſdem *Libri* invenimus, ac in toto hoc *Libro* II. demonſtravimus.

§. 15. Nunc, ut ſenſim ad ſolutionem quam quærimus penitus abſolvendam accedamus, in æquationibus quadraticis $M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2$ S. A., $M^2 = n^2 - \frac{a^2}{4}$ S. Y. ſuperius commemoratis diligentius excutiendis immorari rei difficultas atque præſtantia nos jubet. Igitur ſi in utraque, quæ ex utraque eruitur, valor n^2 ponatur, æquationes ſequentes ſe ſe offerunt

$$\text{I.}^{\text{a}}\ M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - M^2 \right) \text{ S. A.}$$

$$\text{II.}^{\text{a}}\ M^2 = n^2 - \frac{a^2}{4} = \left(M^2 + \frac{a^2}{4} \right) - \frac{a^2}{4} \text{ S. Y.}$$

Ex ſumpta primum æquatione quadratica $M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2$ ad rectangularem tranſeundo eruitur $MN = \overline{\frac{a}{2} + n}\,.\,\overline{\frac{a}{2} - n}$, quod rectangulum ſcimus intra quadratum maximum *Tab.* V. *figuræ* 3.ª (quod ſemper deſcriptum intelligatur) contineri debere. In hoc, ſi fiat $\frac{a}{2} - n = m$, novimus ex *Cap.* I. hujus *Libri* rectangulum $MN = \left(\frac{a}{2} + n\right).\left(\frac{a}{2} - n\right) = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m\right).m$ pertinere ad rectangulum contentum in aliquo ex octo quadrilateris illic commemoratis, puta AD.DE, atque in hoc caſu $MN = \left(\frac{a}{2} + n\right).\left(\frac{a}{2} - n\right)$ $= \overline{AC + CD}.\overline{BC - CD} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m = AD.BD$. Igitur ad determinandam utramque radicem, ſive factorem, ex quarum producto oriatur rectangulum indicatum ab æquatione $MN = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - m}.m$, duplicem viam inſiſtere poſſumus. Vel enim ſupponitur productum MN datum, & tunc, ut ha-

habeantur valores dati radicum, neceſſe eſt ut innoteſcat etiam valor tam M, quam N: vel poſita baſi a data determinandus eſt valor n intra limites zero minimum, & $\frac{a}{2}$ maximum, ut innoteſcant ſinguli valores M, & N. Primo modo, poſitis datis $M = f$, $N = g$, ac producto fg, erit $M + N$

$$= \left(\frac{a}{2} + n\right) + \left(\frac{a}{2} - n\right) = f + g = \left(\frac{f+g}{2} + n\right) + \left(\frac{f+g}{2} - n\right),$$

& poſita, $f > g$, $\frac{f+g}{2} + n = f$, & $f + g + 2n = 2f$, ſive n

$$= \frac{f-g}{2};$$ ideoque $M + N = \left(\frac{a}{2} + n\right) + \left(\frac{a}{2} - n\right)$

$$= \left(\frac{f+g}{2}\right) + \left(\frac{f-g}{2}\right) + \left(\frac{f+g}{2}\right) - \left(\frac{f-g}{2}\right) = f + g;$$

& $\frac{a^2}{4} - n^2 = \left(\frac{f+g}{2}\right)^2 - \left(\frac{f-g}{2}\right)^2$ ſemper poſitivum, & MN

$$= f.g = \left(\frac{a}{2} + n\right).\left(\frac{a}{2} - n\right) = \overline{\left(\frac{f+g}{2}\right) + \left(\frac{f-g}{2}\right)}.\overline{\left(\frac{f+g}{2}\right) - \left(\frac{f-g}{2}\right)} \quad (1.^a)$$

ſemper poſitivum: nam ſi g eſſet major f, æquatio eſſet

$$MN = g.f = \overline{\left\{\frac{f+g}{2}\right\} - \left\{\frac{f-g}{2}\right\}}.\overline{\left\{\frac{f+g}{2}\right\} + \left\{\frac{f-g}{2}\right\}}$$

$$= \overline{\left\{\frac{f+g}{2}\right\} + \left\{\frac{g-f}{2}\right\}}.\overline{\left\{\frac{f+g}{2}\right\} - \left\{\frac{g-f}{2}\right\}} \quad (2.^a);$$ vel

$$MN = fg = \overline{\left(\frac{f+g}{2}\right) + \left(\frac{f+g}{2}\right)} - n.n:$$ ergo, cum ſit

$f > \frac{a}{2} > g$, erit $\left(\frac{f+g}{2}\right) + \left(\frac{f+g}{2}\right) - n = (f+g) - n$

$= f$; & $n = g$; atque ideo $MN = fg = \overline{\left(\frac{f+g}{2}\right) + \left(\frac{f+g}{2}\right)} - g.g \; (3.^a)$;

vel, ſi $g > f > \frac{a}{2}$, erit $MN = gf = \overline{\left(\frac{g+f}{2}\right) + \left(\frac{g+f}{2}\right)} - f.f \; (4.^a)$.

§. 16. Hæ æquationes, licet valore æquales, ſunt tamen forma inter ſe diverſæ: nam, (*Tab.* V. *fig.* 3.) facta $AD + BD = a = AB = f + g$, erit

 $(1.^a)$

$(1.^a)\ MN = fg = AD.BD,\ (f > g)$: $(2.^a)\ MN = fg = Ad.Bd\ (f < g)$

$(3.^a)\ MN = fg = \overline{AC+CD}.\overline{BC-CD}$: $(4.^a)\ MN = fg = \overline{AC-Cd}.\overline{BC+Cd}$.

Facile tamen altera in alteram convertitur: data enim

$$(4.^a)\ gf = \overline{\left(\frac{g+f}{2}\right) + \left(\frac{g+f}{2}\right) - f}\cdot f, \text{ erit } \frac{a}{2} - n$$

$$= \left(\frac{g+f}{2}\right) - f = \frac{g-f}{2}, \text{ ergo } f = \frac{g+f}{2} - \left(\frac{g-f}{2}\right): \text{ ergo}$$

$$(4.^a)\ gf = \overline{\left(\frac{g+f}{2}\right) + \left(\frac{g+f}{2}\right) - f}\cdot f$$

$$= \overline{\left(\frac{g+f}{2}\right) + \left(\frac{g-f}{2}\right)}\cdot\overline{\left(\frac{g+f}{2}\right) - \left(\frac{g-f}{2}\right)}\ (2.^a).$$

Verum ex hac $(2.^a)$ eſt $\left(\frac{g+f}{2}\right) - \left(\frac{g-f}{2}\right) = f$; ergo

$$\left\{\frac{g-f}{2}\right\} = \left\{\frac{g+f}{2}\right\} - f;$$ &, facta ſubſtitutione,

$$(2.^a)\ fg = \overline{\left\{\frac{g+f}{2}\right\} + \left\{\frac{g-f}{2}\right\}}\cdot\overline{\left\{\frac{g+f}{2}\right\} - \left\{\frac{g-f}{2}\right\}}$$

$$= \overline{\left\{\frac{g+f}{2}\right\} + \left\{\frac{g+f}{2}\right\} - f}\cdot f\ (4.^a).$$ Idem dicas de aliis facta permutatione f in g in caſu in quo f ſit major g.

§. 17. In hac tamen hypotheſi, in qua ſupponitur productum $MN = fg$ datum, arbitrio noſtro relinquuntur valores ſingulorum factorum idem productum conſtituentium: novimus enim ex proprietate hyperbolæ inter aſymptotos eidem producto fg infinita paria factorum inter ſe ductorum æqualia eſſe: ideoque quæcumque æquatio ſecundæ dimenſionis, in qua homogeneum comparationis fg datum ſumis, conſtare poteſt infinitis radicibus, hac lege inter ſe conjunctis, ut earum productum æquale ſemper maneat eidem producto dato fg: quæ radices a me homologæ ſemper appellantur. In hoc tamen caſu baſis a variabilis ſit oportet. Novimus enim in Syſtemate baſis datæ $M + N = a$, quoties mutantur factores, licet non mutetur productum fg, neceſſario oportere ut baſis a mutetur. Nam in æquatione $fg = MN = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right).n$, n ſemper ſcimus debere æqualem eſſe minori factori M, vel N, ſive (*Tab.* V. *fig.* 3.) BD, vel Ad, vel &c. atque ideo alter factor major N, vel M æqua-

qualis ſit oportet $M = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - N = AD$, vel $N = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - M = Bd$.&c.: ideoque cum infinite variari poſſit ſumma factorum M & N, ex quorum producto oritur ſemper idem valor fg; patet oportere ut baſis a variet, quoties ſumma factorum mutatur, quin productum $MN = fg$ valorem mutet.

§. 18. Quod ſi velimus baſim a datam atque conſtantem, tunc in æquatione $fg = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n.n$ factores producti fg univerſim inæquales ſunt, neque æquantur inter ſe, niſi in unico caſu, in quo $n = \frac{a}{2}$ maxima: factor autem minor g æqualis eſſe debet n, & f major $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n$. Porro cum n a zero minimo uſque ad $\frac{a}{2}$ maximum progrediatur, g & f fiunt variabiles; hoc tamen ordine, ut, g a minimo æquali zero uſque ad $\frac{a}{2}$ maximum progrediente, f contra a maximo a uſque ad $\frac{a}{2}$ minimum procedat: atque ideo productum MN, ſive homogeneum comparationis conſtans perſeverare nequit: vidimus enim productum hoc a valore $a.o$ minimo uſque ad maximum $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ progredi, intraque hoſce limites perpetuo productum fg neceſſario mutari. Nequit igitur in hac æquatione conſtans & eadem baſis conciliari cum conſtanti & eodem producto fg: ſed poſito conſtanti ac dato producto fg mutatur baſis, quoties mutantur factores idem productum conſtituentes: contra vero, manente eadem baſi, mutantur factores ac productum intra limites ſuperius aſſignatos.

§. 19. Itaque quoniam eſt productum $\frac{hfg}{h} = fg$ ſemper conſtans ac datum; quoties mutabuntur factores $hf, \frac{g}{h}$, mutabitur baſis, quin factorum productum ullam patiatur mutationem; atque in hoc caſu erit $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$

$$= \left[\frac{hf + \frac{g}{h}}{2}\right] + \left[\frac{hf + \frac{g}{h}}{2}\right], \ \& \ fg = hf.\frac{g}{h}$$

$$\overline{= \left[\frac{hf + \frac{g}{h}}{2}\right] + \left[\frac{hf + \frac{g}{h}}{2}\right]} - \frac{g}{h}.\frac{g}{h},$$ in qua idem productum manet fg,

facto-

factores mutantur, cum ſit $fg = \mathrm{MN} = \overline{\left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] + \left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] - \frac{g}{h}.\frac{g}{h}}$ (1);

& $\mathrm{M} = \left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] + \left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] - \frac{g}{h} = hf$, & $\mathrm{N} = \frac{g}{h}$, & $\mathrm{MN} = hf.\frac{g}{h} = fg$. Animadvertas velim in hac æquatione eſſe $\frac{hf+\frac{g}{h}}{2} - \frac{g}{h} = \frac{hf-\frac{g}{h}}{2}$, & $\frac{g}{h} = \left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] - \left[\frac{hf-\frac{g}{h}}{2}\right]$, quibus valoribus in ipſa ſubſtitutis, erit æquatio

$$\mathrm{MN} = \overline{\left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] + \left[\frac{hf-\frac{g}{h}}{2}\right]} . \overline{\left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] - \left[\frac{hf-\frac{g}{h}}{2}\right]}$$

$= \frac{2hf}{2}.\frac{2g}{2h} = hf.\frac{g}{h}$ (2^{a}), rectangulum : & facto tranſitu ad quadratum $(\mathrm{MN})^{\frac{2}{2}} = (\mathrm{M})^{2} = \mathrm{N}^{2} = \left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right]^{2} - \left[\frac{hf-\frac{g}{h}}{2}\right]^{2} = \frac{2hfg}{4h} + \frac{2hfg}{4h}$ $= fg$ ($3.^{a}$) $= (fg)^{\frac{2}{2}} = \mathrm{M}^{2} = \mathrm{N}^{2}$, quadratum. Verum ſi antequam reducatur æquatio quadratica ſuperior $(\mathrm{M})^{2} = (fg)^{\frac{2}{2}} = \left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right]^{2} - \left[\frac{hf-\frac{g}{h}}{2}\right]^{2}$, cum ſit $\left[\frac{hf-\frac{g}{h}}{2}\right]^{2} = \left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right]^{2} - (fg)^{\frac{2}{2}} = \left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right]^{2} - \mathrm{M}^{2}$, ſi loco primi ponatur ſecundum, erit æquatio

$\mathrm{M}^{2} = \left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right]^{2} - \left[\left(\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right)^{2} - \mathrm{M}^{2}\right]$ ($4.^{a}$); & iterum ad rectangula facto tranſitu

$\mathrm{MN} =$

$$MN = \left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} . \left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} - \overline{\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} + (fg)^{\frac{1}{2}}} \times \overline{\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}} - (fg)^{\frac{1}{2}} . (5.^a).$$

Nunc ponamus ($6.^{am}$) $\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} - (fg)^{\frac{1}{2}} = n$ (quoniam vidimus $(fg)^{\frac{1}{2}}$ ſive quadratum æquale rectangulo fg ignoto), ut ſit æquatio

$$MN = \left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} . \left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} - \times \overline{\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} + \left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} - n.n}, \text{ ſive}$$

$$MN = \left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} . \left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} + \overline{\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} + \left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}} - n . - n . (7^a),$$

ac tandem, facto tranſitu ad quadratum,

$$M^2 = \left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}^2 + 2 . \left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} . (-n) + (-n)^2 \ (8.^a),$$ in quo n nequit eſſe major $\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}$: & quadratum maximum

$$M^2 = \overline{\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} + \left\{-\left(\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right)\right\}}^2 \ (9.^a) ;$$ alterum

$$N^2 = \overline{\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\} - \left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}}^2 = (o)^2 (10.^a),$$ minimum homologum. In hoc tamen caſu in æquatione lineari ($6.^a$) $(fg)^{\frac{1}{2}} = o = (MN)^{\frac{1}{2}} = (N^2)^{\frac{1}{2}} = N$: quo, ut diximus, monemur $(fg)^{\frac{2}{2}}$ variabile $= M^2$ vel N^2; & æquatio ($4.^a$) $M^2 = \left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}^2 - \left\{\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}^2 - (fg)^{\frac{2}{2}}\right\}$

=

$$=\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}^2-\left\{\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}^2-(\mathrm{MN})^{\frac{2}{2}}\right\}=\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}^2-\left\{\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}^2-(\mathrm{oN})^{\frac{2}{2}}\right\}:$$

& facto tranſitu ad rectangula

$$\mathrm{MN}=\overline{\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}+\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}}\,.\,\overline{\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}-\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}}\text{ ; ſive}$$

$$\mathrm{M}=\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}+\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}\text{ maxima radix ,}$$

$$\mathrm{N}=\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}-\left\{\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right\}=\text{o minima.}$$

Hinc a rectangulo MN $=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right).n$ primum ſumpto ad illas omnes transformationes, quas §. 13, 14, & 15 recenſuimus, legitime delati fuimus: hac tamen differentia, quod illic baſis ſemper conſtans, atque ejuſdem valoris $=a$ ſumpta fuerit, ceteris variabilibus; hîc ab homogeneo comparationis ſumpto primo conſtanti cetera variabilia deduximus.

§. 20. Sed ut clarius percipiatur differentia, quæ intercedit maxima inter haſce duas methodos, & ut aliæ non minoris ponderis ex harum comparatione eruantur conſecutiones, præſtat utramque conſtructione utrique propria oculis ſubjicere. Ab hac igitur ultima initium ſumens conſtruendam mihi propono formulam $\mathrm{MN}=fg=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n\right).n$, poſito MN producto conſtanti, quod in hoc caſu *homogeneum comparationis* paſſim audit. In hac æquatione, poſita $n=\frac{a}{2}$ maxima, fit $fg=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, & $g=n$, & $f=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-n=\frac{a}{2}$, ſive rectangulum fg maximum $=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, quando f & g inter ſe æquales fiunt. Porro rectangulum hoc maximum in Syſtemate æquationis linearis baſis datæ $f+g=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$ conſtans atque idem perſeverare nequit, niſi in caſu, quo per eamdem quantitatem h multiplicetur ac dividatur idem productum $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, cum ſit $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$

=

$= \frac{ha}{2} \cdot \frac{a}{2b} = M . N$; in quo caſu mutatur baſis, fitque $M + N = \frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}$,

ideoque æquatio in hanc convertitur $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \left(\frac{ha}{2} \right) \cdot \left(\frac{a}{2b} \right)$

$= \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2} \right] + \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2} \right] - \frac{a}{2b} \cdot \frac{a}{2b}$, in qua primum membrum eſt conſtans, ſecundum vero variabile, cum b quemcumque numerum ad libitum ſignificare poſſit, ne excepto quidem zero, aut infinito abſoluto: quinimo dato uno alterum neceſſario ſequatur oportet: ut hîc palam fit. Æquatio igitur hujus formæ $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \left(\frac{ba}{2} \right) \cdot \left(\frac{a}{2b} \right)$ pertinet ad hyperbolam inter aſymptotos rectanguli conſtantis $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$; in qua factores $\left(\frac{ha}{2} \right), \left(\frac{a}{2b} \right)$ ſunt variabiles, atque inter ſe reciproci. Sumpto igitur (*Tab.* VII. *fig.* I.) quadrato L l′ (*Tab.* V. *fig.* 3.ª) ac productis hinc inde ad infinitum lineis A B, N N′, in quolibet angulo recto deſcriptus intelligatur ramus Hyperbolæ E L E″ inter aſymptotos rectanguli conſtantis CB . BL &c. $= \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, qui, ut patet, tranſibit per punctum L, vel L′ &c; eritque CD $= \frac{ha}{2}$, DE $= \frac{a}{2b}$, & quodlibet CD . DE $= \frac{ha}{2} \cdot \frac{a}{2b}$; ideoque Hyperbolæ æquatio CB . BL = CB.BL′ = &c. $= \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ = CD . DE = CD . DE′ = &c. $= \left(\frac{ha}{2} \right) \cdot \left(\frac{a}{2b} \right)$, cujus proprietas præcipua in eo ſita eſt, ut primi membri productum ſemper datum conſtet factoribus, & quidem numero infinitis, dummodo ii bini, & bini accipiantur, qui reciproca ratione ſe ſe reſpiciunt, quique tunc homologi in hac æquatione cenſendi ſunt.

§. 21. Hac conſtructione peracta ſecetur quælibet DB′ æqualis DE, ut ductæ rectæ per puncta B′ & E, vel E′ &c., quæ concurrunt in puncta N″, vel N‴ &c. alterius aſymptoti, deſcribant quadratum B′ N″ A′ N‴: tandem e centro C per quodlibet L ducatur CL producta uſque ad latus quadrati in M. Quoniam vero CD $= \frac{ha}{2}$, DB′ = DE $= \frac{a}{2b}$; erit CB′ $= \frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}$, quæ

diviſa bifariam in C' dabit $CC' = \dfrac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}$, $C'B' = \dfrac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}$, & DB' $= \dfrac{a}{2b}$: quare $CD.DE = \left(\dfrac{ba}{2}\right).\left(\dfrac{a}{2b}\right) = \overline{CC' + C'B' - B'D}.B'D = M.N$

$= \overline{\left[\dfrac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] + \left[\dfrac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]} - \dfrac{a}{2b}.\dfrac{a}{2b}$, in qua æquatione primum membrum non amplius ut conſtans ſumendum eſt, ſed ut variabile: ideoque æquatio ab Hyperbola inter aſymptotos translata fuit ad triangulum CMB' ope ſubſtitutionis æqualis pro æquali, nec ſecunda hæc convenit cum prima, niſi in unico caſu, in quo latus trianguli MB' ſecat ramum Hyperbolæ in puncto E. Sola igitur transformatione æquationis ejuſdem valoris ab uno ad alterum locum geometricum tranſitus fit, & primum membrum, quod erat datum in prima, convertitur in variabile. Hæc vero non convertitur in primam, niſi ſublato triangulo ponatur primum membrum datum $= CB.BL$, ſecundum vero, facta reductione, variabile atque æquale producto duorum factorum variabilium $\left(\dfrac{ba}{2}\right).\left(\dfrac{a}{2b}\right) = CD.DE$. Quare homogeneum comparationis hac ſecunda transformatione fiat variabile oportet, ac baſis $\dfrac{ba}{2} + \dfrac{a}{2b} = CB'$ conſtans: quo magis ſemper confirmatur id, quod ſuperius §. 18. dixi, quantitates ſcilicet, quæ in Analyſi dicuntur datæ, non ideo hanc denominationem ſumere, quia habent valorem peculiarem aliquem numero determinatum, ſed quia, cum quemcumque valorem determinatum obtinere poſſint, illum ſemper conſtantem retinent: verbo non fluunt: quæ vero in æquatione unius formæ conſtantes ſunt, facta transformatione fluere neceſſario debent, ideoque conſtantes in variabiles, & variabiles in conſtantes tranſmutari poſſunt, prout una, & eadem formula diverſimode transformari poteſt.

§. 22. Quamobrem in æquatione ſuperiori propoſita hujuſce formæ $\left(\dfrac{ba}{2}\right).\left(\dfrac{a}{2b}\right)$

$$= MN = \overline{\left[\dfrac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] + \left[\dfrac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]} - \dfrac{a}{2b}.\dfrac{a}{2b} \quad (1.^a)$$ ſu-

men-

menda eſt ut data quantitas $\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}$, licet h quemcumque valorem obtinere poſſit, quia in æquatione hujuſce formæ baſis quæcumque trianguli C B′ vicem conſtantis gerit, quia nequit fluere: at $\dfrac{a}{2b}$ ut variabilis ſumenda eſt, quia novimus B′D, ſive n in triangulo a zero = B′ uſque ad maximum $\left[\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}\right]$ valorem progredi poſſe: ex quo intelligimus primum membrum univerſim eſſe productum variabile duorum factorum M, N inæqualium, qui nequeunt fieri æquales, niſi quando facta $\dfrac{a}{2b}=n$ maxima $=\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}$ fit rectangulum maximum $M.N=\left[\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}\right].\left[\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}\right]$. Tantum igitur abeſt ut in hac productum M N, quod in prima erat conſtans, eadem proprietate gaudeat transformata formula, ut intra limites

$$\overline{0.\left[\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}\right]+\left[\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}\right]},\ \&\ \left[\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}\right].\left[\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}\right]$$

contineatur. Hujuſmodi tamen limites in hac Methodo pro arbitratu extendi poſſunt. Cum enim h quemcumque numerum a zero uſque ad infinitum repræſentare poſſe dixerimus, patet diagonalem, ſive baſim trianguli uſque ad infinitum augeri poſſe, atque rectangulum maximum C C′. B′C′ a zero uſque ad infinitum procedere.

§. 23. Quoniam vero in æquatione (1.ª) §. antecedentis eſt

$$\left(\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}\right)-\dfrac{a}{2b}=\left(\dfrac{\dfrac{ha}{2}-\dfrac{a}{2b}}{2}\right),\ \&\ \dfrac{a}{2b}=\left(\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}\right)-\left(\dfrac{\dfrac{ha}{2}-\dfrac{a}{2b}}{2}\right),$$

facta hac ſubſtitutione proveniet æquatio

$$MN=\overline{\left(\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}\right)+\left(\dfrac{\dfrac{ha}{2}-\dfrac{a}{2b}}{2}\right)}.\overline{\left(\dfrac{\dfrac{ha}{2}+\dfrac{a}{2b}}{2}\right)-\left(\dfrac{\dfrac{ha}{2}-\dfrac{a}{2b}}{2}\right)};$$

& $MN = \left[\dfrac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - \left[\dfrac{\frac{ha}{2} - \frac{a}{2b}}{2}\right]^2$: in qua rectangulum æquale ponitur differentiæ duorum quadratorum, quod verum eſſe ex calculo ſuperiori manifeſte patet. Verum ſi ponamus MN productum duorum factorum inæqualium, ac conſtantium f, g, erit $fg = M.N$ variabile, in quo non amplius $M = \frac{ha}{2}$, & $N = \frac{a}{2b}$; ſed quia $fg = hf.\frac{g}{h}$, erit $M = hf$, $N = \frac{g}{h}$; & æquatio, poſitis factoribus inæqualibus ac conſtantibus in hanc convertitur (1.^{am}) $fg = hf.\frac{g}{h} = \overline{\left(\dfrac{hf + \frac{g}{h}}{2}\right) + \left(\dfrac{hf + \frac{g}{h}}{2}\right) - \frac{g}{h} \times \frac{g}{h}}$ (poſita $f > g$) vel

(2.^{am}) $gf = hg.\frac{f}{h} = \overline{\left(\dfrac{hg + \frac{f}{h}}{2}\right) + \left(\dfrac{hg + \frac{f}{h}}{2}\right) - \frac{f}{h} \times \frac{f}{h}}$

(poſita $f < g$): vel tandem

(3.^{am}) $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \left(\frac{ha}{2}\right).\left(\frac{a}{2h}\right) = \overline{\left(\dfrac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2h}}{2}\right) + \left(\dfrac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2h}}{2}\right) - \frac{a}{h} \times \frac{a}{h}}$

(poſita $f = g = \frac{a}{2}$, ut ſit $f + g = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$). Artificio igitur a nobis hîc adhibito ab hyperbola æquilatera æquationis inter aſymptotos a nobis ſuperius conſtructa tranſitum fecimus ad hyperbolam rectanguli conſtantis factorum inæqualium f, g æquationis (1.^{a}), vel (2.^{a}), prout f eſt major vel minor g; cum ſemper majorem ducendam eſſe in h, minorem dividendam per h, ultimum membrum, in quod æquationem transformavimus, aperte oſtendat: hoc animadverſum multum conferre ad difficultates, quæ methodo nota ſuperari nequeunt, facile extricandas, novaſque veritates eruendas alio loco demonſtrabimus. Hîc ab hyperbola inter aſymptotos rectanguli factorum æqualium, ad hyperbolam factorum inæqualium tranſitum fecimus, ut inde ad circulum ac hyperbolam æquilateram ejuſdem diametri (ut ſecunda methodo inferius præſtabimus) deduceremur.

§. 24. Ceterum a rectangulo factorum æqualium ad rectangulum $f.g$ (poſita $f > g$), vel $g.f$ (poſita $g > f$), & viceverſa, ſive a 3.^{a} ad alterutram æqua-

quationem ſola permutatione $\frac{a}{2}$ in f & g ea lege, quam requirit (1.ª) vel (2.ª), tranſitus fit: quemadmodum a (1.ª) ad (2.^{am}), vel viceverſa, permutatione f in g, vel g in f. Itaque duobus modis (1.ª), in qua $f > g$ converti poteſt in (2.^{am}), in qua $f < g$: primo ſcilicet facta permutatione f in g, in quo caſu

$$(1.^a)\ fg = MN = \overline{\left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] + \left[\frac{hf-\frac{g}{h}}{2}\right]} \cdot \overline{\left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] - \left[\frac{hf-\frac{g}{h}}{2}\right]},$$

ex qua fit

$$(2.^a)\ gf = MN = \overline{\left[\frac{hg+\frac{f}{h}}{2}\right] + \left[\frac{hg-\frac{f}{h}}{2}\right]} \cdot \overline{\left[\frac{hg+\frac{f}{h}}{2}\right] - \left[\frac{hg-\frac{f}{h}}{2}\right]}.$$

Secundo vero modo, ſi ponatur $\frac{1}{h}$ pro h, & h pro $\frac{1}{h}$, in hoc caſu a

$$(1.^a)\ fg = MN = \overline{\left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] + \left[\frac{hf-\frac{g}{h}}{2}\right]} \cdot \overline{\left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] - \left[\frac{hf-\frac{g}{h}}{2}\right]} \text{ deducitur}$$

$$(3.^a)\ fg = MN = \overline{\left[\frac{\frac{f}{h}+hg}{2}\right] + \left[\frac{\frac{f}{h}-hg}{2}\right]} \cdot \overline{\left[\frac{\frac{f}{h}+hg}{2}\right] - \left[\frac{\frac{f}{h}-hg}{2}\right]}:$$

ſed $hg > \frac{f}{h}$, ergo $\frac{f}{h} - hg$ negativa; ideoque æquatio convertitur in

$$(4.^{am})\ fg = NM = \overline{\left[\frac{\frac{f}{h}+hg}{2}\right] - \left[\frac{hg-\frac{f}{h}}{2}\right]} \cdot \overline{\left[\frac{\frac{f}{h}+hg}{2}\right] + \left[\frac{hg-\frac{f}{h}}{2}\right]}.$$

Ex primo modo (1.ª) $fg = gf$ (2.ª), & M, N in (1.ª) idem ac M, N in (2.ª), ſive f convertitur in g; ex ſecundo vero modo f (1.ª) fit minor g (3.ª), & M fit N, & N fit M. A (1.ª) vero vel (2.ª) tranſitus fit ad (3.^{am}) §. 23, ſi data

$$fg = MN = \overline{\left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] + \left[\frac{hf-\frac{g}{h}}{2}\right]} \cdot \overline{\left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right] - \left[\frac{hf+\frac{g}{h}}{2}\right]}$$

fiat $h = 1$, ut ſit æquatio

fg

$$fg = MN = \overline{\left(\frac{f+g}{2}\right) + \left(\frac{f-g}{2}\right)} \cdot \overline{\left(\frac{f+g}{2}\right) - \left(\frac{f-g}{2}\right)}, \text{ ſive}$$

$$fg = MN = \overline{\left(\frac{f+g}{2}\right) + \left(\frac{f+g}{2}\right) - g} \cdot g: \text{ \& facta } f+g = a, \text{ \&}$$

$$f+g = \frac{f+g}{2} + \frac{f+g}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}, \text{ ſive } f = g = \frac{a}{2},$$

$$fg = MN = \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = \overline{\left[\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right] - \frac{a}{2}}\cdot\frac{a}{2}, \text{ \& item}$$

$$\left(\frac{ha}{2}\right)\left(\frac{a}{2h}\right) = MN = \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right] - \frac{a}{2h}}\cdot\frac{a}{2h}, \text{ in}$$

qua baſis trianguli CB′ (*Tab.* VII. *fig.* 1.) bifariam dividitur in C′, ſed hæc convertitur in

$$MN = \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2h}}{2}\right]} \cdot \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right] - \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2h}}{2}\right]},$$

ex qua rurſus ad hyperbolam æquilateram tranſitus fieri poteſt, ut ſuperius fecimus, poſito MN conſtanti $\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}$, & factoribus ſecundi membri variabilibus.

§. 25. Quod ſi fiat $\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}$ conſtans, ſive ponatur baſis trianguli, ac ipſum triangulum CMB′ conſtans, tunc

$$MN = \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right] - \frac{a}{2h}}\cdot\frac{a}{2h}$$

$= \overline{CC' + C'B' - B'D}\cdot B'D = \overline{CC' + C'D}\cdot\overline{B'C' - C'D}$, in qua æquatione (ut vidimus *Cap.* I. *Lib.* II.) C′D fit variabile; ideoque MN conſtans eſſe non poteſt: ergo per §. 18 poſita baſi conſtanti, MN nequit eſſe conſtans, ſed

ſed variabile; ſitque $MN = CD.DE = \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] + n.\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - n}$

$$= \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]} \cdot \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]}$$

ad triangulum conſtans CMB'. Verum, ſi a rectangulis ad quadrata tranſitum facimus, erit $(MN)^{\frac{2}{2}} = M^2 = N^2$

$$= \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - n^2 = \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$$, in qua

quadratum $\left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$ eſt variabile, poſito conſtanti quadrato

$\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 = (C'B')^2$: atque ideo (MN) fiat & ipſum quadratum &

variabile $= M^2$, vel N^2 neceſſe eſt: ideoque æquatio $M^2 = \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - n^2$

$= \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$ quæ eſt æquatio quadratica, nempe $M^2 + n^2 = \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$ ad Syſtema baſis datæ quadraticum pertinens,

in qua, cum ſit $n^2 = \left(\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right)^2$, oculis ipſis patet n^2 non poſſe ſuperare valorem quadrati conſtantis $\left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right)^2$; atque adeo numquam negativum

tivum

tivum poſitivo æquale oriri poſſe. Æquatio hæc pertinet ad diagonalem trianguli rectanguli baſis conſtantis $\left[\frac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]$, & laterum variabilium. Quod ſi (quemadmodum docuimus §§. 23. & 24.) fiat (1.ª) $(MN)^{\frac{2}{2}} = M^2 = \left[\frac{bf + \frac{g}{b}}{2}\right]^2 - \left[\frac{bf - \frac{g}{b}}{2}\right]^2$ poſita $f > g$, vel (2.ª) $(MN)^{\frac{2}{2}} = M^2 = \left[\frac{bg + \frac{f}{b}}{2}\right]^2 - \left[\frac{bg - \frac{f}{b}}{2}\right]^2$ poſita $f < g$ (quarum prima deducitur a (1.ª), ſecunda a (2.ª) §. 24) ; patet & hîc ſemper negativum, atque adeo imaginarium ſemper vitari debere. Quare, ſi fiat $b = 1$, erit ex prima (3.ª) $M^2 = \left(\frac{f+g}{2}\right)^2 - \left(\frac{f-g}{2}\right)^2$, poſita ſemper $f > g$, vel (4.ª) $M^2 = \left(\frac{g+f}{2}\right)^2 - \left(\frac{g-f}{2}\right)^2$, poſita ſemper $f < g$. In hiſce vero ultimis diagonalis eſt valoris dati $\frac{a}{2}$, in antecedentibus diagonalis eſt $2\left(\frac{bf+\frac{g}{b}}{2}\right)$, vel $2\left[\frac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]$: hinc eruitur in utraque quidem M^2 fieri variabile, ſed in hiſce poſtremis valor quadrati M^2 intra limites $(0)^2$ minimum, & $\left(\frac{f+g}{2}\right)^2 = \left[\frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}{2}\right]^2$ maximum : ſcilicet in (3.ª), quando $g = 0$ (in quo caſu in æquatione $f + g = f + 0g = a$, f maxima $= a$), tunc $M^2 = (0)^2$; quod fit maximum $= \left[\frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}{2}\right]^2$, quando $f = g = \frac{a}{2}$. In (4.ª) vero

M^2 fit

M^2 fit zero, quando g maxima $= a$, & f minima $= o$; fit maximum $= \left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right)^2$, quando $f = g = \frac{a}{2}$. Quare, cum quadratum M^2 variabile infinitos quidem valores ſuſcipere poſſit, ſed tamen intra limites $(o)^2$, & $\frac{a^2}{4}$, quoties quadrato M^2 valorem majorem extra hoſce limites tribuimus, toties tribuimus æquationibus illis valorem illum, quem repugnare novimus: quadratum enim diametri in circulo majus eſt quadrato cujuſcumque lateris: ſed M^2 repræſentat quadratum lateris; ergo repugnat quadratum M^2 lateris majus eſſe quadrato $\frac{a^2}{4}$ diametri. Donec igitur ponitur baſis conſtans $f + g = a$, neque rectangulum haberi poteſt majus $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ in triangulo conſtanti CMB′, nec quadratum lateris in circulo diametri BB′ majus quadrato ipſius diametri BB′.

§. 26. Hæc tamen repugnantia non ab intima rei, de qua agimus, natura proficiſcitur, ſed ab errore noſtræ mentis, quæ quadrato M^2 valorem illum tribuit, qui intra limites $(o)^2$, & $\frac{a^2}{4}$ æquationis aſſumptæ contineri nequit, & nequit ad æquationem propoſitam pertinere. Quadratum enim M^2 majus $\frac{a^2}{4}$ arbitrio conſtitutum, quod cum æquatione propoſita baſis a in hac methodo conciliari nequit, pertinet tamen ad alteram æquationem majoris baſis, cujus limes maximus quadratorum ultra $\frac{a^2}{4}$ productus valorem quadrati aſſumpti M^2 excedit, aut ſaltem adæquat. Ut vero æquatio hæc altera inveniatur, ſumpta limitis maximi æquatione $M^2 = \left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right)^2 - n^2$, in qua $n = o$, tranſitus fiat ad rectangularem

$$MN = \overline{\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right) + \left(\frac{\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}{2}\right)} . \overline{\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right) - \left(\frac{\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}{2}\right)},$$

quæ ex dictis §. 20. hujus Capitis in hanc convertitur $(bM).\left(\frac{N}{b}\right)$

$$= \overline{\left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right) + \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]} \,.\, \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]},$$

in qua n, quæ erat zero in præcedenti, fit $= \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]$: ideoque æquatio non eſt amplius limitis, ſed æquatio intermedia

$$MN = \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - \frac{a}{2b}\,.\,\frac{a}{2b}},$$ quæ ſi reducatur, in hanc convertitur $MN = \frac{ha}{2}\,.\,\frac{a}{2b} = CD\,.\,DE$ in noſtra *figura* ad hyperbolam inter aſymptotos. Ipſum vero rectangulum $(bM)\,.\left(\frac{N}{b}\right) = M\,.\,N$

$$= \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - \frac{a}{2b}\,.\,\frac{a}{2b}},$$ poſita $\left[\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}\right]$ conſtanti, æquale fit $\overline{CC'+C'B'-B'D}\,.\,B'D = CD\,.\,B'D$: quo facto ab hyperbola rectanguli conſtantis $\frac{a}{2}\,.\,\frac{a}{2}$ orti a producto duorum factorum variabilium M, & N (quorum unus ſemper major altero) tranſitum fecimus ad triangulum baſis conſtantis $CB' = \frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}$, & $B'D = \frac{a}{2b} = n$ variabilis. Verum ex hac ultima deducitur

$$MN = \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]} \,.\, \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]},$$

in qua cum $\frac{a}{2b}$ ſit variabilis, ſit etiam variabilis oportet $\frac{ha}{2} - \frac{a}{2b} = n$; & æquatio

MN

$$MN = \sqrt{\left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]+\left[\frac{\frac{ba}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]}\cdot\sqrt{\left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]-\left[\frac{\frac{ba}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]+n}\cdot\sqrt{\left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]-n}.$$ Facto tranſitu ad quadrata habetur æquatio

$$M^2 = \left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2-\left[\frac{\frac{ba}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 = \left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - n^2,$$ ex qua eruitur valorem n, licet indeterminatus ſit, tamen ſemper poſitivum eſſe $\left[\text{cum } \frac{\frac{ba}{2}-\frac{a}{2b}}{2} \text{ ſit ſemper poſitiva}\right]$, ejuſque quadratum ſemper minus quadrato $\left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$ conſtanti. Porro cum b a zero uſque ad infinitum progredi poſſit, valor b ita determinandus eſt, ut quadratum $\left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$ excedat quocumque modo, vel ſaltem adæquet valorem M^2, quem arbitrio determinavimus. Hiſce conſtitutis habebimus æquationem $M^2 = \left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - n^2$ ad Syſtema quadraticum baſis datæ pertinentem $M^2 + n^2 = \left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$, cui applicari poteſt quadratum M^2 valoris intra limites $(0)^2$ minimum, & $\left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$ maximum contenti. Rectangulum vero erit

$$MN = \sqrt{\left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]+n}\cdot\sqrt{\left[\frac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]-n}$$ minimum

 =

$$= \overline{\left\{\frac{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}}{2}\right\}+\left\{\frac{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}}{2}\right\}} \cdot \overline{\left\{\frac{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}}{2}\right\}-\left\{\frac{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}}{2}\right\}},$$

facta n maxima $= \left\{\frac{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}}{2}\right\}$: & erit maximum

$= \left\{\frac{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}}{2}\right\} \cdot \left\{\frac{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}}{2}\right\}$, facta n minima $=$ zero : ſumma vero variabilium $M + N = \left\{\frac{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}}{2}\right\} + \left\{\frac{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}}{2}\right\}$

$= \left\{\left\{\frac{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}}{2}\right\}+n\right\} + \left\{\left\{\frac{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}}{2}\right\}-n\right\}$. In primo caſu $M = N = \left\{\frac{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}}{2}\right\}$; in ſecundo M & N inæquales, & indeterminatæ intra limites conſtitutos : æquatio vero linearis integra $M + N = M = N = \left\{\frac{h\,a}{2}+\frac{a}{2\,h}\right\}$. Quare hoc artificio & hac methodo ab æquatione lineari integra $M + N = a$ ad æquationem linearem integram $M + N = \frac{h\,a}{2} + \frac{a}{2\,h}$ tranſitum fecimus, ut inveniretur verum ac proprium Syſtema, cui rite applicari poſſit valor quadrati M^2, qui congruere non poteſt cum valore M^2 majore $\frac{a^2}{4}$ male ac per errorem æquationi M^2

$$= \left\{\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right\}^2 - n^2 \text{ applicato.}$$

§. 27. Quoniam vero ex §§. antecedentibus conſtat valorem h intra limites zero & infinitum exſpatiari poſſe; conſtat etiam infinita Syſtemata baſis datæ eidem valori M^2 inſervire poſſe: ſufficit tantum ut ſumatur baſis ita compa-rata,

rata, ut quadratum ejus dimidiæ majus ſit quadrato M^2, cujus valorem arbitrio determinavimus, cui cum applicari poſſint valores omnes quadrati M^2, qui a $(o)^2$ uſque ad valorem quadrati M^2 æqualis quadrato hujuſce dimidiæ baſis, patet intra hoſce limites valorem quadrati M^2 arbitrio ſumpti contineri. Et ſane ſit æquatio $M^2 = \left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - n^2$, & fiat M^2 æquale cuicumque dato valori; erit $n^2 = \left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - M^2$, quod ſubſtitutum in æquatione dabit $M^2 = \left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - \left[\left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - M^2\right]$, in qua ſcimus M^2 non poſſe ſuperare valorem $\left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$. Verum ex hac ipſa æquatione reducta, cum fiat identica $M^2 = M^2$, eruitur evaneſcere quadratum datum $\left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$, ideoque (communem etiam doctrinam ſequendo) quodcumque quadratum loco ipſius ſubſtitui poſſe. Subſtituatur igitur loco quadrati dati illud quadratum, quod ſemper majus ſit quadrato M^2, quod arbitrio determinare volumus, & hoc modo illud Syſtema eligi poterit, quod cum valore arbitrio ſumpto M^2 legitime conjungi poſſit. Porro cum infinita quadrata dimidiæ baſis ſumi poſſint ſemper majora quocumque quadrato M^2; luce clarius patet infinita Syſtemata quadratica cum quocumque valore dato M^2 convenire poſſe; atque ideo idem quadratum M^2 converti poteſt in infinita rectangula ejuſdem valoris, quæ tamen oriantur a producto duorum factorum, qui bini & bini ſumpti ab aliis binis & binis ſumptis valore differant. Item, facto tranſitu a quadratis ad rectangula, erit $M^2 = \left(\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right)^2 - \left(\left(\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right)^2 - M^2\right) = MN$

$$= \left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right)^2 - M^2} \times \left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right)^2 - M^2}:$$

in

in quibus cum arbitrio ſumi poſſit conſtans $\left[\dfrac{\dfrac{ha}{2} + \dfrac{a}{2b}}{2}\right]$, dummodo ejus quadratum ſuperet, aut ſaltem adæquet valorem M^2; patet infinita quadratica Syſtemata baſis datæ, & infinitæ variabiles ſive radices binæ & binæ ſumptæ eidem ſolutioni ſatisfacere poſſe.

§. 28. Hiſce præmiſſis ad conſtructionem, quam methodus hæc requirit concinnandam, accedamus. Igitur in una ex hyperbolis inter aſymptotos a *figura* 1. *Tabulæ* VII. exhibitis rectanguli conſtantis $CB.BL = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ ſumantur quæcumque variabiles homologæ CD, DE, quarum productum $\frac{ha}{2}.\frac{a}{2b} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, & poſita earum ſumma $CD + DE = CD + DB'$ in directum in *figura* 2, ne linearum multitudine conſtructio implicetur, deſcriptum intelligatur triangulum CMB' *figuræ* 1.ª, quod cum hyperbola punctum commune E habet: & quoniam hyperbolæ æquatio $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = CB.BL = \frac{ha}{2}.\frac{a}{2b} = CD.DE$

$$= M.N = \overline{\left(\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right) + \left(\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right)} - \frac{a}{2b}.\frac{a}{2b}$$

$= \overline{CC' + C'B'} - B'D.B'D$ tam in *figura* 1.ª, quam in *figura* 2.ª, eadem æquatio in hoc unico caſu puncti E communis tam pertinere poteſt ad hyperbolam, quam ad triangulum. Verum ſi ponatur in *figura* 2.ª $CC' = C'B'$, ſive baſis trianguli CB' conſtans, & $B'D$ variabilis atque fluens, neceſſario erit variabile & productum $\left(\frac{ha}{2}\right).\left(\frac{a}{2b}\right) = MN$ ex duabus fluentibus M, & N; ſive ex $\frac{ha}{2}$, & $\frac{a}{2b}$ conflatum, quod in hyperbola erat ſemper æquale $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$. Ergo in triangulo

$$MN = \overline{\left(\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right) + \left(\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right)} - n.n = CD.DE$$

$= CD.B'D$; & æquatio ab hyperbola inter aſymptotos transfertur ad æquationem propriam trianguli CMB' baſis datæ cujuſcumque, ſed conſtantis $\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b} = CB'$ ope puncti E communis tam hyperbolæ, quam triangulo, a quo exhiberi limites rectilineos æquationum ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis

baſis datæ *Capite* I. hujus *Libri* docuimus. In hac porro ultima æquatione, in qua h intra limites zero & infinitum ſuperius ſtatuimus, ſi fiat h minima $= 1$, erit æquatio hyperbolæ in *figura* 1.ª $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right) + \left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right) - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ $= \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = M.N$, ſive $M = CB$, $N = BL$ non amplius incognitæ ſed datæ: at cum in triangulo $MN = \left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right) + \left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right) - n.n$, docemur in hac hypotheſi punctum commune hyperbolæ & triangulo eſſe in *figura* 1.ª punctum L (recidente M in L vertice hyperbolæ), & baſim trianguli minimam fieri $CB'' = 2CB = 2.\frac{a}{2}$, ac triangulum CLB'' fieri minimum, quando trianguli latus $B'N''$, quod hyperbolam ſecat, fit tangens hyperbolæ in vertice L, in quo triangulo rectangulum fit maximum $= \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ facta n maxima $= \frac{a}{2}$. Hinc colligitur rectangulorum maximorum in triangulis baſis $\frac{ha}{2} + \frac{a}{2h}$ ab hyperbola inter aſymptotos hoc artificio erutis minimum omnium eſſe rectangulum $CB.BL$ æquale & identicum cum rectangulo conſtanti hyperbolæ. Quoties igitur in æquatione ad triangulum minimum CLB'' rectangulo MN variabili tribuitur valor major rectangulo maximo $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$; toties requiritur id quod implicat contradictionem: at mutatione trianguli & baſis $\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}$, ita ut propoſitum MN ſit minus maximo rectangulo $\left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right).\left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right)$ in hoc novo aſſumpto triangulo; ad æquationem pervenitur

$MN = \left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right) + \left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right) - n.n$, quæ cum valore propoſiti rectanguli MN majoris $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$, ſed minoris $\left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right).\left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right)$ conciliari poteſt.

§. 29.

§. 29. Ceterum univerſim æquatio ad triangulum quodcumque CMB′ ſumptum in *figura* 1.ª, & translatum in *figura* 2.ª, quod habet commune cum hyperbola punctum E, ſcilicet

$$(1.)\ MN = \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]} - \frac{a}{2b}.\frac{a}{2b} \text{ ex dictis}$$

§§. 22. & 25. convertitur in hanc

$$(2.)\ MN = \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]}\,.\,\overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - \left[\frac{\frac{ha}{2}-\frac{a}{2b}}{2}\right]}$$

$$= \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]}+n\,.\,\overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]}-n = \overline{CC'+C'D}\,.\,\overline{B'C'-C'D}$$

&c., quoniam in *figura* 1.ª $\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - \frac{a}{2b} = C'B' - B'D = C'D$, quæ in triangulo *figuræ* 2.ª fit variabilis $= C'D = n$. Hac igitur reductione in triangulo CMB′ facta a variabilibus CD, B′D rectangulum MN conſtituentibus ad ſolam variabilem CD tranſitum fecimus, diviſa baſi conſtanti CB′ bifariam puncto medio conſtanti C′: atque eadem æquatio (1.ª) conflata ex duabus variabilibus ad vertices C, B′ transfertur ad unam tantum variabilem ad centrum, ut ſit

$$MN = \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]} - \frac{a}{2b}.\frac{a}{2b} = \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]+n}\,.\,\overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]-n}$$

$$= CD.B'D \qquad = \overline{CC'+C'D}\,.\,\overline{B'C'-C'D}$$

utraque ad idem triangulum CMB′ pertinens. Verum ſi ab rectangulari forma ad quadraticam transferatur æquatio, erit ex dictis

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = M^2 = N^2 = \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - n^2 = \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - m^2,$$

quæ dat Syſtema quadraticum baſis datæ $M^2 + n^2 = \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$, vel

N^2

$N^2 + m^2 = \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]^2$: atque ideo ſi diametro C′B′ vel C C′ conſtante $= \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]$ deſcribatur circulus (*fig.* 2.) C e C′, tunc æquatio a triangulo ad circulum C e C′ diametri C C′ translata fuit : in quo caſu M vel N repræſentat chordam C e, vel C′e, cui ex adverſo ſua homologa reſpondet n, vel m, ſcilicet C′e, vel C e.

§. 30. Hujuſmodi vero translatio a triangulo ad circulum, vel vice verſa, ſcilicet translatio a loco geometrico ad locum geometricum fit vel ope puncti e communis, facta in triangulo $Cd = n = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] = \frac{CC'}{2}$, ut ſit

$$\text{æquatio } MN = \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]} \cdot \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right], \ \& \ M = \frac{3}{2}\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] = B'C + C'd,$$

$$\& \ N = Cd = de = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] : \text{at quadratum}$$

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = M^2 = N^2 = \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]^2 = \frac{3}{4}\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]^2;$$

$\& \ M^2 = \frac{3}{4}\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]^2 ; \ N^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]^2$, quod in hoc caſu æquale eſt rectangulo M N. Punctum vero alterum communicationis trianguli cum circulo erit punctum C′; in quo caſu tam in triangulo, quam in circulo n æqualis eſt zero; ſed in triangulo rectangulum M N = B′C′.C C′

$= \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] \cdot \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]$ maximum, facta $M = N = \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]$;

at in circulo chorda $Ce = M = CC'$ maxima $= \left[\frac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]$ diametro CC';

ejuſque quadratum maximum $\overline{Ce}^2 = M^2 = \left[\frac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]^2 = \overline{CC'}^2$. In ceteris vero caſibus intermediis punctum e factum variabile fluit in triangulo per fixam ac determinatam CM, & hinc ad MB' &c., quemadmodum docuimus *Cap.* I. *Libri* hujus, ex quo habentur limites rectilinei, intra quos continentur valores rationales æquationis

$$MN = \sqrt{\left[\frac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] - n.n} = \left[\frac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2} + n\right] . \left[\frac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2} - n\right],$$

dummodo n æqualis fiat rationali N, ſitque $M = \frac{ba}{2} + \frac{a}{2b} - n$ item rationalis orta ab æquatione lineari Syſtematis baſis datæ $M + n = \frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}$, in qua ſumuntur M, n prout portiones rationales baſis ejuſdem, ſi æquatio propoſita M N &c. ſit libera ab irrationalibus. In circulo vero puncto e excurrente a puncto C per totam ſemiperipheriam circuli C e C', & hinc per alteram circuli diametri C' B', vel per ejus oppoſitam ejuſdem diametri æquatio

$M^2 + n^2 = \left[\frac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]^2$ complectitur quadrata chordarum homologarum Ce, Ce', quæ ſemper hac lege binæ & binæ ſumendæ ſunt, ut ſint latera ejuſdem trianguli rectanguli in ſemiperipheria inſcripti. Ex hac tamen æquatione valores chordarum, ut quiſque videt, univerſim fiunt irrationales, atque in factores irrationales homologos reſolvitur æquatio, ut ſtatim oſtendam.

§. 31. In iſtis tamen æquationibus ſuperius inventis, atque ex hyperbola *figuræ* 1.ª derivatis ſumpta conſtanti quantitate $\frac{\frac{ba}{2} + \frac{a}{2b}}{2}$ (quæ eſt dimidia baſis in triangulo, diameter circuli in quadraticis) non amplius M N, quod dicitur *homogeneum comparationis* poteſt eſſe conſtans, ut in hyperbola, in qua factores $\frac{ba}{2}$, $\frac{a}{2b}$, qui reciprocantur, ſunt variabiles: vidimus enim, hac facta ſuppoſi-

poſitione, in (2.ª) formula §. 29. $\frac{\frac{ha}{2} - \frac{a}{2b}}{2}$ fieri variabilem, ac proinde tam in triangulo facta variabili $\frac{\frac{ha}{2} - \frac{a}{2b}}{2} = n$, quam in circulo facto variabili quadrato $\left[\frac{\frac{ha}{2} - \frac{a}{2b}}{2}\right]^2 = n^2$ non poſſe MN in triangulo, M^2 in circulo conſtans perſeverare: cum rectangulum MN pendeat a determinatione valoris n; M^2 a determinatione quadrati n^2, vel vice verſa; quemadmodum docui §. 2. & ſeqq. Capitis hujus. Valores tamen tam MN, quam M^2 qui pendent a valore n, vel n^2 intra certos limites continentur, quos oportet invenire, ut cognoſcamus intra quos limites facultas nobis relinquatur determinandi arbitrio valores homogenei comparationis MN in triangulo, M^2 in circulo. Itaque in æquatione ad triangulum ſcimus rectangulum fieri zero, quando M, vel N maxima $= B'C' + C'C = \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] = CC' + C'B$; altera N, vel M æqualis zero C, vel B': fieri vero maximum $\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] . \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]$, quando M & N æquales $\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]$ ſunt æquales inter ſe, ſed non identicæ, ut ſit $M = B'C'$, $N = CC'$, vel vice verſa. In circulo vero quadratum $M^2 = \overline{Ce}^2$, maximum $= \overline{CC'}^2$, vel $\overline{B'C'}^2$, facto $n^2 = (C')^2$; vel vice verſa. Itaque in primo caſu in aſſumpta æquatione rectangulari non poſſumus rectangulo MN alios valores tribuere, quam qui intra limites $\left(\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}\right) . o$, & $\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right] . \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]$ continentur: in quadratica vero valores quadratis homologis ad libitum affigendi exhibentur a limitibus $(o)^2$, $\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]^2$. In hac tamen methodo, quam nunc tradimus, cum in eo tota ſit ut ſumat tam baſim trianguli $2\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]$,

 quam

quam diametrum circuli $\left[\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]$ conſtantem quidem, ſed indeterminatam, arbitrio noſtro, prout res fert, determinandam; liberum ſemper erit quantitati $\left[\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]$ illum tribuere valorem, quo rectangulum maximum

$\left[\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right].\left[\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]$, vel quadratum maximum $\left[\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$

majus ſemper ſit quocumque rectangulo M.N, vel quadrato M^2 ad libitum ſumpto, vel a circumſtantiis quæſito.

§. 32. Reſtat ad hujuſce methodi complementum, ut in eadem æquatione ſimul comparetur rectangulum cum quadrato, ſive ut doceamus quomodo ſumpta quantitas aliqua ut rectangularis, vel quadratica poſſit in quadraticam, aut rectangularem tranſmutari ita, ut manente eodem quantitatis valore mutetur tantum ipſius natura. Ut id eleganter obtineamus, ponamus primum in ſemicirculo *figuræ* 2.ª $\overline{Ce}^2$ quadratum $= m^2$, quod converti debeat in rectangulum, eodem valore manente: ex dictis patet $\overline{Ce}^2$ non poſſe ſuperare valorem $\overline{CC'}^2$; ergo habebitur æquatio $\overline{Ce}^2 = \overline{CC'}^2 - \overline{C'e}^2$, ſive $m^2 = \left[\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - n^2$: ergo ex hac ipſa $n^2 = \left[\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - m^2$: hoc valore ſubſtituto in prima ſe ſe exhibet æquatio $m^2 = \left[\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - \left[\left(\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right)^2 - m^2\right]$, quæ eſt identica, ſi reducatur, ſive $m^2 = m^2$. Verum ſi a quadratis ad rectangula tranſitus fiat, erit $m^2 = (mn)^{\frac{2}{2}} = mn$

$$= \overline{\left(\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right)^2 - m^2}} \times \overline{\left(\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right) - \sqrt{\left(\dfrac{\frac{ba}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right)^2 - m^2}};$$

in

in qua, cum ſuperius oſtenderimus m^2 ſemper minus $\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$, quemcumque valorem quadrato m^2 tribuere velis, imaginarium ſemper vitatur. In hac tamen æquatione poſito m^2 dato, ac vere quadrato, erit etiam data ejus radix, quæ repræſentatur a chorda Ce circuli CeC′ noſtræ *figuræ* 2.ª: at ſi m^2 dati valoris in rectangulum tranſmutare velis; tunc licet ejus quantitas ſit data, ſunt tamen ignoti ambo factores, ex quorum producto ipſum oriatur velis. Erit itaque m^2 conſideratum ut quadratum datum quantitate & natura; & ut rectangulum notum quantitate, non natura; ideoque in æquatione $m^2 = mn$, m & n ſecundi membri factores ignoti ſunt, atque determinandi. Hujuſmodi vero determinatio in hac methodo eruitur ab æquatione

$$mn = \left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right)^2 - m^2} \times \left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right)^2 - m^2},$$

in qua conſtat m^2 ſub ſigno radicali poſitum valore æquale eſſe debere rectangulo mn natura ignoto, non quantitate. Quoties igitur mutatur valor quadrati m^2, mutatur & rectangulum & quoad valorem, & quoad factores: ſed m^2 in noſtra *figura* intra limites $(o)^2 = C^2$, & $\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$ continetur; ergo & valor rectanguli. Quare, poſito $m^2 = C^2$, erit rectangulum

$$mn = \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] . \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right];$$

ex qua deducitur maxima $m = CB'$, minima $n = B'$: vel, ſi diameter circuli eſſet $B'C$, $m = B'C$, $n = C$. Poſita vero $m^2 = \overline{CC'}^2$, erit $mn = \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] . \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] = CC' . B'C'$. Non poteſt igitur in hac æquatione m^2 ſuperare valorem quadrati $\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2$, atque ideo & rectangulum mn, cui valore æquale eſt. Verum quoniam diameter circuli eſt quidem conſtans, ſed indeterminata; creſcente valore m^2 ſupra diametrum aſſumptam,

ptam, poterit ſemper diameter ad libitum ita aſſumi, ut ejus quadratum ſuperet ſemper quadratum m^2.

§. 33. Ut porro eleganter inveniatur Locus geometricus noſtræ ultimæ æquationis, circa centrum C′ (*Tab.* VII. *fig.* 2.) circumvolutum intelligatur totum triangulum C′Ce, donec C′e cadat ſupra C′D: quo facto Ce congruet cum DH, & radius C′C deſcribens in revolutione arcum circuli CMH congruet cum CH, & radix Ce quadrati m^2 transfertur in DH, ita ut quæ erat chorda in circulo diametri CC′ fiat ſinus in circulo diametri duplæ: ideoque chordæ homologæ Ce, C′e in primo circulo convertuntur in ſinum & coſinum in ſecundo; & æquatio, quæ donec quadratica ſumpta fuerat pertinebat ad circulum CeC′ diametri CC′, in rectangularem converſa transfertur ad circulum diametri duplæ, ut unuſquiſque facile cognoſcere poteſt. Hinc (ut notavimus §. 27), in hac etiam conſtructione quodcumque quadratum datum transmutari poteſt ſine valoris diſpendio in infinita rectangula, quorum factores homologi different ab aliis homologis ſimul ſumptis, ut in hyperbola inter aſymptotos contingere novimus. Nam cum ex hac methodo pateat diametrum $\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}=CC'$, quæ conſtans ſumitur in eadem conſtructione, eſſe tamen indeterminatam, ac infinitis modis determinari poſſe, quin æquatio turbetur; patet etiam quamlibet æquationem ſecundæ dimenſionis infinitis radicibus conſtare poſſe, ſi modo binæ & binæ illæ ſumantur, quas homologas appellavi. Nemo enim non videt eamdem chordam Ce applicari poſſe infinitis circulis diametri ipſa majoris, ex quibus, eadem revolutione facta, ut oſtendi, trianguli C′Ce ſingulorum circulorum (quæ triangula non conveniunt niſi in eodem latere Ce), gignuntur infiniti circuli ejuſdem ſinus DH, cujus quadratum $\overline{DH}^2=\overline{Ce}^2=m^2$ æquale ſemper eſt cuicumque rectangulo CD.B′D, quod eſt productum variabilium homologarum, quarum ſumma $CD+B'D=M+N=\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}+\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}$; in

in quo caſu $CD+B'D=\dfrac{CD+B'D}{2}+\dfrac{CD+B'D}{2}=\dfrac{CB'}{2}+\dfrac{B'C}{2}$

$=CC'+B'C'$ æquales; vel $CD+B'D=\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}+C'D+\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}-C'D$

$$=\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}+\sqrt{\left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right)^2-\overline{Ce}^2}+\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}-\sqrt{\left(\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2h}}{2}\right)^2-\overline{Ce}^2},$$

quæ,

quæ, ut diximus, variare poſſunt ad infinitum; earum tamen productum

$$CD \,.\, B'D = \left\{ \frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2} \right\}^2 - \left\{ \left\{ \frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2} \right\}^2 - \overline{Ce}^2 \right\} = \overline{Ce}^2:$$

hoc tamen productum non poteſt eſſe majus quadrato $\overline{CC'}^2$, quia in circulo CeC' chorda Ce non poteſt eſſe major diametro CC', in quo caſu altera C'e eſt zero, ſive quadratum chordæ homologæ $\overline{C'e}^2 = (o)^2$, & rectangulum maximum C D . B' D

$$= \left\{ \frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2} \right\} . \left\{ \frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2} \right\} = CC' \,.\, B'C'.$$ At poſita chorda Ce = o = C, erit CD . B'D $= \overline{CC'}^2 - \overline{CC'}^2 = C^2$ differentiæ quadratorum, quæ ſunt æqualia, & identica: ipſum tamen rectangulum CD . B'D = CB' . (oB') æquale quidem zero, quemadmodum eſt differentia quadratorum, ſed conſtans duobus factoribus, quorum unus maximus, alter minimus: ut omittam differentiam quadratorum indicare & punctum C^2 & rectangulum nullum, puncto B' ducto in CB' maximam.

§. 34. Cum vero in noſtra hac ultima æquatione m^2

$$= \left\{ \frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2} \right\}^2 - \left\{ \left\{ \frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2} \right\}^2 - m^2 \right\}$$ ſit $$\left\{ \frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2} \right\}^2 - m^2$$

$= \overline{C'e}^2 = n^2$; ſubſtituto hoc valore in ſuperiori, erit $m^2 = \left\{ \frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2} \right\}^2 - n^2$

$= \overline{CC'}^2 - \overline{C'e}^2$, ſive $= \overline{CC'}^2 - \overline{C'D}^2$: & ab hac, tranſitu facto ad rectangula, eſſe $mn = \overline{CC' + C'D} \,.\, \overline{B'C' - C'D} = CD \,.\, B'D$ in toto hoc Opere docuimus. Sed B'D = DE; ergo CD = C'B' — B'D = C'B' — DE, & $mn = \overline{CC' + C'D} \,.\, \overline{B'C' - C'D} = \overline{CC' + C'B' - DE} \,.\, DE$

$$= \overline{\left\{ \frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2} \right\} + \left\{ \frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2} \right\} - n} \,.\, n$$: qua ſubſtitutione ope C'e = C'D tranſitum iterum fecimus ad triangulum *Tab.* V. *fig.* 3. *Capitis* I.

hu-

hujus *Libri*. Hæc autem dat $m+n = \left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] + n + \left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - n$;

quæ eſt æquatio linearis pertinens ad Syſtema baſis datæ $m+n = \frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}$,

quam diximus variare poſſe modis ad libitum infinitis. In hac tamen æquatione ſecundæ dimenſionis factor minor primi membri ex. gr. n æqualis eſt (ut vidimus) n ſecundi membri, & alter $m = \frac{ha}{2} + \frac{a}{2b} - n$. Hinc ſi n rationalis eſt, rationalis ſit oportet alter factor m; & æquatio hæc inſervit ad factores rationales inveniendos in æquationibus ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis datæ, in qua tamen æquatione rectangulum mn eſt variabile, nec poteſt determinari, niſi determinetur ad libitum n intra limites o, & $\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}$; n vero intra hoſce limites determinata ſemper erit minor $\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}$, quam ad ſummum æquare poteſt, & m ſemper major $\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}$, quam adæquat, quando facta eſt maxima.

§. 35. Rurſus eadem formula $m^2 = \left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - \left\{\left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - m^2\right\}$ ſic efferri poterat

$$mn = \left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right].\left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - .\left\{\left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right].\left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - mm\right\},$$

quæ fit rectangularis $= \left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right].\left[\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - \overline{\left\{\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}+m\right\}}.\overline{\left\{\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}-m\right\}}$:

ſed ex dictis $\dfrac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2} - m = B'C' - B'D = DC = n$: ergo facta ſubſtitutione

mn

$$mn = \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right].\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] - \overline{\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}+\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}} - n.n, \text{ ſive}$$

$$mn = \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right].\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right] + \overline{\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}+\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}} - n.-n;$$

& tranſitu facto ad quadrata

$$m^2 = \left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 + 2\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right](-n) + (-n)^2$$

$$= \overline{\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]+(-n)}^2 = \overline{CC'+(-DC')}^2 = \overline{CC'+C'D}^2, \text{ cui}$$

homologum reſpondet alterum $m^2 = \overline{B'C'-C'D}^2$, & in extremis limitibus

$$M^2 = 4.\left[\frac{\frac{ha}{2}+\frac{a}{2b}}{2}\right]^2 = (o)^2;$$ quemadmodum docuimus præcipue *Cap.* IV. hujus *Libri*. Quibus omnibus magis magiſque ſemper confirmatur quicquid in hoc Opere tot modis demonſtravi, & in Opuſculis meis, ac præcipue in tertio, in quibus eædem transformationes aliis artificiis analyticis obtinentur.

§. 36. Porro cum noſtra *figura* (2.ª) a (1.ª) revulſa poſſit applicari tam axi CB hyperbolæ *figuræ* 1.ª, & CN″, quam ſuis oppoſitis CA′, CN‴ (cum ſit ex proprietate hyperbolæ EB′ = E″N″ = eA′ = A′e′ = E′B′); unuſquiſque videt rectangulum CB . BL $= \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ minimum maximorum cujuſcumque trianguli CMB′ eſſe æquale CB.B″B æquale quadrato CL: quod cum idem contingat in ceteris angulis, ac in ceteris hyperbolis, eruitur quadratum $\overline{CB+BB''}^2$ (quod eſt quadratum maximum alterius variabilis, quando altera homologa fit zero in triangulo CLB″) æquale eſſe CL + Cl + Cl′ + CL′: quibus ſubſtitutis loco primi tranſitum facimus ad conſtructionem figuræ 3.ª *Tab.* V.ª. Hinc colligimus, ſi primum ſumptum Syſtema ſecundæ dimenſionis baſis datæ æquationis linearis a quadrato maximo l′L (ut *Capite* I. hujus *Libri* fecimus) concluſum fuerit, confugiendum eſſe ad conſtructionem *figuræ* 1.ª *Tab.* VII., quoties hiſce limitibus prætergreſſis baſim majorem *a* ſumere cogimur. Hoc animadvertiſſe ſuo loco multum juvabit. Quamobrem

hac methodo æquationes omnes ſecundæ dimenſionis, quicumque valor ad libitum tribuatur *homogeneò*, quod dicitur *comparationis*, ad Syſtema ſemper baſis datæ reducuntur, in quo mutatur baſis prout libet, aut peculiares circumſtantiæ requirunt, quæ tamen licet indeterminata ſit, conſtans ſemper intra datos limites perſeverat, atque ut data (per §§. 28, & 29.) cenſenda eſt. Vidimus enim baſim datam C B″ trianguli C L B″, quæ eſt minima in hyperbola, poſſe ſemper tranſmutari in ſummam variabilium homologarum, atque a triangulo minimo C L B″ ad quodcumque C M B′ tranſitum facere poſſe, quod tamquam conſtans ſumendum eſt. Quare æquatio ſecundæ dimenſionis quæcumque ſemper hac methodo ad Syſtema ſecundæ dimenſionis baſis datæ pertinebit; atque ideo ſemper ad Syſtema quadraticum baſis datæ referri poterit. Sed *figura* (2.ª) oſtendit hujuſmodi æquationes, præter limites rectilineos quadrati maximi, & rectilineos quadrati inſcripti maximo, conſtrui debere ope duorum circulorum, quorum diametri ſe ſe reſpiciant in ratione dupla, ut a quadrato quolibet ad rectangulum huic æquale, & vice verſa tranſitu facto, invenire poſſimus radices vere homologas, vel ſingulas quadratorum homologorum, vel binas & binas tam variabiles, quam irrationales, cum ſuis maximis atque minimis homologis, ex quarum producto rectangula oriantur intra quoſcumque limites arbitrio ſumptos, quin in imaginaria impingamus.

§. 37. Quare error meo quidem judicio maximus, qui uſu receptus totam Analyſim infecit, in eo ſitus eſt, quod nullis legibus, nulloque conſilio, ſed arbitrio determinatur valor illius producti, quod dicitur *homogeneum comparationis*, quod cum non aliud ſit quam productum duarum variabilium ad eamdem æquationem linearem Syſtematis baſis datæ, vel variabilis pertinentium, intra limites a nobis inventos in utroque Syſtemate contineatur oportet; quibus prætergreſſis mutandum eſt Syſtema, atque adeo æquatio, ne in abſurda delabamur. Adde, quod determinatum ſemel ad libitum hoc homogeneum comparationis ſemper idem perſeverare creditur, quacumque ſubſtitutione, vel quocumque artificio formula cui comparatur in aliam formam convertatur. Et tamen vidimus determinato mn homogeneo comparationis fieri variabiles factores ſecundi membri, utpote pertinentes ad coordinatas hyperbolæ inter aſymptotos: determinata vero baſi æquali ſummæ duarum variabilium homologarum in hyperbola, ex quarum producto oritur mn; hoc nequit amplius idem, ac prius determinatum fuerat, perſeverare, ſed fit variabile, & intra limites indicatos continetur, intra quos legitime uſurpari poteſt, & ad libitum determinari. Cum tamen æquatio a quadratica ad rectangularem, & vice verſa tranſitum facere poſſit, mutantur limites & natura hujuſce comparationis termini mn hac lege, ut pro diverſa formulæ modificatione modo valor, non natura; modo natura, non valor; modo utrumque mutetur; ut in toto hoc Libro liquido patet. Hinc ex hac falſa omnium conſenſu recepta opinione altera neceſſario non minus falſa & fallax in univerſorum animos irrepſit, qua putatur ſignum = ſemper identitatem aut æqualitatem ſignificare, quæ tamen non niſi cum formula

$m^2 = \left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - \left[\left[\frac{\frac{ha}{2} + \frac{a}{2b}}{2}\right]^2 - m^2\right]$ congruere poteſt. Ex hac tamen ipſa ab identitate ad æqualitatem, & ab æqualitate ad diverſitatem naturæ & quantitatis primo æquationis membro tribuendam §§. ſuperioribus, & toto *Capite* IV. hujus *Libri* legitimum tranſitum fieri poſſe docuimus.

§. 38. Hac nova methodo ſatis pro re de qua agimus a §. 20. uſque ad antecedentem explicata æquationes ſecundæ dimenſionis, opportune mutato baſis valore, ad æquationes Syſtematis baſis datæ omnes reducuntur, ac in ſuas radices homologas reſolvuntur, nec non legitima conſtructione donantur. Reliquum eſt, ut ſumpta ſemper conſtanti & determinata valore quantitate a, quæ in Syſtemate baſis datæ æqualis eſt ſummæ, in Syſtemate baſis variabilis differentiæ variabilium, conſtruantur æquationes ad Syſtema baſis variabilis pertinentes, atque in ſuas homologas radices binas & binas ſumptas reſolvantur: quæ enim ſunt Syſtematis baſis datæ quomodo tractentur methodus ſuperior ſatis conſpicue declaravit. Ea tantum differentia inter utraſque methodos intercedit, quod huic ſecundæ æquationi Syſtematis baſis datæ $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n} . n$ non alia rectangula data arbitrio aptari poſſunt, quam quæ intra limites $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} . o$, & $\frac{a}{2} . \frac{a}{2}$ continentur; in æquatione quadratica $m^2 + n^2 = \frac{a^2}{4}$, quæ pertinet ad circulum diametri $\frac{a}{2}$, ſumma quadratorum chordarum non poteſt ſuperare valorem quadrati diametri $\frac{a^2}{4}$, atque ideo intra limites $(o)^2$, & $\frac{a^2}{4}$ quadrata chordarum homologarum inter ſe reciprocantur; ac tandem in circulo diametri duplæ, in quo quæ erant chordæ homologæ in primo circulo convertuntur in ſinum & coſinum homologos, variabiles ipſæ homologæ intra limites $\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}$, & $\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}$ inverſo modo ſe ſe reſpiciunt ita, ut earum ſumma ſemper $\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}$ æqualis ſit. Dum intra hoſce reſpectivos limites conſtituitur arbitraria homogenei comparationis determinatio, radices omnes fiunt reales: hiſce limitibus vero prætergreſſis in ſtatuendis valoribus, qui non niſi intra limites indicatos arbitrio noſtro relinquuntur, omnia in Syſtemate baſis datæ fiunt imaginaria, cum in poſitivum æquale negativo incidamus: qua tamen æquatione monemur (ut oſtendi) totum Syſtema baſis datæ ad Syſtema baſis variabilis transferendum eſſe, ut legitimis limitibus concludantur valores arbitrio conſtituti, quos perperam contra naturam Syſtematis baſis datæ huic tribuimus.

§. 39. Illud inſuper notandum quod ſi data æquatio $mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} - n . n$ $= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} - m . m$ (in qua ponatur $mn = fg$ producto dato intra limites indicatos factorum f, & g, quorum ſinguli & ipſi dati ſumantur) ad quadraticam $(fg)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4} - n^2 = \frac{a^2}{4} - m^2$ artificiis traditis reducatur, licet rectangulum fg non mutet valorem datum, ſed tantum naturam, ſumendum eſt ut incognitum ſi ad quadrata referatur: ejus enim radix non innoteſcit, niſi prius ad circulum ex. gr. CeC' (*Tab.* VII. *fig.* 2.) diametri $\frac{a}{2} = CC'$ in puncto C, vel C' tamquam chorda applicetur. Facta vero hac applicatione erit

$$(fg)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4} - m^2;\ (fg)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4} - n^2; \text{ ſive}$$

$$\overline{Ce}^2 = \overline{CC'}^2 - \overline{C'e}^2;\ \overline{C'e}^2 = \overline{C'C}^2 - \overline{Ce}^2 : \text{ atque ideo}$$

$$(fg)^{\frac{2}{2}} + m^2 = \frac{a^2}{4};\ (fg)^{\frac{2}{2}} + n^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\overline{Ce}^2 + \overline{C'e}^2 = \overline{CC'}^2;\ \overline{C'e}^2 + \overline{Ce}^2 = \overline{C'C}^2: \text{ \& extracta radice}$$

$$\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}} + m^2} = \frac{a}{2};\quad \sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}} + n^2} = \frac{a}{2}$$

$$\sqrt{\overline{Ce}^2 + \overline{C'e}^2} = CC';\quad \sqrt{\overline{C'e}^2 + \overline{Ce}^2} = C'C.$$

Lineares vero hæ ſi inter ſe comparentur, erit vel

$$CC' = \frac{a}{2} = \sqrt{\overline{Ce}^2 + \overline{C'e}^2}, \text{ vel } C'C = -\frac{a}{2} = -\sqrt{\overline{Ce}^2 + \overline{C'e}^2}$$

$$CC' = -\frac{a}{2} = -\sqrt{\overline{C'e}^2 + \overline{Ce}^2},\quad C'C = \frac{a}{2} = \sqrt{\overline{C'e}^2 + \overline{Ce}^2}:$$

quibus mirifice confirmantur ea quæ diximus de ſignis quantitati affigendis præcipue *Cap.* VII. *Libri* I., ac initio *Cap.* IV. hujus *Libri*.

§. 40. Quoniam vero in æquationibus ſuperioribus quadraticis dato $(fg)^{\frac{2}{2}}$ quadrato datur etiam m^2, vel n^2, quod dicam $(hh)^{\frac{2}{2}}$, erunt quadrata homologa Syſtematis quadratici $(fg)^{\frac{2}{2}} + (hh)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4}$, & $(fg)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4} - (hh)^{\frac{2}{2}}$; quo valo-

valore ſubſtituto in æquationibus $m^2 = n^2 = \frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}$, & vice verſa in æquationibus $m^2 = n^2 = \frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}}$, orientur æquationes ſequentes

$$(1.^a)\ m^2 = n^2 = \frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}};\ (3.^a)\ m^2 = n^2 = \frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}};$$

$$(2.^a)\ m^2 = n^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}}\right);\ (4.^a)\ m^2 = n^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}\right);$$

$$(5.^a)\ m^2 = n^2 = \frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}};\ (7.^a)\ m^2 = n^2 = \frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}}$$

$$(6.^a)\ m^2 = n^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}\right);\ (8.^a)\ m^2 = n^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}}\right):$$

(1.ª) & (2.ª) ſunt æquales; item (5.ª) & (6.ª), at in eodem ſemicirculo ſumptæ fiunt relative identicæ: at (3.ª) eſt homologa (4.ª), & (7.ª) (8.ª), quia data una neceſſario altera exiſtat oportet. In (1.ª) (3.ª), (5.ª), & (7.ª) quadratum m^2 non eſt æquale, ſed homologum alteri quadrato in ſecundo membro: in (2.ª) vero (4.ª), (6.ª), & (8.ª) m^2 eſt æquale alteri quadrati membro, & identicum in eodem ſemicirculo. Quod ſi ab iſtis quadraticis æquationibus tranſitus fiat ad rectangulares, erunt æquationes

$$m^2 = (mn)^{\frac{2}{2}} = mn = \begin{cases} \overline{\frac{a}{2} + (fg)^{\frac{1}{2}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - (fg)^{\frac{1}{2}}} & (1) \\ \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}}}} & (2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \overline{\frac{a}{2} + (fg)^{\frac{1}{2}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - (fg)^{\frac{1}{2}}} & (3) \\ \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}} & (4) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \overline{\frac{a}{2} + (bb)^{\frac{1}{2}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - (bb)^{\frac{1}{2}}} & (5) \\ \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}} & (6) \end{cases}$$

=

$$= \begin{cases} \overline{\frac{a}{2} + (bb)^{\frac{1}{2}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - (bb)^{\frac{1}{2}}} \quad (7) \\ \hline \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}}}} \quad (8) \end{cases}$$

Ex iſtis æquationibus eruitur primum ex §. antecedenti tam $\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}}}$, quam $\sqrt{\frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}}}$ ſumi poſſe tam ſigno poſitivo, quam negativo, dummodo in rectangulis ſuperiorum æquationum radices hujuſmodi ſigno contrario afficiantur: quo facto tranſmutantur factores, & qui erat major fit minor, & vice verſa (uti vidimus *Cap.* ſuperiori). Eruitur ſecundo in homologis ſcilicet in (3.ª), & (4.ª), necnon in (7.ª) & (8.ª) tam in quadraticis, quam in rectangularibus quod creſcente una altera decreſcit; &, facta una maxima, altera ſit minima oportet. Itaque quadraticæ homologæ erunt

$$(3.^a)\; m^2 = \frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}\;; \quad (7.^a)\; n^2 = \frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}}$$

$$(4.^a)\; n^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}\right); \; (8.^a)\; m^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}}\right);$$

licet (3.ª) &)7.ª) pertineant ad circulum diametri ſubduplæ, (4.ª) vero & (8.ª) in circulo diametri duplæ contineantur: & facta $(fg)^{\frac{2}{2}} = (o)^2$ erunt æquationes quadraticæ limitis

$$(3.^a)\; m^2 = \frac{a^2}{4} - (o)^2 \quad ; \quad (7.^a)\; n^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{2}{2}}$$

$$(4.^a)\; n^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - o^2\right)\right); \; (8.^a)\; m^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{2}{2}}\right);$$

in rectangularibus vero

$$(3.^a)\; mn = \overline{\frac{a}{2} \pm o} \cdot \overline{\frac{a}{2} \mp o} \quad ; \; (7.^a)\; mn = \overline{\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}} \cdot \overline{\frac{a}{2} \mp \frac{a}{2}}$$

$$(4.^a)\; mn = \overline{\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - (o^2)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - (o^2)^{\frac{2}{2}}}}\;;$$

$$(8.^a)\; mn = \overline{\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{2}{2}}}} \times \overline{\frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{2}{2}}}}\;;$$

ex

ex quibus neceſſario conſequitur non poſſe dari maximum, niſi minimum reperiatur tam in quadraticis, quam in rectangularibus; ſed in iſtis non poſſe dari radicem maximam, niſi altera detur minima zero æqualis: atque ideo in caſibus intermediis ſemper quadrata homologa in quadraticis dato uno intelligenda ſunt: in rectangularibus vero non poteſt haberi una variabilis, niſi altera neceſſario habeatur. Colligitur 3.° facilem patere aditum ab æquatione ad circulum diametri ſubduplæ ad æquationem ad circulum diametri duplæ, & vice verſa; ſive a quadratis ad rectangula, & vice verſa. Hinc nullo negotio ab æquationibus quadraticis homologis ad æquationes rectangulares homologas tranſitus fit. Nam ſumptis æquationibus homologis quadraticis, ac artificio ſuperiori tractatis

$$(3.^a)\ m^2 = \frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}}\right) = bb = mn$$

$$= \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}}$$

$$(7.^a)\ m^2 = \frac{a^2}{4} - (bb)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}\right) = (fg)^{\frac{2}{2}} = mn$$

$$= \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}}$$

tandem pervenitur ad ſequentes æquationes homologas

$$b^2 = mn = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}}$$

$$(fg)^{\frac{2}{2}} = mn = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}},$$

quarum rectangula mn nota quidem ſunt valore, & natura (ſi ut quadrata ſumantur); dant enim æquationes identicas $b^2 = b^2$, $(fg)^{\frac{2}{2}} = (fg)^{\frac{2}{2}}$; ſed ſi ut rectangula ſpectentur, ſunt nota valore, non natura: quæruntur enim factores, qui in ſe ducti productum in prima b^2, in ſecunda $(fg)^{\frac{2}{2}}$ exhibeant. Porro in iſtis æquationibus homologis variato valore b^2 mutatur ſuum homologum quadratum $(fg)^{\frac{2}{2}}$, & vice verſa; ſed creſcente uno decreſcit alterum: ergo & in rectangularibus idem eveniet. Quare in æquatione ſuperiori facto b^2 maximo $= \frac{a^2}{4}$, erunt æquationes rectangulares homologæ

mn

$$mn = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$mn = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (0)^2}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{2} - (0)^2}} = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.\overline{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}}$$

$$= \overline{m+n}.0 = 2m.0 = 2n.0 = (fg)^{\frac{2}{2}} = (0)^2:$$

in prima rectangulum maximum, in ſecunda rectangulum nullum, in quo tamen factor unus m, vel n fit maximus $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, alter fit zero: quæ rectangula ſumenda ſunt in circulo duplæ diametri: quadrata vero pertinent ad circulum diametri ſubduplæ, in quo facta chorda maxima $= \frac{a}{2}$, altera fit zero. Itaque erit (*Tab.* VII. *fig.* 2.

$$mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = CC'.B'C' = \overline{C'C}^2 = \overline{C'e}^2, \text{ vel}$$

$$mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.0 = \overline{CC' + C'B'}.B' = C^2$$

$$mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = B'C'.CC' = \overline{C'B'}^2 = \overline{C'E}^2$$

$$mn = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}.0 = \overline{B'C' + C'C}.C = (B')^2,$$

ſumptis rectangulis in circulo CMB′ radii CC′; quadratis in circulo diametri CC′ vel C′B′, ut oſtendit *figura* eadem 2.ª & quæ diximus *Cap.* I. hujus *Libri*.

§. 41. Eruuntur denique conſecutiones maximi momenti in tota Analyſi ex hac etiam ſuperius *Cap.* IV. demonſtrata Propoſitione, quod ſcilicet in hoc Syſtemate baſis datæ, quando eſt rectangulum $mn = 0$, quadratum m^2, vel n^2 fit maximum. Nam poſita æquatione rectangulari $mn = \overline{\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - .\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n.n}$ in toto Capite antecedenti demonſtravimus eam fieri quadraticam, ſi ad hanc reducatur $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\,\frac{a}{2}.(-n) + (-n)^2$: ergo erit æquatio

$$mn = \frac{a}{2}.\overline{\frac{a}{2} - .\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} - n.n = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\,\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2:$$ ſed facta

$n = \frac{a}{2}$, fit rectangulum $mn = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a}{2}.\frac{a'}{2} = 2m.0 = 2n.0$

=

$= \overline{\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}} . o = \overline{\frac{a}{2} + \left(-\frac{a'}{2}\right)}^2$. Sed (3.ª) §. ſuperioris

$mn = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}} . \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}}$ facto $b^2 = (o)^2$ fit

$mn = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (o)^2}} . \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (o)^2}} = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} - \frac{a}{2} . \frac{a}{2}$: ergo

erit etiam $mn = 2mo = 2no = a.o = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (o)^2}} . \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (o)^2}}$

$= \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2} . \left(-\frac{a'}{2}\right) + \left(-\frac{a'}{2}\right)^2$. Verum cum ſit $(fg)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4} - b^2$, & b^2 $= \frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}$; & $(fg)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$, $b = \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}$, erit etiam $(fg)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - (ob)^2} = \frac{a'}{2}$, & $(hh)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - (ofg)^{\frac{2}{2}}}$ $= \frac{a'}{2}$: ergo in æquationibus ſuperioribus, ſubſtituto pro $\frac{a'}{2}$ in ſecundo membro alterutro valore, habebuntur æquationes

(1.ª) $mn = 2m.o = 2n.o = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (ob)^2}} . \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (ob)^2}}$ $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\frac{a}{2} . \left(-\sqrt{\frac{a^2}{4} - (ob)^2}\right) + \overline{\left(-\sqrt{\frac{a^2}{4} - (ob)^2}\right)}^2$ &

(2.ª) $mn = 2m.o = 2n.o = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (ofg)^{\frac{2}{2}}}} . \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (ofg)^{\frac{2}{2}}}}$ $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\frac{a}{2} . \left(-\sqrt{\frac{a^2}{4} - (ofg)^{\frac{2}{2}}}\right) + \overline{\left(-\sqrt{\frac{a^2}{4} - (ofg)^{\frac{2}{2}}}\right)}^2$: ergo in caſibus intermediis

(1.ª) $mn = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}} . \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}} = \overline{\frac{a}{2} + \left(-\sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}\right.}^2$

$$= \overline{\frac{a}{2} + (fg)^{\frac{1}{2}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - (fg)^{\frac{1}{2}}} = \overline{\frac{a}{2} + (-(fg)^{\frac{1}{2}}}^{\,2}$$

$$(2.^{a})\; mn = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}} = \overline{\frac{a}{2} + \left(- \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}\right.}^{\,2}$$

$$= \overline{\frac{a}{2} + (hh)^{\frac{1}{2}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - (hh)^{\frac{1}{2}}} = \overline{\frac{a}{2} + (-hh)^{\frac{1}{2}}}^{\,2}:$$

ſed ex §. 39. $\sqrt{(hh)^{\frac{2}{2}}} = \pm (hh)^{\frac{1}{2}} = \pm h$; & $\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}}} = \pm (fg)^{\frac{1}{2}}$; ergo tandem

$$(1.^{a})\; mn = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - h^2}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - h^2}} = \overline{\frac{a}{2} + \left(- \sqrt{\frac{a^2}{4} - h^2}\right.}^{\,2}$$

$$= \overline{\frac{a}{2} \pm (fg)^{\frac{1}{2}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} \mp (fg)^{\frac{1}{2}}} = \overline{\frac{a}{2} + \left(-(fg)^{\frac{1}{2}}\right.}^{\,2} = \overline{\frac{a}{2} - (fg)^{\frac{1}{2}}}^{\,2},$$

$$(2.^{a})\; mn = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}}$$

$= \overline{\frac{a}{2} \pm h} \cdot \overline{\frac{a}{2} \mp h} = \overline{\frac{a}{2} + (-h)}^{\,2} = \overline{\frac{a}{2} - h}^{\,2}$: quibus confirmatur denuo veritas *Cap.* III. *Libri* II. §§. 15, & ſeqq., qua palam fit $\left(\frac{a}{2} \mp h\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\,\frac{a}{2}\,(\mp h) + (\pm h)^2$ ſemper ſignificare ſummam, &

$\left(\frac{a}{2} \mp h\right)^2 = \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \overline{\frac{a}{2} + (\mp h)} \cdot \pm h - (\mp h)^2$ ſemper differentiam, prout prima, vel ſecunda forma quadratis tribuitur: ac tandem (ſi addas quæ mox dicemus §§. 46, 47, & 48) evidentiſſime patent veritates a §. 30 uſque ad 36 mei tertii Opuſculi, quæ illic rigide, ſed non evidenter demonſtratæ fuerunt. Veritates has multum conferre impoſterum ad alia non minoris momenti eruenda ſuo loco oſtendetur. Nunc ſtatuatur quoties in hoc Syſtemate quadratum formæ ſuperioris æquale fit zero, toties quadratum hujuſmodi fieri maximum, cui reſpondet in ſecundo membro rectangulum $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot 0}$, vel

qua-

quadratum homologum $\frac{a^2}{4} - 2 . \overline{\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}} . \frac{a'}{2} - \left(\frac{a'}{2} \right)^2 = (0)^2$, ut ſuperius oſtendi. Ac denique ex iſtis jam extra dubitationis aleam poſitam vides æquationem *Capitis* I. *Lib.* II. §. 3.

§. 42. Quæ in §. antecedenti animadvertimus aliam nobis exhibent rationem reducendi æquationes omnes ſecundæ dimenſionis ad Syſtema baſis datæ; atque ideo methodo ſuperiori omnes conſtrui poſſent, & reſolvi. Nam cum ex citato §. rectangulo zero reſpondeat quadratum maximum, ſive ſit $m n = 2 m . 0 = a . 0 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 . \frac{a}{2} \left(- \frac{a'}{2}\right) + \left(- \frac{a'}{2}\right)^2 = m^2$; erit $m^2 = \overline{\frac{a}{2} + \left(- \frac{a'}{2}\right)}^2 = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}}^2$: ab hoc maximo quadrato tranſitus fiat ad rectangulum, & erit $mn = \left(\frac{a}{2} + \frac{a'}{2} \right) . \left(\frac{a}{2} + \frac{a'}{2} \right)$ rectangulum maximum, quod, poſita $\frac{a'}{2}$ conſtanti, intra limites rectilineos trianguli baſis datæ $2 a$ nobis *Cap.* I. *figura* 3.ª *Tab.* V. inventos continetur, cujus æquatio media erit $m n = \overline{\frac{a + a}{2} + \frac{a + a}{2} - n . n} = \overline{a + a - n . n}$ genita a producto variabilium æquationis linearis integræ Syſtematis baſis datæ $m = a + a - n$, ſive $m + n = 2 a$. Ex hac iterum ad rectangulum minimum facto tranſitu erit

$m n = 4 a . 0 = a^2 + 2 a (- a') + (- a')^2 = m^2$ quadrato maximo ſive $m^2 = \overline{a + (- a')}^2 = \overline{a + a}^2$; ex quo, facto tranſitu ad rectangulum maximum, erit $m n = (a + a) . (a + a)$: ergo rectangulum medium $\overline{a + a + a + a - n . n} = \overline{2 a + 2 a - n . n}$, & ſic ad infinitum: & æquatio linearis integra $m + n = 4 a$. Inverſo, ſed ſimili artificio facile fuiſſet a baſi a ad baſim $\frac{a}{2}$ ſubduplam tranſitum facere: qua ratione æquationes omnes ſecundæ dimenſionis utriuſque Syſtematis una methodo ſuperiori Syſtematis baſis datæ & conſtruerentur, & earum radices homologæ, ut ſuperius docuimus, invenirentur. Sed hæc attigiſſe hîc loci ſufficiat; in his enim fuſius explicandis tunc immorabor, cum in *Parte* II.ª *de diviſione, & conjunctione legitima Syſtematis tam baſis datæ, quam variabilis æquationum ſecundæ dimenſionis*, quemadmodum fecimus *Cap.* V. *Libri* I. in æquationibus linearibus, ex compoſito agam.

§. 43. Nunc tandem ad conſtructionem & ſolutionem æquationum ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis variabilis accedentes, quamvis ab unaquaque æquatione ex noſtra *Tabula Cap.* IV. initium ſumere poſſem; tamen ad methodi ele-

elegantiam ac ſimplicitatem veſtigia ſequar conſtructionis a *figura* 1.ª *Tabulæ* VII. exhibitæ, quam in æquationibus conſtruendis ad baſim datam relatis ſuperius adhibuimus: inter enim utraſque ea ſolum differentia intercedit, quod in illis Syſtematis baſis datæ ſupponitur conſtans baſis trianguli CB', ac fluens $B'D$; in iſtis vero ponitur data ac conſtans $CB = \frac{a}{2}$, & CB' baſis a puncto fixo C verſus B' fluens. Vocata itaque $CB = \frac{a}{2}$, $CC' = C'B' = n$, erit rectangulum $B'B.BL = B'B.CB = \overline{n + n - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2}$ (1.ª) $= \overline{B'C' + C'C - CB}.CB$ æquatio ad triangulum variabile CMB'. Verum ſi ponatur in ſupradicta æquatione $n - \frac{a}{2} = CC' - CB = C'B = m$; erit $C'B$ fluens, & incognita, cum ſit baſis CB' & ipſa fluens: erit itaque $n - m = \frac{a}{2}$, ſive $CC' - C'B = \frac{a}{2}$; in qua æquatione CC', $C'B$ fluentes & incognitæ differunt tamen inter ſe quantitate data $= \frac{a}{2}$. Subſtituto hoc valore in æquatione (1.ª) erit $MN = \overline{n + m}.\overline{n - m} = B'B.CB$, in qua vidimus, quando m eſt zero minima, punctum C' cadere in B, & B' in B'', ac baſim $B''C$ minimam $= B''B + BC = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = M - N = \frac{a}{2} + n + \frac{a}{2} - n$, ex qua oritur $M = \frac{a}{2} + n$, $N = n - \frac{a}{2}$, & $MN = \overline{n + \frac{a}{2}}.\overline{n - \frac{a}{2}}$. Ergo ab æquatione rectangulari $MN = \overline{n + m}.\overline{n - m}$ (in qua poſita $m = 0$ eſt $MN = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = CB.B''B$) facto tranſitu ad quadrata erit $(MN)^2 = n^2 - m^2$, & ſi fiat $n^2 - m^2 = \frac{a^2}{4}$ tranſitum facimus (*figura* 3.ª) ad circulum diametri variabilis $CC' = n$, & unius chordæ $CM = \frac{a}{2}$ conſtantis, & datæ, alterius homologæ MC' variabilis, in quo diameter n non poteſt eſſe minor $CB = \frac{a}{2}$, & differentia quadrati diametri variabilis $CC' = n$ a quadrato chordæ variabilis ſemper conſtans $= \frac{a^2}{4}$. Si igitur radio $CB = \frac{a}{2}$ deſcribatur circulus BMA, atque ex quocumque puncto peripheriæ M ducatur radius CM, & tangens MC', circulus variabilis quæſitus tranſibit ſemper per puncta C, M, C', eritque ſemper

per $\overline{CC'}^2 - \overline{MC'}^2 = \overline{CM}^2 = \frac{a^2}{4}$: poſito punćto M in B, in quo tangens eſt nulla, diameter CB circuli CM′B æqualis fit chordæ CM, quæ cum ipſa congruit, & fluente M per quadrantem circuli uſque in N, diameter CC′ & chorda MC′ fiunt infinitæ, ſed ſemper earum quadrata differunt per quadratum conſtans $\frac{a^2}{4}$.

§. 44. Ab hoc circulo, qui eſt locus æquationis quadraticæ Syſtematis baſis variabilis $n^2 = \frac{a^2}{4} + m^2$ poteſt fieri tranſitus ad rećtangularem, ſi poſita CC′ conſtanti licet indeterminata revolutum concipiatur circa centrum C triangulum CMC′, donec M cadat in A, & erit AC″ = MC′, CC′ = CC′. Igitur a circulo diametri CC′ tranſitum fecimus ad circulum diametri duplæ, in quo erit ſemper $C'''A \,.\, C'A = \overline{n - \frac{a}{2}} \,.\, \overline{n + \frac{a}{2}} = \overline{AC''}^2 = m^2 = mn$; & æquatio $m^2 = mn = n^2 - \frac{a^2}{4} = \overline{n - \frac{a}{2}} \,.\, \overline{n + \frac{a}{2}}$. Quare ſi in æquatione $m^2 = n^2 - \frac{a^2}{4}$ ponatur pro n^2 ejus valor $m^2 + \frac{a^2}{4}$, erit æquatio $m^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$ identica; quę tamen reſolvitur in rećtangularem $m^2 = mn = \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2} \,.\, \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$, in qua n^2 minimum $= \frac{a^2}{4}$, vel m^2 minimum zero æquale procedit uſque ad infinitum, ac rećtangulum mn a rećtangulo $2m.0 = a.0 = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} \,.\, 0$ uſque ad

$$\sqrt{\infty^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2} \,.\, \sqrt{\infty^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} = \infty \,.\, \infty$$ infinitum. Quare in hoc Syſtemate omnia peraguntur ut ſuperius oſtendimus in Syſtemate baſis datæ, in quo diametri circuli ſunt valoris dati; hac tantum differentia quod in Syſtemate baſis variabilis diametri circulorum variabiles & ipſæ ſunt; & in limitibus in Syſtemate baſis datæ ſemper minimo reſpondeat maximum, & vice verſa; hîc ſemper aut duo limites minimi, aut duo maximi, ſibi invicem reſpondeant. Et ſane vidimus ſuperius ſæpe, & collegimus ex §. 14. *Cap.* hujus eamdem æquationem quadraticam $M^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$ utrique Syſtemati reſpondere: at ſi $\frac{a^2}{4}$

ſit

ſit majus m^2, tunc $-\frac{a^2}{4}+m^2$ eſt differentia negativa; & æquatio $M^2=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a^2}{4}-m^2\right)$ poſitiva pertinet ad Syſtema baſis datæ, in quo cum m^2 ſemper ſit minus $\frac{a^2}{4}$, omnia rite procedere oſtendimus, atque ex hac radices omnes deduximus nulla imaginarii labe infectas. Quod ſi ponamus $m^2 > \frac{a^2}{4}$, tunc $m^2+\frac{a^2}{4}$ ſemper majus erit $\frac{a^2}{4}$, atque ideo $M^2=\left(m^2+\frac{a^2}{4}\right)-\frac{a^2}{4}$ ſemper poſitivum: ex quo deduximus radices omnes ad hoc Syſtema pertinentes. Quando vero m^2 minimum æquale eſt zero, habetur in Syſtemate baſis datæ n^2 maximum $=\frac{a^2}{4}$: at in Syſtemate baſis variabilis n^2 minimum $=\frac{a^2}{4}$ æquationis $n^2=\frac{a^2}{4}+m^2$. Hæc nunc attigiſſe ſufficiat ad id, quod in hac *Parte* I.ª propoſitum mihi fuerat, ut prima ſcilicet hujuſce Methodi fundamenta jacerem: cetera quæ ex his ſequuntur ſane graviſſima in progreſſu Operis enucleanda relinquo.

§. 45. Nunc tantum oſtendam oportet quomodo ab hac conſtructione ope circulorum diametri variabilis ad curvam continuam, quæ Hyperbola dicitur, tranſitus legitimus fiat: quod facile obtinebimus, ſi memoria revocemus quæ *Cap.* V. *Lib.* I. §§. 47. & ſeqq. diximus de duobus modis, quibus ab uno ad alterum Syſtema nobis licet tranſire. Nam ſi (*Tab.* VII. *fig.* 4, quæ intelligatur eſſe 5.ª *Tabulæ* V.ª) radio C B deſcribatur minimus circulus $CB=\frac{a}{2}$ intra quadratum datum $IL'=4\cdot\frac{a^2}{4}$, quando in æquatione $n-\frac{a}{2}=m$ eſt $m=0$, & n minima $=CB=\frac{a}{2}$; atque inde infiniti circuli DD′d radii ſemper majoris $CD=n$ deſcribantur: erit ex circuli proprietate $dB.DB=\overline{BM}^2$, ſive $n+\frac{a}{2}.n-\frac{a}{2}=\overline{BM}^2=m^2$ ſed $dB=AD$; ergo $AD.DB=AD.DE=\overline{BM}^2$: ergo ſi ex D Q abſcindatur $DH=BM$, erit $AD.DB=n+\frac{a}{2}.n-\frac{a}{2}=\overline{DH}^2=m^2$, ſive $n^2-\frac{a^2}{4}=m^2$, quam ſcimus eſſe æquationem ad hyperbolam æquilateram ad axes; ergo punctum H in curva: & cum BM ordinata in circulo ſemper ſit minor DQ latere quadrati CQ, & ſemper major $BD=DE$, ramus hyperbolæ ſemper intra parallelas CQ, BE ad

ad infinitum productas continebitur, & CQ erit una ex aſymptotis, quemadmodum oſtendi *Cap.* IV. hujus *Libri* §. 40. Hac deſcriptione ope circuli utraque Syſtemata, atque curvæ ſingulis pertinentes inveniuntur: qui circuli enim ſunt extra A N B datum utpote variabiles dant hyperbolam, intra vero datum habentur circuli, qui pertinent ad Syſtema baſis datæ, atque hinc ad hyperbolam inter aſymptotos aditus patet, ut oſtendimus *figura* 1.ª. Inſuper cum liberum ſemper ſit quemvis radium infinitorum circulorum ſumere ut conſtantem & datum, patet quamcumque baſim arbitrio ſumi poſſe loco a: quo facto mutantur etiam radii circuli ad Syſtema baſis datæ pertinentis, & radius hyperbolæ Syſtematis baſis variabilis: hæc animadvertiſſe ſuo loco multum profutura ſenties. Præter hanc conſtructionem, quam tantum hîc innuo, aliam elegantiſſimam, atque apprime utilem exhibebo, cum de neceſſaria Circuli & Hyperbolæ conjunctione in Parte II.ª agam. Hîc interim ſtatuatur a circulo radii variabilis & abſciſſæ datæ gigni hyperbolam radii dati, & abſciſſæ variabilis, & e contra: atque ideo permutatione variabilium in datas, & datarum in variabiles a circulo ad hyperbolam, & vice verſa, & ab uno Syſtemate ad aliud, & a negativo ad poſitivum legitime atque eleganter fieri tranſitum, ut *Cap.* III. *Libri* hujus explicavimus. Ex quo illud etiam conſequitur circulum imaginarium, hoc eſt illum, in quo ſupponitur chorda major diametro, eſſe revera hyperbolam realem, & vice verſa; cum oſtenderimus æquationes $m^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 = n^2 - \frac{a^2}{4}$, quas ab eadem formula *Cap.* IV. derivavimus, ita eſſe comparatas, ut poſita $n > \frac{a}{2}$, in quo caſu eſt negativa, locum habeat ſecunda, & vice verſa ſi ſit n minor $\frac{a}{2}$: quæ tamen formula fit negativa, ac ut nulla cenſenda eſt, quemadmodum animadvertimus *Prop.* XVII. *Cap.* IV. hujus *Libri*.

§. 46. Omiſſis ceteris, quæ ex tradita conſtructione deſcendunt conſecutiones, illud animadverto, quod cum ſæpius ſupra demonſtraverim illi quadrato maximo in Syſtemate baſis datæ, cui reſpondet quadratum minimum zero æquale, in Syſtemate baſis variabilis reſpondere quidem minimum zero æquale, ſed idem ipſum eſſe minimum in ultimo Syſtemate; conſequitur eadem quadrata homologa limitis, quæ in Syſtemate baſis datæ dant maximum & minimum, in Syſtemate baſis variabilis duo minima repræſentare. Hinc ſi hujuſmodi quadrata homologa in ſe ducantur, elegans & facilis nobis ſiſtitur methodus, qua a producto horum quadratorum homologorum ad alterutrum Syſtema ſpectantium liceat nobis tranſitum facere ad productum quadratorum homologorum ad alterutrum Syſtema pertinentium, ſive a Syſtemate ad Syſtema noſmet transferre. Nam ex §. 41. eſt in Syſtemate baſis datæ $mn = 2m \cdot 0 = a \cdot 0 = \overline{\frac{a}{2} + (-b)}^2$

=

$= \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}}^{\,2}$, ſi in Syſtemate quadratico homologo $b^2 = \frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}$ fiat b^2 maximum, ſive $(fg)^{\frac{2}{2}} = (o)^2$, ſive $b^2 = \frac{a^2}{4}$, ut æquatio ſit $mn = 2m.o = a.o = \overline{\frac{a}{2} + \left(-\frac{a}{2}\right)}^{\,2} = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}}}^{\,2} = \overline{\frac{a}{2} + (-\sqrt{\frac{a^2}{4}}}^{\,2}$ maximum in hoc Syſtemate. In Syſtemate vero baſis variabilis facto zero $mn = 2m.o = a.o = \overline{b + \left(-\frac{a}{2}\right)}^{\,2} = \overline{\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}} + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}}^{\,2}$, cum ſit Syſtema quadraticum huic homologum $b^2 = (fg)^{\frac{2}{2}} + \frac{a^2}{4}$, erit $b^2 = \frac{a^2}{4}$ minimum, quando $(fg)^{\frac{2}{2}} = (o)^2$; & æquatio $mn = 2m.o = a.o = \overline{\left(\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)}^{\,2} = \overline{\sqrt{\frac{a^2}{4}} + \left(-\frac{a}{2}\right)}^{\,2}$ dabit quadratum minimum in hoc Syſtemate, quod æquale eſt quadrato maximo in Syſtemate baſis datæ: quorum tamen radices, ut patet, inverſæ ſunt: ex hoc igitur limite communi utrique Syſtemati variabiles homologæ utriuſque Syſtematis erui poterunt. Porro ut ex dato Syſtemate alterum eruatur, quadrata variabilium Syſtematis ex. gr. baſis datæ ducantur in ſe, ut ſit æquatio $M^2N^2 = \overline{\frac{a}{2} + (-b)}^{\,2} . \overline{\frac{a}{2} - b}^{\,2}$, a qua extracta radix dabit $\pm MN = \overline{\frac{a}{2} + (-b)} . \overline{\frac{a}{2} - b}$, ſive $MN = \overline{\frac{a}{2} + (-b)} . \overline{\frac{a}{2} - b}$ rectangulum poſitivum, poſita b minori $\frac{a}{2}$, ad Syſtema baſis datæ pertinens: & $-MN = \overline{\frac{a}{2} + (-b)} . \overline{\frac{a}{2} - b}$ negativum, poſita b majori $\frac{a}{2}$. Erit itaque in hac hypotheſi $MN = \overline{b + \left(-\frac{a}{2}\right)} . \overline{b - \frac{a}{2}}$ poſitivum pertinens ad Syſtema baſis variabilis. At Syſtema baſis datæ eſt $b^2 = \frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}$; Syſtema quadraticum

baſis

baſis variabilis eſt $b^2 = (fg)^{\frac{2}{2}} + \frac{a^2}{4}$: ergo in primo caſu erit

$$MN = \overline{\frac{a}{2}+(-b)}\cdot\overline{\frac{a}{2}-b} = \overline{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-(fg)^{\frac{2}{2}}}}\cdot\overline{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-(fg)^{\frac{2}{2}}}}$$

$= (fg)^{\frac{2}{2}}$ S. A.: in ſecundo

$$MN = \overline{b+\frac{a}{2}}\cdot\overline{b-\frac{a}{2}} = \overline{\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}}+\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}}\cdot\overline{\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}}+\frac{a^2}{4}}-\frac{a}{2}}$$

$= (fg)^{\frac{2}{2}}$ S. Y. Hujuſmodi æquationes æquales ſunt inter ſe, ſed radices, a quarum producto oritur $(fg)^{\frac{2}{2}}$, ſunt prorſus diverſæ: primæ inſerviunt rectangulo $(fg)^{\frac{2}{2}}$ a zero uſque ad $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$, quod $(fg)^{\frac{2}{2}}$ eſt quadratum chordæ (*Tab.* VII. *fig.* 3.) M′B Syſtematis quadratici a circulo diametri $CB = \frac{a}{2}$ comprehenſi, in quo chorda M′B non poteſt ſuperare valorem diametri BC, in quo caſu $b = a$: ſed revolutione facta trianguli (ut dixi) deſcribitur circulus datus BMA radii dupli, qui eſt locus rectanguli MN æqualis quadrato $(fg)^{\frac{2}{2}}$, ideoque patet homogeneo comparationis non poſſe arbitrio alios valores tribui, quam qui intra limites $\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}.o$, & $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ continentur. Secundæ pertinent ad Syſtema quadraticum baſis variabilis $b^2 = (fg)^{\frac{2}{2}} + \frac{a^2}{4}$, in quo $(fg)^{\frac{1}{2}}$ in circulo BMA radii dati CB vicem gerit tangentis MC′, quæ progreditur a zero = B uſque ad infinitum, facta tangente MC′ in puncto N parallela CB, & infinita, quæ tamen tangens ſi applicetur circulo duplæ diametri C′MA, facta quam docuimus revolutione, tranſit in AC″, & applicata (*fig.* 4.) ad hyperbolam fit ordinata db, vel DH. Quare tangens $(fg)^{\frac{2}{2}}$ circuli BNA radii $CB = \frac{a}{2}$ eſt ordinata hyperbolæ æquationis $b^2 - \frac{a^2}{4} = (fg)^{\frac{2}{2}}$, quæ procedit a puncto A & B, vel ab N, & N′ hinc inde uſque ad infinitum; ac deſcribit fluendo quatuor hyperbolæ ramos, qui ideo cenſendi ſunt unam Curvam continuam conſtituere, quemadmodum quatuor Circuli quadrantes Circulum unum continuum conſtituere ſemper judicatum fuit. In hoc Syſtema-

te homogeneo comparationis poſſunt applicari valores omnes, ab $\overline{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}\cdot o$ uſque ad $\overline{\frac{a}{2}+\infty}\cdot\overline{-\frac{a}{2}+\infty}$. Sed de hoc plura ſuo loco.

§. 47. Reſtat ut oſtendamus quid accidat formulæ $\overline{m-\frac{a}{2}}\cdot\overline{m+\frac{a}{2}} = m^2 - \frac{a^2}{4}$, in qua quæritur rectangulum $\overline{m-\frac{a}{2}}\cdot\overline{m+\frac{a}{2}}$ æquale quadrato $\left(m^2-\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{2}{2}}$. In hoc cum ſit $m^2-\frac{a^2}{4}=(fg)^{\frac{2}{2}}$, erit m (ut ſuperius) $=\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}}+\frac{a^2}{4}}$; & æquatio MN $=\overline{m+\frac{a}{2}}\cdot\overline{m-\frac{a}{2}} = \overline{\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}}+\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}}\cdot\overline{\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}}+\frac{a^2}{4}}-\frac{a}{2}}$ $=\left(m^2-\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{2}{2}} = \left(b^2-\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{2}{2}} = (fg)^{\frac{2}{2}}$; quæ eſt eadem ac illa §. ſuperioris, hac tantum differentia, quod loco identici quadrati $(fg)^{\frac{2}{2}}$ ſubſtituitur ejus æquale $b^2-\frac{a^2}{4}$. Verum notandum, quod ſi methodum communem ſequuti ita ſolvamus æquationem, ut fiat $\overline{m+\frac{a}{2}}\cdot\overline{m-\frac{a}{2}}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$, & $m+\frac{a}{2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$, $m-\frac{a}{2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$, & facta tranſpoſitione termini $\frac{a}{2}$ fiat $m=-\frac{a}{2}+\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$, $m=\frac{a}{2}+\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$; tunc m non amplius æquantur, ſed una fit m, altera n, ac conſtituunt rectangulum $mn = -\frac{a^2}{4}+\left(b^2-\frac{a^2}{4}\right)$. Sed ex æquatione quadratica $b^2-\frac{a^2}{4}=(fg)^{\frac{2}{2}}$; ergo $(mn)^{\frac{2}{2}}=-\frac{a^2}{4}+(fg)^{\frac{2}{2}}$, ſive $b^2+\frac{a^2}{4}=(fg)^{\frac{2}{2}}$: ergo facta hac tranſpoſitione termini dati $\frac{a}{2}$, ab æquatione quadratica Syſtematis baſis variabilis $b^2-\frac{a^2}{4}=(fg)^{\frac{2}{2}}$ tranſitus fit ad quadraticam $(fg)^{\frac{2}{2}}-\frac{a^2}{4}=b^2$, & in æqua-

æquatione ad hyperbolam fit variabilium permutatio, ut b quæ erat diameter circuli variabilis fiat tangens circuli dati B N A, & $(fg)^{\frac{1}{2}}$ quæ erat tangens MC fiat diameter circuli variabilis, fitque æquatio $m \,.\, m = m \,.\, n$

$$= \overline{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}} \,.\, \overline{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}} = \overline{(fg)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}} \,.\, \overline{(fg)^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2}}$$

$$= \overline{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}} \,.\, \overline{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}} = b^2,$$ & b tangens, atque $\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = (fg)^{\frac{1}{2}}$ diameter circuli variabilis.

§. 48. Itaque æquationes illæ, quibus quodcumque quadratum in duos factores inæquales, vel æquales, ſed diverſos reſolvi poteſt, vel vice verſa (in quibus tantum perfecta æqualitas inter utraque æquationis membra intercedere debet, utpote erutæ ab identitate valorum utriuſque membri primo poſiti; & ex quibus tantum notionem unam æqualitatis, quam ſigno $=$ hactenus tribuimus, male hauſimus) æquationes inquam iſtæ ſecundæ dimenſionis ad ſequentes reducuntur

$$(1.^{am})\ MN = \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}} \,.\, \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}}}}$$

$$= (fg)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4} - b^2 = \overline{\frac{a}{2} + b} \,.\, \overline{\frac{a}{2} - b} \text{ S. A.}$$

$$(2.^{am})\ MN = \overline{\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}} + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}} \,.\, \overline{\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}} + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}}$$

$$= (fg)^{\frac{2}{2}} = b^2 - \frac{a^2}{4} = \overline{b + \frac{a}{2}} \,.\, \overline{b - \frac{a}{2}} \text{ S. Y.}$$

$$(3.^{am})\ MN = \overline{\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}} - \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}} \,.\, \overline{\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}} - \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}}$$

$$= b^2 - \frac{a^2}{4} = \overline{b + \frac{a}{2}} \,.\, \overline{b - \frac{a}{2}}.$$

In $(1.^a)$ valor datus rectanguli intra limites $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} \,.\, 0$, & $\frac{a}{2} \,.\, \frac{a}{2}$ determinari poteſt: at extra hoſce limites rectangulum eſt imaginarium, quia $(fg)^{\frac{2}{2}}$ repræ-

 ſen-

ſentat quadratum chordæ circuli C M′ B (*fig.* 3.) diametri $\frac{a}{2}$: atque ideo in Syſtemate quadratico baſis datæ $\begin{matrix} (fg)^{\frac{2}{2}} + b^2 = \frac{a^2}{4} \\ \overline{M'B}^2 + \overline{CM'}^2 = \overline{CB}^2 \end{matrix}$ non poteſt contineri quadratum majus diametri quadrato; nec in circulo diametri duplæ rectangulum majus rectangulo maximo $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$. Verum ſi fiat $(fg)^{\frac{2}{2}} > \frac{a^2}{4}$ erit $\frac{a^2}{4} - b^2$ negativum, atque $\frac{a^2}{4} - b^2 = -(fg)^{\frac{2}{2}}$, & $-\frac{a^2}{4} + b^2 = (fg)^{\frac{2}{2}}$: ideoque a Syſtemate baſis datæ quadratico delati fuimus ad Syſtema quadraticum baſis variabilis $-\frac{a^2}{4} + b^2 = (fg)^{\frac{2}{2}}$, in quo b eſt diameter C C′ circuli variabilis, $(fg)^{\frac{1}{2}}$ M C′ chorda variabilis: ſive in circulo dati radii $\frac{a}{2}$ eſt $(fg)^{\frac{1}{2}}$ tangens variabilis M C′, & b ſecans C C′. Quare $\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)^{\frac{2}{2}} = \overline{b + \frac{a}{2}} \cdot \overline{b - \frac{a}{2}}$; ſed $b = \sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}} + \frac{a^2}{4}}$: ergo $\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)^{\frac{2}{2}} = (fg)^{\frac{2}{2}}$

$$= \overline{\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}} + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}} \times \overline{\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}} + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}};$$

quæ eſt (2.ª). A Syſtemate igitur imaginario baſis datæ tranſitum fecimus ad Syſtema reale baſis variabilis. In (2.ª) vero valores, qui arbitrio aſſignari poſſunt rectangulo M N, concluduntur a limitibus minimo $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} \cdot 0$ uſque ad infinitum

$$\overline{\sqrt{(\infty)^{\frac{2}{2}} + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}} \cdot \overline{\sqrt{(\infty)^{\frac{2}{2}} + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}} = (\infty)^2 = \overline{\infty b + \frac{a}{2}} \cdot \overline{\infty b - \frac{a}{2}},$$

quia in Syſtemate quadratico $(fg)^{\frac{2}{2}} = b^2 - \frac{a^2}{4}$, $(fg)^{\frac{1}{2}}$ eſt chorda circuli diametri variabilis b, & chordæ conſtantis $\frac{a}{2}$, in quo ſufficit ne b diameter ſit minor chorda $\frac{a}{2}$: hinc $(fg)^{\frac{1}{2}}$ eſt tangens circuli radii $\frac{a}{2}$, quæ a zero uſque ad infi-

infinitum procedit: at in circulo variabili diametri duplæ b rectangulum maximum $\left(\text{poſita } CA \text{ conſtanti} = \frac{a}{2} \right)$ $C''A \cdot C'A$ æquale erit quadrato infinito $\overline{AC''}^2$, quod differt a maximo radii $\overline{CC''}^2$ quadrato conſtanti & dato $\frac{a^2}{4}$; quod quadratum in hyperbola eſt quadratum ordinatæ ipſius hyperbolæ ad axem.

§. 49. Obſervandum vero in (3.a) $\overline{\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}} - \frac{a^2}{4}}}^{\,2} - \frac{a^2}{4} = b^2 - \frac{a^2}{4}$, & $(fg)^{\frac{2}{2}} - \frac{a^2}{4} = b^2$, poſito $(fg)^{\frac{2}{2}} > \frac{a^2}{4}$. At ut rectangulum inveniatur æquale quadrato, membra æquationis debent, ut vidimus, eſſe identica; ergo $(fg)^{\frac{2}{2}} - \frac{a^2}{4} = \overline{(fg)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}} \cdot \overline{(fg)^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2}}$: ſed $(fg)^{\frac{2}{2}} = b^2 + \frac{a^2}{4}$; ergo $(fg)^{\frac{2}{2}} - \frac{a^2}{4} = b^2 = \overline{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}} \cdot \overline{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}} = MN$: in quo caſu $\sqrt{(fg)^{\frac{2}{2}} - \frac{a^2}{4}}$, ſive b^2 repræſentat tangentem circuli radii dati $\frac{a}{2}$, vel chordam circuli diametri variabilis $(fg)^{\frac{2}{2}}$: atque ideo quoties more communi fit tranſpoſitio termini dati $\frac{a}{2}$ in æquatione ex. gr. $MN = \overline{b + \frac{a}{2}} \cdot \overline{b - \frac{a}{2}}$, ut fit $\overline{(MN)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}} \cdot \overline{(MN)^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2}} = bb$; æquatio quadratica, quæ erat in primo caſu $(MN)^{\frac{2}{2}} = b^2 - \frac{a^2}{4}$ fit $(MN)^{\frac{2}{2}} - \frac{a^2}{4} = b^2$, & $(MN)^{\frac{1}{2}}$, quæ erat in primo caſu $= \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$ fit $(MN)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$, & $(MN)^{\frac{1}{2}}$, quæ erat chorda in primo caſu fit diameter in ſecundo in circulo variabili, ſive quæ erat tangens in circulo dato fit ſecans, & quæ erat ſecans fit tangens. At in hyperbola (*fig.* 4.) b tangens circuli tranſiens in ordinatam, facta hac permutatione tranſit in abſciſſam $= CD'$, & CD quæ erat in circulo variabili diameter, in circulo dato ſecans, fit ordinata $D'Q$: quo artificio a ramo hyperbolæ $H'BH$ ad alterum hyperbolæ ramum QNq eleganter fit tranſitus. Hæc leviter

viter hic perſtricta impoſterum meminiſſe multum juvabit. Quod ſi $(fg)^{\frac{2}{2}}$ ſit minor $\frac{a^2}{4}$, tunc $(fg)^{\frac{2}{2}} - \frac{a^2}{4} = -b^2$ (eſt enim negativa), & $\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}} = b^2$, quæ eſt æquatio quadratica diametri datæ $\frac{a}{2}$ pertinens ad Syſtema quadraticum baſis datæ: ergo $\frac{a^2}{4} - (fg)^{\frac{2}{2}} = \overline{\frac{a}{2} + (fg)}^{\frac{1}{2}} . \overline{\frac{a}{2} - (fg)}^{\frac{1}{2}}$

$$= \overline{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}} . \overline{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}} = b^2$$: quo facto transferimur a Syſtemate imaginario baſis variabilis ad Syſtema reale baſis datæ, quod differt a (1.ª) chordæ tantum permutatione. Quamobrem luce clarius patet (ut idem perpetuo urgeam) imaginarium non eſſe niſi relativum, atque ſub ſe notionem realis neceſſario comprehendere: patet etiam quamcumque formulam ſuperiorem conſiderari poſſe ut realem & imaginariam, pro diverſa ratione, qua ſe ſe reſpiciunt quantitates notæ, atque variabiles ſub ſigno radicali: atque tandem revera imaginarium eſſe omnino nullum, dummodo illud Syſtema eligatur, quod revera congruit cum hypotheſi, quam arbitrio ſtatuimus. En igitur (niſi vehementer erro) ab Analyſi penitus avulſum, atque proſcriptum monſtrum illud, quod tamen, ejus natura probe explorata, ad Analyſeos ipſius perfectionem atque amplitudinem in *Parte* II. oſtendam mirifice inſervire poſſe.

§. 50. Formulas ad utrumque Syſtema pertinentes §. 46. deduximus ab æquatione quarti gradus $M^2 N^2 = \overline{\frac{a}{2} + (-b)}^{2} . \overline{\frac{a}{2} - b}^{2}$, vel

$$= \overline{b + \left(-\frac{a}{2}\right)}^{2} . \overline{b - \frac{a}{2}}^{2}$$, ut intelligatur formulam generalem, quæ utrumque Syſtema atque æquationes utrique proprias complectitur, eſſe revera quarti gradus, a qua pendet valor & poſitio cujuſcumque linearis quantitatis, quæ æquatio proinde in calculo prius ſupponenda eſt. Finis enim unus Analyſeos eſt ex æquationibus compoſitis quantitates ſimplices, quas radices appellant, inveſtigare, non ex radicibus æquationes: inverſa tamen methodus, qua ex radicibus compoſitæ æquationes conflantur, tractanda primum erat, ut proprietates æquationum compoſitarum, quas primum ſolutio Problematum exhibet, cognoſcerentur, & opportune ad uſum traducerentur. Hinc quantitas ſimplex ſive radix illius naturæ, valoris, atque poſitionis cenſenda eſt, quam requirit formula compoſita, a qua ſemper in Analyſi quantitas ſimplex deducitur. Verum huic Capiti tandem finem imponet invictiſſima, ac ſimplex demonſtratio, cujus ope ab una tantum formula ſecundi gradus æquationes omnes atque permutationes, nec non radices homologas ad utrumque Syſtema pertinentes derivare licet, quas ſuperius a peculiaribus artificiis in utroque Syſtemate eruendas curavimus. Ut id perficiam

ciam ſumo primum æquationem linearem integram Syſtematis baſis datæ $M + o N = a$, quæ diviſa in duas partiales ex dictis eſt $M + N = \frac{a}{2} + n + \frac{a}{2} - n$, in qua n nequit eſſe major $\frac{a}{2}$; ſumma vero earum $M + N = 2\frac{a}{2}$ data, & $\frac{M+N}{2} = \frac{a}{2}$; ac differentia variabilis $M - N$, vel $N - M$ (prout M, vel $N = \frac{a}{2} + n$) eſt $2n$, atque $\frac{M-N}{2} = n$: ergo $MN = \frac{a^2}{4} - n^2$; & $MN = \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - \left(\frac{M-N}{2}\right)^2$. Sumpta deinde æquatione lineari Syſtematis baſis variabilis $M + N = n + \frac{a}{2} + n - \frac{a}{2}$, in qua n nequit eſſe minor $\frac{a}{2}$, erit $\frac{M+N}{2} = n$ variabilis, & ſemidifferentia data $\frac{M-N}{2} = \frac{a}{2}$; atque productum variabilium $MN = n^2 - \frac{a^2}{4}$, ſive $MN = \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - \left(\frac{M-N}{2}\right)^2$, quæ eſt eadem ac ſuperior, quam deduximus a Syſtemate baſis datæ: æquatio itaque generalis utrique Syſtemati inſerviens erit (1.ª) $MN = \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - \left(\frac{M-N}{2}\right)^2$. Videndum nunc quomodo æquatio hæc, quæ donec ita effertur ad utrumque Syſtema pertinere poteſt, ad alterutrum determinanda ſit.

§. 51. Ac primum æquatio hæc, ſi actu quadrata perficiantur, dabit $MN = \frac{M^2 + 2MN + N^2}{4} - \frac{(M^2 - 2MN + N^2)}{4}$, hoc eſt (2.ª) $MN = MN$, quæ eſt in utroque Syſtemate identica, & quantitates M & N incognitæ; in utroque enim Syſtemate cum non detur niſi ſumma aut differentia, ſingulæ M, N ſeorſim ſumptæ ſunt variabiles. Itaque ſi ponatur $M = f$, & $N = g$, erit (3.ª) $fg = MN$, quæ eſt ad hyperbolam inter aſymptotos; ac poſita in Syſtemate baſis datæ $f + g = a$, & facta $f = g = \frac{a}{2}$, erit $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ rectangulum maximum in Syſtemate baſis datæ, & minimum in Syſtemate baſis variabilis (ut vidimus): hyperbola vero eſt æquilatera, eſtque illa, quam deſcripſimus (*fig.* 1.ª) §. 20. hujus Capitis, a qua deduximus §§. ſequentibus & §. 43. æquationes utriuſque Syſtematis: atque ideo a communi hac origine utriuſ-

utriuſque Syſtematis æquationes licuit nobis ſuperius elicere. Quod ſi æquatio noſtra generalis (1.ª) ita diſponatur, ut ſit (4.ª)

$$MN = \overline{\left(\frac{M+N}{2}\right)+\left(\frac{M-N}{2}\right)}\cdot\overline{\left(\frac{M+N}{2}\right)-\left(\frac{M-N}{2}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{N+M}{2}\right)-\left(\frac{N-M}{2}\right)}\cdot\overline{\left(\frac{N+M}{2}\right)+\left(\frac{N-M}{2}\right)},$$ prout

$M > N$, vel $N > M$, dabit in Syſtemate baſis datæ (5.ªᵐ) $MN = \overline{\frac{a}{2}+n}\cdot\overline{\frac{a}{2}-n}$,

& in Syſtemate baſis variabilis (*6.*ªᵐ) $MN = \overline{n+\frac{a}{2}}\cdot\overline{n-\frac{a}{2}}$: in (5.ª) n

nequit eſſe major $\frac{a}{2}$, in (*6.*ª) nequit eſſe minor eadem: quia in (5.ª) $M-N$ differentia ſemper minor ſumma $M+N$, quam ad ſummum æquare poteſt; in (*6.*ª) ſemper major, quia ſumma $M+N$ ſemper major differentia $M-N$, nec niſi in limite minimo æqualis. Quare rectangulum MN in utroque Syſtemate variabile, in Syſtemate tamen baſis datæ intra limites $\overline{\frac{a}{2}+\frac{a'}{2}}\cdot o$, & $\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}$

continetur; in Syſtemate vero baſis variabilis intra limites $\overline{\frac{a'}{2}+\frac{a}{2}}\cdot o$, &

$\overline{\infty+\frac{a}{2}}\cdot\overline{\infty-\frac{a}{2}}$. Rurſus cum ſit $\frac{M+N}{2}-\left(\frac{M-N}{2}\right)=N$, erit

$\frac{M-N}{2}=\left(\frac{M+N}{2}\right)-N$; quo valore ſubſtituto in (4.ª) orietur æquatio

(7.ª) $MN = \overline{\left(\frac{M+N}{2}\right)+\left(\frac{M+N}{2}\right)-N}\cdot N$: vel quoniam

$\frac{M+N}{2}+\left(\frac{M-N}{2}\right)=M$, erit $-\left(\frac{M-N}{2}\right)=\left(\frac{M+N}{2}\right)-M$,

& fiet æquatio (8.ª) $MN = M\cdot\overline{\left(\frac{M+N}{2}\right)+\left(\frac{M+N}{2}\right)-M}$, &

ex (7.ª) N minor M, ex (8.ª) vero M minor N, ut præcipue demonſtravimus §. 23. Æquationes vero hæ duæ poſtremæ in Syſtemate baſis datæ erunt

(9.ª)

$(9.^a)\ MN = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - N}\,.\,N$, $(10.^a)\ MN = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - M}\,.\,M$, ſive æquationes homologæ in hoc Syſtemate ſupra inventæ, in quibus cum ſit in $(9.^a)$ factor minor variabilis primi membri N æqualis N ſecundi membri, M debet eſſe factor major $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - N$: atque ideo ſi in primo membro factores ponantur arbitrio dati, baſis $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ nequit eſſe conſtans niſi intra limites $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ maximum & o minimum, progrediente N a zero minimo uſque ad $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ maximum (ut diximus §. 20.): at ſi baſis ponatur conſtans, cum N in $(7.^a)$ nequeat ſuperare M, & in $(8.^a)$ M valorem N, rectangulo M N non alii valores tribui poſſunt, quam qui continentur intra limites $\overline{\left(\frac{M+N}{2}\right) + \left(\frac{M+N}{2}\right) - o}\,.\,o$, & $\left(\frac{M+N}{2}\right).\left(\frac{M+N}{2}\right)$; ſive in hoc Syſtemate intra limites $\overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}\,.\,o$, & $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$. Æquationes hæ ſunt illæ, quas demonſtravimus §§. 21, 52 pertinere ad triangulum baſis datæ, & a quibus eruuntur factores rationales rectanguli M N.

§. 52. Ex ipſa vero æquatione $\left\{\frac{M+N}{2}\right\} - \left\{\frac{M-N}{2}\right\} = N$ colligitur $\left\{\frac{M+N}{2}\right\} = \left\{\frac{M-N}{2}\right\} + N$; quo valore ſubſtituto in $(4.^a)$ oritur $(11.^a)\ MN = \overline{\left\{\frac{M-N}{2}\right\} + \left\{\frac{M-N}{2}\right\} + N}\,.\,N$. Et quoniam $\left\{\frac{M+N}{2}\right\} + \left\{\frac{M-N}{2}\right\} = M$, erit $\left\{\frac{M+N}{2}\right\} = -\left\{\frac{M-N}{2}\right\} + M$; & facta iterum in $(4.^a)$ hujuſce valoris ſubſtitutione ſe ſe offert $(12.^a)\ MN = M\,.\,\overline{-\left\{\frac{M-N}{2}\right\} - \left\{\frac{M-N}{2}\right\} + M}$: atque ideo in Syſtemate baſis variabilis $(11.^a)$ & $(12.^a)$ in ſequentes convertuntur $(13.^{am})\ MN = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + N}\,.\,N$, $(14.^{am})\ NM = \overline{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + M}\,.\,M$, quæ ſunt æquationes ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis variabilis a nobis *Cap.* II. inventæ. Obſervandum tamen, quod, cum ex dictis factor minor primi mem-

membri ſemper ſit æqualis factori ſolitario ſecundi membri, fieri debet in (12.ª) M minor N, & æquatio erit (15.ª)

$MN = \overline{\left\{\frac{N-M}{2}\right\} + \left\{\frac{N-M}{2}\right\} + M.M}$; atque ideo æquationes homologæ Syſtematis baſis variabilis erunt (13.ª) $MN = \overline{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + N.N}$, (16.ª) $NM = \overline{\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\} + M.M}$, in quo caſu $+ \left\{-\frac{a}{2}\right\}$ ſumenda eſt poſitiva: (11.ª) enim, quæ eſt (13.ª), dat æquationem linearem $M - N = a$, in qua $M > N$; & huic homologa (12.ª), quæ eſt (15.ª), vel (16.ª) oritur ab æquatione lineari $N - M = a$, in qua N major M. Quare in iſtis homologis fit variabilium permutatio, qua permutatione ab una ad alteram plagam, ab uno ad alterum triangulum rectilineum, ab uno ad alterum Hyperbolæ ramum tranſitus fit, ut vidimus præcipue *Cap.* VI. *Libri* I., *Cap.* II. hujus *Libri*, ac ſuperius §. 48. Quod ſi in (12.ª) ſumatur M major N, ſive in (14.ª) $-\frac{a}{2}$ vere negativa; tunc quæ ſpecie tenus ad Syſtema baſis variabilis pertinere videbatur revera pertinet ad Syſtema baſis datæ: in Syſtemate enim baſis variabilis eſſet $MN = \overline{-.\left\{\frac{M-N}{2}\right\} + \left\{\frac{M-N}{2}\right\} - M.M}$ $= \overline{-.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} - M.M$, quod eſt rectangulum negativum in hoc Syſtemate, quod *Cap.* III. oſtendimus revera pertinere ad Syſtema baſis datæ, in quo fit poſitivum. Hinc in eodem Capite methodum tradidimus, qua a negativo ad poſitivum, ſive a Syſtemate improprio ad proprium jure liceat noſmet transferre, ut abſurditas æquationis $1 = -1$ vitetur. Illud etiam notandum, quod ſi (7.ª) & (8.ª), quæ ſunt revera Syſtematis baſis datæ, quia $M + N = a$, referantur ad Syſtema baſis variabilis, in quo $M + N = 2n$; convertentur in ſequentes (17.ªᵐ) $MN = \overline{n + n - M.M}$, (18.ªᵐ) $MN = \overline{n + n - N.N}$, in quarum prima M non poteſt eſſe major n, & in ſecunda N non poteſt eſſe major n, & conſequenter in prima n debet eſſe ſemper major M, in ſecunda n major N. Quare ſi fiat M & N conſtans quæcumque $= \frac{a}{2}$, æquationes erunt legitimæ, dummodo n ſumatur ſemper major $\frac{a}{2}$, nec niſi in limite minimo eidem æqualis; & æquationes (19.ª) $MN = \overline{n + n - \frac{a}{2}.\frac{a}{2}}$, (20.ª)

NM

$NM = \overline{n + n - \frac{a}{2}}.\frac{a}{2}$, erunt ad triangulum baſis variabilis $n + n$, & rectangulum æquale producto baſis variabilis in altitudinem datam $\frac{a}{2}$: quo docemur Syſtema variabile ea methodo tractari, quæ eſt propria Syſtematis baſis datæ, quemadmodum oſtendit §. 43. *figuræ* 1.ª triangulum B′MC, in quo CB′ baſis variabilis eſt, & CB = BL conſtans $= \frac{a}{2}$; cujus ope ad circulum diametri variabilis (*fig.* 3.ª) CMC′, atque inde facta revolutione ad hyperbolam æquilateram continuam deſcendimus: hujuſce methodi principia tradit *Caput* III., ac præcipue §. *33*. Simili modo ope (*6.*ª) §. ſuperioris relatæ ad circulum diametri $2n$ variabilis, & abſciſſæ ad centrum $= \frac{a}{2}$ conſtantis, ad hyperbolam æquilateram §. 45. tranſitum fecimus.

§. 53. Nam iterum ſumpta (4.ª), ſed a rectangulari ad quadraticam tranſlata dabit (21.am) $(MN)^{\frac{2}{2}} = \left\{\frac{M+N}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{M-N}{2}\right\}^2$, in qua MN, retento valore, naturam quadrati aſſumit: hæc autem ad utrumque Syſtema relata dabit (22.am) $(MN)^{\frac{2}{2}} = M^2 = \frac{a^2}{4} - n^2$, & (23.am) $(MN)^{\frac{2}{2}} = M^2 = n^2 - \frac{a^2}{4}$, a qua proinde eruitur utraque æquatio quadratica ad utrumque Syſtema pertinens: in prima m, & n ſunt chordæ variabiles circuli diametri datæ $\frac{a}{2}$, in quo creſcente una altera decreſcit; hac tamen lege, ut quadrata chordarum homologarum ſemper ſint conſtantia, & æqualia quadrato $\frac{a^2}{4}$ diametri: in ſecunda n eſt diameter circuli variabilis, $\frac{a}{2}$ chorda conſtans, & n altera chorda datæ homologa, ſed variabilis; ita tamen ut differentia quadratorum diametri & chordæ variabilis ſemper ſit conſtans & æqualis $\frac{a^2}{4}$, ut ſuperius invenimus. Verum, cum ſit in eadem (21.ª) tam $\left(\frac{M-N}{2}\right)^2 = \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}$, quam $\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 = \left(\frac{M-N}{2}\right)^2 + (MN)^{\frac{2}{2}}$, exſurgent æquationes

(24.ª) $(MN)^{\frac{2}{2}} = \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}\right)$;

 (25.ª)

$$(25.^a)\ (MN)^{\frac{2}{2}} = \left(\left(\frac{M-N}{2} \right)^2 + (MN)^{\frac{2}{2}} \right) - \left(\frac{M-N}{2} \right)^2 ,$$

quæ ſunt identicæ, ſed relatæ ad ſuum ſingulæ Syſtema dant $(26.^{am})\ (MN)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}} \right)$ S. A. $(27.^{am})\ (MN)^{\frac{2}{2}} = \left(\frac{a^2}{4} + (MN)^{\frac{2}{2}} \right) - \frac{a^2}{4}$ S. Y.; quæ licet identicæ videantur, tamen in hoc differunt, quod valores quadrati $(MN)^{\frac{2}{2}}$ in $(26.^a)$ ſunt intra limites $(o)^2$ minimum, & $\frac{a^2}{4}$ maximum, cum æquatio quadratica Syſtematis baſis datæ ſit $\frac{a^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}} = n^2$: in $(27.^a)$ vero quadratum $(MN)^{\frac{2}{2}}$ intra limites minimum $(o)^2$ uſque ad $(\infty)^2$ exſpatiatur, cum æquatio quadratica hujus ſit $(MN)^{\frac{2}{2}} + \frac{a^2}{4} = n^2$.

Et ſane $(24.^a)\ (MN)^{\frac{2}{2}} = M^2 = \left\{ \frac{M+N}{2} \right\}^2 - \left(\left\{ \frac{M+N}{2} \right\}^2 - (MN) \right)$

$$= \left\{ \frac{M+N}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{M-N}{2} \right\}^2 = \frac{a^2}{4} - n^2 \text{ S. A.}$$

$$(25.^a)\ (MN)^{\frac{2}{2}} = M^2 = \left(\left\{ \frac{M-N}{2} \right\}^2 + (MN)^{\frac{2}{2}} \right) - \left\{ \frac{M-N}{2} \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{M+N}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{M-N}{2} \right\}^2 = n^2 - \frac{a^2}{4} \text{ S. Y.,}$$ poſito in ſecundo membro MN rectangulo.

§. 54. Quoniam vero æquationes $(24.^a)$ & $(25.^a)$ quadraticæ in rectangulares tranſmutari poſſunt ſequenti modo

$$(29.^a)\ (MN)^{\frac{2}{2}} = MN = \left\{ \frac{M+N}{2} \right\} + \sqrt{\left\{ \frac{M+N}{2} \right\}^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}} \times$$
$$\left\{ \frac{M+N}{2} \right\} - \sqrt{\left\{ \frac{M+N}{2} \right\}^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}$$

$$(30.^a)\ (MN)^{\frac{2}{2}} = MN = \sqrt{\left\{ \frac{M-N}{2} \right\}^2 + (MN)^{\frac{2}{2}}} + \left\{ \frac{M-N}{2} \right\} \times$$
$$\sqrt{\left\{ \frac{M-N}{2} \right\}^2 + (MN)^{\frac{2}{2}}} - \left\{ \frac{M-N}{2} \right\}$$

vel

vel (31.ª) $(MN)^{\frac{2}{2}} = MN = \sqrt{\left\{\frac{N-M}{2}\right\}^2 + (MN)^{\frac{2}{2}}} - \left\{\frac{N-M}{2}\right\} \times$

$\sqrt{\left\{\frac{N-M}{2}\right\}^2 + (MN)^{\frac{2}{2}}} + \left\{\frac{N-M}{2}\right\}$ ſi eſt $N > M$;

ſi ad proprium Syſtema referantur ad ſequentes determinabuntur

(32.ᵃᵐ) $(MN)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4} - \left\{\frac{a^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}\right\} = M^2 = (MN)^{\frac{2}{2}}$

$= \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}} \cdot \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}} = MN$ S. A.

(33.ᵃᵐ) $(MN)^{\frac{2}{2}} = \left\{\frac{a^2}{4} + (MN)^{\frac{2}{2}}\right\} - \frac{a^2}{4} = M^2 = (MN)^{\frac{2}{2}}$

$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + (MN)^{\frac{2}{2}}} \pm \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + (MN)^{\frac{2}{2}}} \mp \frac{a}{2} = MN$ S. Y.

Animadvertas velim eſſe inſuper $\left\{\frac{M+N}{2}\right\}^2 - (MN)^{\frac{2}{2}} = \left\{\frac{M-N}{2}\right\}^2$, & $\left\{\frac{M-N}{2}\right\}^2 + MN = \left\{\frac{M+N}{2}\right\}^2$: itaque ſi in (29.ª) pro $\left\{\frac{M+N}{2}\right\}^2$, & in (30.ª) pro $\left\{\frac{M-N}{2}\right\}^2$ ſubſtituas hoſce valores, invenies æquationes

(29.ᵃᵐ) $(MN)^{\frac{2}{2}} = \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}\right) = M^2$

$= \left(\frac{M+N}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}} \cdot \left(\frac{M+N}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}} = MN$

(34.ª) $(MN)^{\frac{2}{2}} = \left(\left(\frac{M-N}{2}\right)^2 + (MN)^{\frac{2}{2}}\right) - \left(\frac{M-N}{2}\right)^2 = M^2$

$= \sqrt{\left(\frac{M-N}{2}\right)^2 + (MN)^{\frac{2}{2}}} + \left(\frac{M-N}{2}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{M-N}{2}\right)^2 + (MN)^{\frac{2}{2}}} - \left(\frac{M-N}{2}\right)$: & æquationem

(30.ᵃᵐ) $(MN)^{\frac{2}{2}} = \left(\left(\frac{M-N}{2}\right)^2 + (MN)^{\frac{2}{2}}\right) - \left(\frac{M-N}{2}\right)^2 = M^2$

=

$$=\sqrt{\left(\frac{M-N}{2}\right)^2+(MN)^{\frac{2}{2}}}+\left(\frac{M-N}{2}\right).\sqrt{\left(\frac{M-N}{2}\right)^2+(MN)^{\frac{2}{2}}}-\left(\frac{M-N}{2}\right)=MN$$

$$(35.^a)\ (MN)^{\frac{2}{2}}=\left(\frac{M+N}{2}\right)^2-\left(\left(\frac{M+N}{2}\right)^2-(MN)^{\frac{2}{2}}\right)=M^2$$

$$=\left(\frac{M+N}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{M+N}{2}\right)^2-(MN)^{\frac{2}{2}}}.\left(\frac{M+N}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{M+N}{2}\right)^2-(MN)^{\frac{2}{2}}};$$

in quibus ſi ſubſtituantur valores dati ex utroque Syſtemate habentur

$$(29.^a)=(32.^a)\ (MN)^{\frac{2}{2}}=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a^2}{4}-MN)^{\frac{2}{2}}\right)=M^2$$

$$=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-(MN)^{\frac{2}{2}}}.\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-(MN)^{\frac{2}{2}}}=MN\ \text{S. A.}$$

$$=(36.^a)\ (MN)^{\frac{2}{2}}=\left(\frac{a^2}{4}+(MN)^{\frac{2}{2}}\right)-\frac{a^2}{4}=M^2$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{4}+(MN)^{\frac{2}{2}}}+\frac{a}{2}.\sqrt{\frac{a^2}{4}+(MN)^{\frac{2}{2}}}-\frac{a}{2}=MN\ \text{S. Y}:\ \&$$

$$(36.^a)=(33.^a)\ (MN)^{\frac{2}{2}}=\left(\frac{a^2}{4}+(MN)^{\frac{2}{2}}\right)-\frac{a^2}{4}=M^2$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{4}+(MN)^{\frac{2}{2}}}+\frac{a}{2}.\sqrt{\frac{a^2}{4}+(MN)^{\frac{2}{2}}}-\frac{a}{2}=MN\ \text{S. Y}$$

$$=(37.^a)\ (MN)^{\frac{2}{2}}=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a^2}{4}-MN)^{\frac{2}{2}}\right)=M^2=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-(MN)^{\frac{2}{2}}}.\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-(MN)^{\frac{2}{2}}}$$

$$=MN\ \text{S. A.}$$

Quo artificio ab uno Syſtemate ad alterum, prout $(MN)^{\frac{2}{2}}$ minus vel majus $\frac{a^2}{4}$ aſſumas; ex utroque enim Syſtemate obtinetur rectangulum æquale quadrato, atque veritates omnes illæ ab una eademque formula hac methodo pleno alveo fluunt, quas ſuperius peculiaribus methodis & deduximus, & opportuna conſtructione oculis ipſis ſubjecimus.

§. 55. Nam quæ reſtat adhuc una ex proprietatibus, quas ſuperius eruimus, ut ſcilicet rectangulum formulæ ſuperioris convertatur in quadratum utriuſque variabilis, & vice verſa; hac eadem methodo ita facile invenitur. Sumpta una ex formulis ſuperioribus quadraticis, puta $(MN)^{\frac{2}{2}}$

=

$= \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}\right)$, in rectangularem convertatur hoc modo

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = \left(\frac{M+N}{2}\right).\left(\frac{M+N}{2}\right) - \left(\overline{\left(\frac{M+N}{2}\right)+n}\,.\,\overline{\left(\frac{M+N}{2}\right)-n}\right);$$

vidimus enim quadratum $(NN)^{\frac{2}{2}}$ fieri vel m^2, vel n^2.

Fiat nunc $\left(\frac{M+N}{2}\right) - n = m$, & erit

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = \left(\frac{M+N}{2}\right).\left(\frac{M+N}{2}\right) - \left(\overline{\left(\frac{M+N}{2}\right) + \left(\frac{M+N}{2}\right) - m}\,.\,m\right.$$

$= \left(\frac{M+N}{2}\right).\left(\frac{M+N}{2}\right) + \overline{\left(\frac{M+N}{2}\right) + \left(\frac{M+N}{2}\right) - m}\,.-m$; & iterum facto tranſitu ad quadratum

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = M^2 = \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{M+N}{2}\right)(-m) + (-m)^2$$

$$= \frac{a^2}{4} + 2.\frac{a}{2}(-m) + (-m)^2 \text{ S. A } (1.^a)$$

Verum cum hæc ipſa formula in hanc etiam §. antecedenti converſa fuerit

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = \left(\left(\frac{N-M}{2}\right)^2 + (MN)^{\frac{2}{2}}\right) - \left(\frac{N-M}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{N-M}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{N-M}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}\right) \; (2.^a)$$

$$= \left(\frac{N-M}{2}\right).\left(\frac{N-M}{2}\right) - \left(\overline{\left(\frac{N-M}{2}\right)+n}\,.\,\overline{\left(\frac{N-M}{2}\right)-n}\right)$$

$$= \left(\frac{N-M}{2}\right).\left(\frac{N-M}{2}\right) - \left(\overline{\left(\frac{N-M}{2}\right) + \left(\frac{N-M}{2}\right) - m}\,.\,m\right.$$

$$= \left(\frac{N-M}{2}\right).\left(\frac{N-M}{2}\right) + \overline{\left(\frac{N-M}{2}\right) + \left(\frac{N-M}{2}\right) - m}\,.(-m) \text{: \&}$$

$$M^2 = \left(\frac{N-M}{2}\right)^2 + 2.\left(\frac{N-M}{2}\right).(-m) + (-m)^2$$

=

$= \frac{a^2}{4} + 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot (-m) + (-m)^2$ S. Y. (3.ª), in quo tamen Syſtemate M^2 eſt minimum, quia relatum ad Syſtema baſis variabilis m non poteſt eſſe minor $\frac{a}{2}$; relatum vero ad Syſtema baſis datæ, cujus formam obtinet, m non poteſt eſſe major $\frac{a}{2}$: atque ideo hoc modo a Syſtemate baſis variabilis ad Syſtema baſis datæ, in quo m non poteſt eſſe major $\frac{a}{2}$, aditus patere poteſt. Verum ſi (1.ª) referatur ad Syſtema baſis variabilis, in quo $\frac{M+N}{2} = n$, & $M = 2n - N = a$, ſive $\frac{2n - N}{2} = \frac{M + N - N}{2} = \frac{M}{2} = m = \frac{a}{2}$, æquatio (1.ª) in hanc convertitur $M^2 = n \cdot n + n + n - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ S. Y; atque ex ipſa (1.ª) a Syſtemate baſis datæ ad Syſtema baſis variabilis tranſitus fit. Si vero (3.ª) ad Syſtema baſis datæ referatur, erit $M - N = 2n$, & $M = 2n + N = M + N = a$, & $\frac{2n + N}{2} = \frac{M - N + N}{2} = m = \frac{a}{2}$; quare $M^2 = n^2 + 2 \cdot n \cdot \left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}^2$ S. A; quo docemur hanc æquationem (3.ªᵐ), licet pertineat ad Syſtema baſis variabilis, tamen eſſe tractandam ut requirit methodus Syſtematis baſis datæ, ſive circulo radii tamen variabilis, ut ſuperius fecimus; in qua n nequít eſſe minor $\frac{a}{2}$. Hoc vero totum pendet a tranſpoſitione terminorum formulæ (2.ª), quæ hoc modo diſpoſita ad Syſtema baſis datæ relata fuit.

§. 56. Rem vero ita ſe habere ſic firmius demonſtro. Quoniam ex (29.ª) invenimus quadratum reſolvi in rectangulum, cujus factores ſunt

$$M = \left(\frac{M+N}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}},$$

$$N = \left(\frac{M+N}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}};$$

erit quadratum

M²

$$M^2 = \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{M+N}{2}\right)\left(-\sqrt{\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}\right) + \left(-\sqrt{\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}\right)^2;$$

ſed ex Syſtemate quadratico baſis datæ $\left\{\frac{M+N}{2}\right\}^2 - (MN)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}$ $= n^2$; ergo $M^2 = \frac{a^2}{4} + 2\,\frac{a}{2}.(-n) + (-n)^2$ S. A. Hæc tamen ipſa ſi referatur ad Syſtema quadraticum baſis variabilis, quod eſt $\left\{\frac{M+N}{2}\right\}^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}$ $= n^2 - (MN)^{\frac{2}{2}} = \frac{a^2}{4}$; erit $M^2 = n^2 + 2n.\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}^2$ S. Y. Porro

$$M^2 = \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{M+N}{2}\right).\left(-\sqrt{\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}\right) + \left(-\sqrt{\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{M+N}{2}\right).\left(-\sqrt{\left(\frac{M-N}{2}\right)^2}\right) + \left(-\sqrt{\left(\frac{M-N}{2}\right)^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 + 2.\left(\frac{M+N}{2}\right).\left(-\left(\frac{M-N}{2}\right)\right) + \left(-\left(\frac{M-N}{2}\right)\right)^2:$$ ergo

facto tranſitu ad rectangula

$$MN = \left(\frac{M+N}{2}\right).\left(\frac{M+N}{2}\right) + \overline{\left(\frac{M+N}{2}\right) + \left\{\frac{M+N}{2}\right\} - \left\{\frac{M-N}{2}\right\}}.-\left\{\frac{M-N}{2}\right\},$$

ſive

$$MN = \left(\frac{M+N}{2}\right).\left(\frac{M+N}{2}\right) - \overline{\left(\left(\frac{M+N}{2}\right) + \left(\frac{M+N}{2}\right) - \left(\frac{M-N}{2}\right)\right).\left(\frac{M-N}{2}\right)}.$$

Verum per §. 50. in Syſtemate baſis datæ $\frac{M+N}{2} = \frac{a}{2}$; & $\frac{M-N}{2} = n$; & in Syſtemate baſis variabilis $\frac{M+N}{2} = n$, $\frac{M-N}{2} = \frac{a}{2}$, ergo

$$MN = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - n\right\}.n \text{ S. A, \&}$$

$$MN = n.n - \left\{n + n - \frac{a}{2}\right\}.\frac{a}{2} \text{ S. Y};$$ quæ ſunt rectangulares §. ſuperioris, a quibus iterum ad quadrata tranſitu facto, erit

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = M^2 = \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}(-n) + (-n)^2 \text{ S. A.}$$

$$= n^2 + 2n\left\{-\frac{a}{2}\right\} + \left\{-\frac{a}{2}\right\}^2 \text{ S. Y.}$$

Hac igitur inverſa methodo æquationes §. ſuperioris in tuto collocantur, & ea omnia, quæ in toto hoc Opere peculiaribus artificiis invenimus, una hac nova methodo §§. 50, & ſeqq. maxime ſimplici, utpote ab una origine deducta ita, meo quidem judicio, firmavimus, ut nullus amplius de eorum veritate dubitationi locus relinquatur.

§. 57. Ab hac nova methodo ea, quæ leviter §§. 15, 16, 17, & 18 in meo tertio Opuſculo publici juris facto perſtrinxi, deprompta fuerunt, ex qua pro re nata in progreſſu Operis alia permulta non levioris momenti eruemus. Hic præter ea, quæ ſuperius ſtatuimus, illud iterum præſtat urgere, æquationes ſcilicet omnes, quas deduximus a formula (1.ª) §. 50.

$(MN)^{\frac{2}{2}} = \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - \left(\frac{M-N}{2}\right)^2$ eam naturam aſſumere, atque ad illud Syſtema pertinere, ad quod determinatur unius potius, quam alterius ex tribus terminis, ex quibus conflatur æquatio, tamquam dati ſuppoſitione. Si enim ponatur primum membrum MN datum, termini duo, qui in altero membro continentur, debent eſſe variabiles; & æquatio rectangularis primo ſumpta eſt ad hyperbolam inter aſymptotos *figuræ* noſtræ (1.^{mæ}), in qua factores variabiles ſemper eidem producto dato æquales ſunt: ſi vero determinetur conſtans $\left(\frac{M+N}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$, ceteri fiunt indeterminati; & æquatio pertinet ad Syſtema quadraticum baſis datæ $(MN)^{\frac{2}{2}} + \left(\frac{M-N}{2}\right)^2 = m^2 + n^2 = \frac{a^2}{4}$, a quo derivare poſſumus ceteras. Tandem ſi ſumatur $\left(\frac{M-N}{2}\right)^2$ datum $= \frac{a^2}{4}$, $(MN)^{\frac{2}{2}}$, & $\left(\frac{M+N}{2}\right)^2$ fiunt indeterminata, ex quibus Syſtema quadraticum baſis variabilis conſtituitur, a quo cetera, quæ ad hoc Syſtema pertinent, ſuperius deduximus. Hinc, poſito uno aut altero ſecundi membri conſtanti termino, MN in primo membro (quod in uno caſu ſumptum tamquam datum, *homogeneum comparationis* audit) cum pendeat in formulis ſuperioribus a valore $(MN)^{\frac{2}{2}}$ poſiti ſub ſigno radicali; hoc mutato, illud nequit amplius conſtans eſſe, ut male hactenus communi omnium conſenſu in Analyſi factum fuit. Error hic ſane graviſſimus nos

nos in devia duxit, atque in imaginarium impegit, a quo ignoratione duplicis a me inventi Syſtematis irrito ſemper ſucceſſu univerſim nos liberare hucuſque conati ſumus. Tamen qui hæc ſerio perpenderit, atque Auctores his imbutus principiis evolverit, modo ſincere agat, fateatur oportet ipſos ideo in peculiaribus circumſtantiis quaſdam identidem formulas ab imaginario expedire potuiſſe, quia in aliquam ex hujuſmodi transformationibus a me indicatis forte inciderant, ad quam cum non ratione & conſilio, ſed coeco calculi ductu delati totum univerſale Syſtema a me propoſitum aſſequi non potuerint (ex quo uno & naturam imaginarii cognoſcere, & remedium mutuari licet), in deſperationem adducti id univerſim conſequi nullo modo poſſe ita fidenter pronuntiarunt, ut ne audiendos quidem aliter ſuſpicantes aut ſentientes unanimi conſenſu tandem ſtatuerint. Illud denique monendum, eam, quam toto hoc Libro concinnavimus, abſolutam æquationum ſecundæ dimenſionis analyticam ſolutionem realem, nec non geometricam conſtructionem hoc uno principio niti, quo baſis linearis *a* in uno tantum puncto medio dato diviſa ſupponitur, qua diviſione æquatio linearis integra in duas partiales æquationes, ac in duo Syſtemata, ut docuimus *Libro* I. diſpertitur, ex quorum producto æquationes ſecundæ dimenſionis *Libro* hoc II. ad utrumque Syſtema pertinentes deduximus. Majora tamen & nova & ſublimiora adhuc manent, quæ in *Parte* II. enucleanda reſervamus, ſi quæ nunc typis mandamus præſtantiorum, & æquiorum Mathematicorum judicio comprobentur: in qua etiam ab ipſa hyperbola rectanguli conſtantis inæqualium factorum ad ellipſim, & inde ad hyperbolam huic reſpondentem aditum aperiemus; & quæ hîc ſolo circulo ex hyperbola æquilatera obtinemus, quomodo perfici poſſint ope aliarum Curvarum ſecundi gradus illic demonſtrabimus.

§. 58. Hîc igitur nihil reliqui tandem eſt, niſi ut horum, quæ in toto hoc Opere invenimus, ſubſidio ad æquationes numericas ſolvendas accedamus. Ac primum cum demonſtraverimus *Cap.* I. *Libri* hujus æquationem ſecundæ dimenſionis quamcumque oriri a producto duarum variabilium unius & ejuſdem æquationis linearis Syſtematis baſis datæ, vel variabilis; poſita data baſi, productum variabile ſit neceſſe eſt intra certos limites a baſi conſtanti ſtatutos hac lege, ut ſumma, vel differentia factorum variabile productum conſtituentium ſit ſemper datæ baſi æqualis. Hinc ſi præter productum duarum variabilium determinentur etiam ejus factores, cum idem productum oriri poſſit a duobus factoribus diverſis, quorum ſumma, vel differentia ſit diverſa; tunc baſis erit variabilis, pendetque a ſumma, vel differentia diverſa factorum, qui licet diverſi, idem productum tamen conſtituunt. Hoc poſito, ſumo æquationem (7.^{am}) §. 51. deductam a 1.^{a} §. 50, quæ eſt $MN = \overline{\left(\frac{M+N}{2}\right) + \left(\frac{M+N}{2}\right)} - n.n$ æquatio ſecundi gradus, in qua ſi ponatur productum (MN) datum, & ſumma M + N, æquatio dicitur *affecta* ſecundi gradus, ex qua eruendi ſunt valores *n*, quæ in hoc caſu eſt incognita & variabilis. Ut igitur more communi determinetur æquatio, non ſatis eſt, ut productum ſit datum, ſed etiam oportet ut data ſit baſis, ſive ſumma factorum productum conſtituentium in hac æquatione ad

ad Syſtema baſis datæ relata. Ponamus hujuſmodi productum eſſe 12, ut æquationis termini omnes ſint liberi, ut fit, a radicalibus & fractionibus. Verum cum idem productum 12 oriatur & a producto factorum rationalium 3, 4; & 2, *6*; & 1, 12; erit in primo caſu ſumma factorum $M + N = 3 + 4$ (1.ª), in ſecundo $M + N = 2 + 6$ (2.ª), ac denique in tertio $M + N = 1 + 12$ (3.ª), tres æquationes lineares Syſtematis baſis datæ, quæ ſingulæ ſunt omnino quantitate diverſæ, licet productum factorum eidem producto 12 æquale ſit: a quibus ſingulis tres æquationes diverſæ ſecundæ dimenſionis oriuntur, ſcilicet (4.ª) $MN = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2}} - n.n$, (5.ª) $MN = \overline{\frac{8}{2} + \frac{8}{2}} - n.n$ (*6*.ª) $MN = \overline{\frac{13}{2} + \frac{13}{2}} - n.n$; quibus ſingulis idem productum 12 loco MN ſubſtitui poteſt, non tamen promiſcue quodcumque par factorum rationalium ſupra inventum ſingulis æquationibus applicari poteſt: cum determinata baſi, non alii factores rationales ſumi poſſint, quam qui a baſi ipſa præſcribuntur. Et ſane ab æquationibus linearibus ſuperius poſitis eruuntur factores rationales homologi integri, qui bini & bini ſumpti ſequentes dabunt combinationes

(I.am) $7 = 0 + 7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$

(II.am) $8 = 0 + 8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$

(III.am) $13 = 0 + 13 = 1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7$,

in quibus non eſt commune niſi productum 12; ſed in (1.ª) ortum a producto factorum 3, 4, qui factores non inveniuntur in reliquis; quemadmodum factores 2, *6* in (II.ª), & 1, 12 in (III.ª), ita ſunt proprii ſuis ſingulis æquationibus linearibus, ut nulli alteri conveniant. Itaque licet productum 12 æquale ſit ſingulis illis tribus æquationibus ſuperioribus; tamen ſi velis ex. gr. in (4.ª) $MN = 12 = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2}} - n.n$ productum 12 oriri a factoribus 2, *6*, vel ab 1, 12; invenies $2 . 6 = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2}} - n.n$; & cum n minor ex dictis æqualis eſſe debeat 2, erit $6 = 7 - 2 = 5$; vel ſi ponas $1 . 12 = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2}} - n.n$, erit $n = 1$, & $12 = 7 - 1 = 6$ quorum utrumque eſt abſurdum.

§. 59. Quare determinata baſi in allato exemplo, non niſi par unum factorum rationalium, ex quorum producto oritur 12, cuicumque æquationi applicari poteſt tamquam illi proprium ac ſuum. Verum cum 12 poſſit eſſe productum ex hac triplici diverſa factorum homologorum combinatione, patet huic producto 12 ſingulas ex iſtis tribus æquationibus commemoratis convenire poſſe. Suma-

mamus itaque (4.^{am}) $3 \cdot 4 = 12 = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2} - n.n}$, in qua quiſque videt poſito $n = 3$ eſſe revera $4 = 7 - 3 = 4$. Verum cum ex dictis notum ſit valorem ipſius n a zero uſque ad $\frac{7}{2}$ progredi poſſe, quiſque videt valorem producti 12 eſſe unum ex illis, qui continentur intra limites $\overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2}}.0$, in quo caſu una ex variabilibus homologis eſt maxima, altera minima; & $\frac{7}{2}.\frac{7}{2}$ maximum, quando $m = n = \frac{7}{2}$: ergo æquatio univerſim erit $mn = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2} - n.n}$, cujus locus eſt triangulum (*Tab.* VII. *fig.* 2.) C M B′, baſis C B′ $=$ C C′ $+$ C′B′ $= \frac{7}{2} + \frac{7}{2}$. Verum cum intra limites 0, & $\frac{7}{2}$ concludantur numeri integri 1, 2, 3; ex æquatione $mn = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2} - n.n}$, poſitis loco n numeris 0, 1, 2, 3, eruuntur ceteri valores rationales integri, nimirum $m = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} - 0$, $m = 7$, $n = 0$, $m = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} - 1 = 6$, $n = 1$, $m = 6$; $m = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} - 2 = 5$, $n = 2$, $m = 5$; $m = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} - 3$, $m = 4$, $n = 3$; ac producta erunt 0.7, 1.6, 2.5, 3.4, quæ exhibent factores rationales homologos integros combinationis (I.^{a}) §. antecedentis. Quod ſi ponamus $n = 4$, tunc cum 4 ſuperet valorem $\frac{7}{2}$, hic valor non poteſt amplius convenire huic æquationi, in qua n non poteſt ſuperare $\frac{7}{2}$; poteſt tamen convenire æquationi huic homologæ, quam ſcimus eſſe $nm = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2} - m.m}$, in qua ſemper m eſt minor n; & facta $n = 4$, erit $4 = 7 - m$, & $m = 3$: ac in noſtra *figura* facta hac variabilium permutatione, ab æquatione $mn = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} - n.n = \overline{CC' + C'B' - B'D}.DE = CD.DE$ tranſitum facimus ad $nm = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2} - m.m} = \overline{B'C' + C'C - Cd}.de = B'd.de$. Præter vero hoſce valores integros rationales, ex quorum producto oritur mn æqua-

æquale ſemper numeris integris; cum intra o, & $\frac{7}{2}$ infiniti numeri fracti contineantur, *mn* repræſentare poterit numerum fractum, & quidem infinitis modis. Hoc igitur triangulum eſt locus omnium productorum, quæ conſtant ex factoribus in ſe ductis rationalibus, & integris, vel rationalibus & fractis; atque ideo jure a me *Capite* I. hujus *Libri* appellatum fuit locus, in quo limites rectilinei rectangulorum Syſtematis baſis datæ concluduntur.

§. 60. Vero cum æquatio (7.ª) §. 51. ſcilicet in allato exemplo $MN = 12 = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2} - n . n}$ reducatur ad (4.ªm) ejuſdem §., nempe

$$MN = \overline{\left\{\frac{M+N}{2}\right\} + \left\{\frac{M-N}{2}\right\}} . \overline{\left\{\frac{M+N}{2}\right\} - \left\{\frac{M-N}{2}\right\}}$$

cum ſit $\left(\frac{M+N}{2}\right) - N = \frac{M-N}{2}$, erit in noſtro caſu (4.ª) $MN = 12 = \overline{\frac{7}{2} + n} . \overline{\frac{7}{2} - n}$; & facto tranſitu ad quadrata $(MN)^{\frac{2}{2}} = (12)^{\frac{2}{2}} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - n^2$, quæ dat Syſtema quadraticum baſis datæ, & pertinet ad circulum *figuræ* (2.ª) CeC' diametri $CC' = \frac{7}{2}$, chordarum homologarum $Ce = (12)^{\frac{1}{2}}$, & $C'e = \overline{\left\{\frac{7}{2}\right\}^2 - n^2}^{\frac{1}{2}}$: quo artificio a triangulo CMB' ad circulum CeC' tranſitum fecimus æquationis $(MN)^{\frac{2}{2}} + n^2 = (12)^{\frac{2}{2}} + n^2 = \overline{Ce}^2 + \overline{C'e}^2 = \left\{\frac{7}{2}\right\}^2 = \overline{CC'}^2$: atque ideo quadratum $(MN)^{\frac{2}{2}}$ intra limites C^2 & $\overline{CC'}^2$ excurrit, progrediente inverſo modo quadrato chordæ $C'e$ a limite maximo $\overline{C'C}^2$ uſque ad $(C')^2$. Hîc ſtatim patet nos a variabilibus rationalibus homologis ad triangulum delatos eſſe ad irrationales etiam homologas æquationis quadraticæ ad circulum $(MN)^{\frac{2}{2}} = \left\{\frac{7}{2}\right\}^2 - n^2$; atque quadratum $(12)^{\frac{2}{2}}$ non eſſe niſi peculiarem determinationem arbitrio factam quadrati chordæ $(MN)^{\frac{1}{2}}$ natura ſua variabilis, quæ legitima eſt, donec illud quadratum aſſumit, quod continetur intra limites $C^2 = (o)^2$, & $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ diametri CC' ſemper conſtantis, ac datæ. In hoc circulo CeC', in quo chordæ homo-

logæ

logæ Ce, C'e plerumque ſunt irrationales, continentur etiam rationales illæ, quæ a combinatione (I.ª) factorum §. 58. indicantur. Nam in æquatione $(MN)^{\frac{2}{2}} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - n^2$ eſt $n^2 = \overline{C'e}^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}} = \overline{C'D}^2$; ergo C'D, quæ ſunt rationales in triangulo CMB', erunt, & in circulo. Itaque ſi loco $(MN)^{\frac{2}{2}}$ ponantur valores factorum (I.ª) combinationis ſcilicet MN $= 1.6, 2.5, 3.4$; erit $n = C'e = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 6}$, $n = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10}$, $n = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12}$ ſingulæ rationales $=$ C'D. Et ſane $C'e = C'D$ $= \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 6} = \frac{5}{2}$, $C'D = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10} = \frac{3}{2}$, $C'D = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} = \frac{1}{2}$.

Itaque in triangulo variabiles homologæ rationales integræ

$$\begin{cases} CD = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 6,\ B'D = 1 \\ CD = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5,\ B'D = 2 \\ CD = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4,\ B'D = 3 \end{cases}$$

quæ binæ & binæ ſumptæ æquales ſunt 7. Ac chordis homologis in circulo CeC' irrationalibus $Ce = \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{12}$ reſpondent rationales ſupra inventæ, ſcilicet $C'e = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$: nam $\overline{Ce}^2 + \overline{C'e}^2 = \frac{24 + 25}{4} = \frac{40 + 9}{4}$ $= \frac{48 + 1}{4} = \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \overline{CC'}^2$.

§. 61. Quod ſi ab æquatione antecedenti $(MN)^{\frac{2}{2}} = (12)^{\frac{2}{2}} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - n^2$, quæ eſt (21.ª) §. 53, ad æquationem (29.^{am}) §. 54. tranſeamus, erit in noſtro caſu $(MN)^{\frac{2}{2}} = (12)^{\frac{2}{2}} = \frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (12)^{\frac{2}{2}}} \cdot \frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (12)^{\frac{2}{2}}}$ $= MN$, in qua MN rectangulum æquale quoad valorem quadrato $(12)^{\frac{2}{2}}$ ſub ſigno

ſigno radicali eſt productum tamen duorum factorum incognitorum M & N, qui quæruntur. Locus hujuſce æquationis eſt circulus C M B′ diametri C B′ duplæ C C′, & facta revolutione ut docuimus trianguli C′ e C, chorda C e circuli C e C′ fit ſinus D H hujuſce poſtremi circuli, & altera chorda homologa C′ e fit coſinus C′ D, & habetur $CD . B'D = \overline{DH}^2$. In hac, quoniam eſt $(12)^{\frac{2}{2}} = (MN)^{\frac{2}{2}}$, ſi loco $(12)^{\frac{2}{2}}$ ponatur $(MN)^{\frac{2}{2}}$, erit æquatio

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = \overline{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}} . \overline{\frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}} = MN:$$

quæ eſt æquatio generalis complectens valores omnes, qui legitime in hoc Syſtemate tribui poſſunt quadrato $(MN)^{\frac{2}{2}}$. In hac ſi ponatur N = o, erit ex (I.ª) §. 58.

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = 7 . o = \overline{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - C^2}} . \overline{\frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - C^2}}$$

$= CC' + C'B' . B'$: triangulum enim C′ e C deſinit in C′C, & facta revolutione punctum C, ſive H recidit in B′. Quod ſi fiat $(MN)^{\frac{2}{2}} = \overline{Ce}^2 = \overline{CC'}^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$; tunc chorda C e fit maxima, & congruit cum C C′, puncto *e* recidente in C′, & triangulum C′ e C fit nullum, C′ e vero licet ſit nulla, tamen in puncto C′ normalis cenſenda eſt ad diametrum C C′, atque in directione tangentis. Itaque ſi intelligatur facta revolutio per quadrantem, donec ipſa C e licet nulla concurrat in directione C B′ atque producta congruat cum C′ B′, punctum C cadet in M, & æquatio

$$\left(\frac{7}{2} . \frac{7}{2}\right)^{\frac{2}{2}} = \overline{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2}} . \overline{\frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2}} = MN$$

dabit rectangulum maximum $M . N = CC' . B'C' = \overline{C'M}^2$ quadrato radii in poſitione C′M. Quod ſi ponamus MN = *6*, erit

$$(6)^{\frac{2}{2}} = \overline{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (6)^{\frac{2}{2}}}} . \overline{\frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (6)^{\frac{2}{2}}}}$$

$= \overline{\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}}} . \overline{\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{25}{4}}} = 6 . 1$; & poſito $(MN)^{\frac{2}{2}} = (10)^{\frac{2}{2}}$,

$$(10)^{\frac{2}{2}} = \overline{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (10)^{\frac{2}{2}}}} . \overline{\frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (10)^{\frac{2}{2}}}}$$

=

$= \overline{\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}} . \overline{\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}} = 5 . 2$; & poſito $(MN)^{\frac{2}{2}} = (12)^{\frac{2}{2}}$,

$$(12)^{\frac{2}{2}} = \overline{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (12)^{\frac{2}{2}}}} . \overline{\frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (12)^{\frac{2}{2}}}}$$

$$= \overline{\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}} . \overline{\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}} = 4 . 3 .$$

§. 62. Ex quibus conſequitur id, quod attente eſt animadvertendum, quod ſcilicet ex hiſce æquationibus non habetur valor producti MN, quod jam notum eſt, & æquale quadrato $(6)^{\frac{2}{2}}$, vel $(10)^{\frac{2}{2}}$, vel $(12)^{\frac{2}{2}}$; ſed factores ſinguli, ex quorum producto oritur quantitas quadrato æqualis: ita ut ii bini tantum factores determinentur, qui in hoc caſu productum datum efficiant. Ita licet *6* tam a producto 1 . *6*, quam a 2 . 3; & 10 ab 1 . 10 vel a 2 . 5; & 12 ab 1 . 12, 2 . *6*, 3 . 4 oriantur; tamen æquationi (4.ª) §. 58. non alii factores intelligendi ſunt convenire, quam in primo caſu 1, *6*; in ſecundo 2, 5; in tertio 3, 4; ii nimirum, qui a combinatione (I.ª) §. 58. exhibentur: hac enim altera conditione obſtringuntur, ut eorum ſumma ſemper ſit æqualis baſi datæ aſſumptæ 7. Quare rectangulum 12 licet poſſit oriri a producto duorum factorum 2, & *6*; vel 1, & 12; tamen in æquatione $12 = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2} - n . n}$ productum 12 factoribus 3, & 4 tribuendum eſt. Et ſane ſumpta æquatione (5.ª) $MN = 12 = \overline{\frac{8}{2} + \frac{8}{2}} - n . n$, & ad rectangularem methodo ſuperiori translata, erit

$$(12)^{\frac{2}{2}} = \overline{\frac{8}{2} + \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (12)^{\frac{2}{2}}}} . \overline{\frac{8}{2} - \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (12)^{\frac{2}{2}}}} = MN$$

$$= \overline{\frac{8}{2} + \sqrt{\frac{64}{4} - (12)^{\frac{2}{2}}}} . \overline{\frac{8}{2} - \sqrt{\frac{64}{4} - (12)^{\frac{2}{2}}}} = \overline{\frac{8}{2} + \sqrt{\frac{16}{4}}} . \overline{\frac{8}{2} - \sqrt{\frac{16}{4}}}$$

$= \overline{4 + 2} . \overline{4 - 2} = 6 . 2$: quod oſtendit in hac rectangulum 12 a producto tantum factorum *6* & 2 repetendum eſſe, quorum ſumma 8 conciliatur cum baſi data; atque ideo $M = 6$, $N = 2$: (*6*.ª) vero $MN = 12 = \overline{\frac{13}{2} + \frac{13}{6} - n . n}$ reducta dabit

$$(12)^{\frac{2}{2}} = \frac{13}{2} + \sqrt{\left\{\frac{13}{2}\right\}^2 - (12)^{\frac{2}{2}}} \cdot \frac{13}{2} - \sqrt{\left\{\frac{13}{2}\right\}^2 - (12)^{\frac{2}{2}}}$$

$$= \frac{13}{2} + \sqrt{\frac{169-48}{4}} \cdot \frac{13}{2} - \sqrt{\frac{169-48}{4}} = \frac{13}{2} + \sqrt{\frac{121}{4}} \cdot \frac{13}{2} - \sqrt{\frac{121}{4}}$$

$= \frac{13+11}{2} \cdot \frac{13-11}{2} = 12 \cdot 1 = M \cdot N$: ergo $M = 12$, $N = 1$, & eorum ſumma $M + N = 12 + 1 = 13$ datæ baſi. Ergo in (5.ª) æquatione $CC' = \frac{8}{2}$; in (6.ª) $CC' = \frac{13}{2}$; quibus mutatur & Syſtema lineare, & quadraticum ac rectangulare. Porro cum ex ipſa hyperbolæ proprietate inter aſymptotos coordinatarum productum, quarum ſumma variabilis eſt ad infinitum, tamen æquale ſit rectangulo conſtanti; patet idem productum 12 oriri poſſe ab infinito numero Syſtematum diverſæ baſis, in quibus productum perſeverat idem, mutatur ſumma variabilium. Hinc methodo a nobis §. 20, & ſequentibus uſque ad §. 38. explicata determinari poſſunt arbitrio infinitæ baſes partiales, conſtituentes infinita Syſtemata partialia baſis datæ, ex quibus ſingulis bini diverſi factores eruuntur ex quorum producto oriatur 12; quod cum non ſit niſi caſus peculiaris producti mn, valor mn intra certos limites continetur: quibus prætergreſſis fit imaginarium in aſſumpto Syſtemate, cui tamen alterum majoris baſis præſto eſt. Hoc modo ope Syſtematum partialium baſis datæ tranſitu facto ab uno ad alterum, prout res fert, omnia in proprio Syſtemate cum veritate conveniunt: de qua tamen methodo fuſius in *Parte* II.ª. Vel (ſi velis) a primo ſumpto Syſtemate ad alterum indefinitum Syſtema tranſitum fac; quod unum inſerviet indefinite omnibus caſibus, qui cum Syſtemate aſſumpto baſis datæ nequeunt conciliari: cum enim invenerimus $12 = MN$, erit $M + N = m$ variabilis & indefinita. Si vero facias $M = a$, ſive in noſtro caſu $= 7$, vel 8, vel 13; orientur tres æquationes lineares $7 + n = m$, vel $8 + n = m$, vel $13 + n = m$, ſingulæ ad Syſtema lineare baſis variabilis pertinentes, ex quibus ſingulis deducuntur tria diverſa Syſtemata quadratica baſis variabilis $(MN)^{\frac{2}{2}} = n^2 - \left\{\frac{7}{2}\right\}^2$, vel $(MN)^{\frac{2}{2}} = n^2 - \left\{\frac{8}{2}\right\}^2$, vel $(MN)^{\frac{2}{2}} = n^2 - \left\{\frac{13}{2}\right\}^2$.

Atque ex primo (*fig.* 4.) a Syſtemate baſis datæ, in quo $AC = 7$ deſcripto a nobis *figura* 1.ª fit tranſitus ad hyperbolam ejuſdem diametri, ex qua eruuntur valores omnes MN, qui cum Syſtemate baſis datæ 7 repugnant. Quod ſi ponas $AC = \frac{8}{2}$, vel $= \frac{13}{2}$, invenies eodem modo Syſtema baſis variabilis homologum dato baſis datæ, ſumpta hyperbola ejuſdem diametri ac eſt circulus, qui eſt locus Syſtematis baſis datæ primo ſumpti. Secunda hæc methodus

dus præcipue in hoc Opere explicata fuit. Quare illud ſtatuendum eſt, M N quod in calculo communi tamquam notum ſemper uſurpatur, ſumendum eſſe variabile, ac tantum limites determinandos, intra quos liceat arbitrio huic M N valorem datum tribuere: qui limites cum diverſi ſint pro diverſitate Syſtematis linearis primo ſumpti, patet valorem M N, qui repugnat cum uno Syſtemate, alteri legitime aptari poſſe. Ita in noſtro exemplo in primo caſu radicalis $\sqrt{\left\{\frac{7}{2}\right\}^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}$, $(MN)^{\frac{2}{2}}$ nequit excedere valorem $\left\{\frac{7}{2}\right\}^2$; quod ſi excedat, inciditur in imaginarium; convenit vero cum altero $\sqrt{\left\{\frac{8}{2}\right\}^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}$, in quo valor maximus $(MN)^{\frac{2}{2}} = \frac{64}{4} > \frac{49}{4}$: hoc etiam prætergreſſo fit imaginarium, ſed applicatum $\sqrt{\left\{\frac{13}{2}\right\}^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}$ perfecte congruit, cum ſit $(MN)^{\frac{2}{2}} = \left\{\frac{13}{2}\right\}^2 = \frac{169}{4} > \frac{64}{4} > \frac{49}{4}$. Ac tandem $(MN)^{\frac{2}{2}}$ univerſim applicatum Syſtemati baſis variabilis quadratico $m^2 = n^2 - \left\{\frac{7}{2}\right\}^2$, vel $m^2 = n^2 - \left\{\frac{8}{2}\right\}^2$, vel $m^2 = n^2 - \left\{\frac{13}{2}\right\}^2$ perfecte congruit intra limites minimum $n^2 = \left\{\frac{7}{2}\right\}^2$, vel $\left\{\frac{8}{2}\right\}^2$, vel $\left\{\frac{13}{2}\right\}^2$ uſque ad infinitum.

§. 63. Illud etiam notandum, ſi in æquatione

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = \frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}} \cdot \frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}} = MN,$$

orta ab $mn = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2} - n} \cdot n$, ponatur $M = 7$, fieri $N = 0$, ac proinde æquatio erit

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = 7.0 = \frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (0)^2} \cdot \frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (0)^2} = MN = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2}} \cdot 0$$

(*fig.* 2.) $M = CB'$, vel $B'C = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}$ maxima, & $N = B'$, vel C minima. At in combinatione (II.ª), quæ pertinet ad æquationem mn

$= \overline{\frac{8}{2} + \frac{8}{2} - n} \cdot n$, facta M $= 7$, erit N $= 1$; & æquatio

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = 7 \cdot 1 = \overline{\frac{8}{2} + \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (7 \cdot 1)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{8}{2} - \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (7 \cdot 1)^{\frac{2}{2}}}}$$

$= \overline{\frac{8}{2} + \sqrt{\frac{36}{4}}} \cdot \overline{\frac{8}{2} - \sqrt{\frac{36}{4}}} = \overline{4 + 3} \cdot 1 = 7 \cdot 1$; in qua M non eſt amplius maxima, ſed media, ac proinde nec N minima $= 0$, ſed $= 1$. Ad utraſque tamen æquationes aditus patet ope rectanguli 12, quod proprium eſt utriuſque æquationis, cum 12 tam $mn = \overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2} - n} \cdot n$, quam $mn = \overline{\frac{8}{2} + \frac{8}{2} - n} \cdot n$ legitime aptari poſſe re ipſa §. 58. oſtenderimus: ex prima enim eruimus $mn = 3 \cdot 4$, ex ſecunda $mn = 2 \cdot 6$, factores quidem in utraque diverſos, ſed in utraque rationales, ex quorum multiplicatione in utraque oritur 12. In ceteris vero caſibus qui ſunt rationales in una, fiunt irrationales in altera: nam poſito in prima $mn = 10$, erit æquatio

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = (10)^{\frac{2}{2}} = \overline{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (10)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (10)^{\frac{2}{2}}}}$$

$= \overline{\frac{7}{2} + \frac{3}{2}} \cdot \overline{\frac{7}{2} - \frac{3}{2}} = 5 \cdot 2$: & hoc eodem valore poſito in (2.ª) erit

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = (10)^{\frac{2}{2}} = \overline{\frac{8}{2} + \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (10)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{8}{2} - \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (10)^{\frac{2}{2}}}}$$

$= \overline{\frac{8}{2} + \sqrt{\frac{24}{4}}} \cdot \overline{\frac{8}{2} - \sqrt{\frac{24}{4}}} = \overline{4 + \sqrt{6}} \cdot \overline{4 - \sqrt{6}} = 10$: & ex (3.ª) eruitur

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = (10)^{\frac{2}{2}} = \overline{\frac{13}{2} + \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - (10)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{13}{2} - \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right) - (10)^{\frac{2}{2}}}}$$

$$= \overline{\frac{13}{2} + \sqrt{\frac{129}{4}}} \cdot \overline{\frac{13}{2} - \sqrt{\frac{129}{4}}} = 10.$$

Qua-

Quare quicumque numerus poteſt conſiderari, tamquam maximus in Syſtemate baſis datæ ipſi æqualis, & tunc ejus productum, quod eſt productum variabilium homologarum, fit zero; ſi enim ipſe eſt maximus in Syſtemate baſis datæ, alter homologus ſit zero oportet. Inſuper quicumque numerus poteſt conſiderari ut productum ipſius numeri ducti in unitatem, ſi modo Syſtema opportunum baſis datæ æqualis ipſi & unitati eligatur: ac tandem quicumque numerus poteſt eſſe productum duorum factorum rationalium, ac duorum factorum irrationalium in eo Syſtemate baſis datæ, quæ ſuperet numero unitate majori ſummam ipſius numeri in alterum multiplicati, ex quibus exſurgit productum; omnia enim hæc pendent a diverſitate Syſtematis, cui applicatur numerus: quicumque enim numerus diverſis Syſtematibus & quidem infinitis communis eſt. Hæc maximi momenti ſingula, nec quidem omnia, quæ ex jactis principiis deduci poſſent hîc attigiſſe ſufficiat, ut indicium aliquod meæ inchoatæ Theoriæ patefaciam, quæ in *Parte* II.ª & ulterius diligentius perſequemur.

§. *64*. Tandem ex §. *56*. conſtat æquationem

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = \overline{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}} \cdot \overline{\frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}} = \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2} - \left(\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}\right)$$

$$= \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2} - \left(\frac{7}{2} + (MN)^{\frac{2}{2}}\right)\cdot\left(\frac{7}{2} - (MN)^{\frac{2}{2}}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2} - \cdot\overline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2}} - n\cdot n$$

$$= \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2} \overline{+ \frac{7}{2} + \frac{7}{2}} - n\cdot(-n) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{7}{2}\cdot(-n) + (-n)^2 \;(\textit{fig.2.})$$

$$= \overline{CC'}^2 + 2CC'\cdot(-C'e) + (-C'e)^2 = (CC')^2 + 2CC'\cdot(-C'D)$$

$+ (-C'D)^2$: ſed $\overline{C'D}^2 = \overline{C'e}^2 = \overline{CC'}^2 - \overline{Ce}^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}$;

ergo

$$(MN)^{\frac{2}{2}} = M^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{7}{2}\cdot\left(-\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}\right) + \left(-\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (MN)^{\frac{2}{2}}}\right)^2$$

$= \overline{CD}^2$; ergo in rectangulo MN facta $N = 0$ eſt $M = 7$; at quadratum $(MN)^{\frac{2}{2}} = \overline{Ce}^2$ in circulo diametri CC' eſt $(MN)^{\frac{2}{2}} = (0)^2 = C^2$; igitur

$$MN = 7.0 = M^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{7}{2}\cdot\left(-\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - C^2}\right) + \left(-\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - C^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \overline{CC'}^2 + 2\,CC'\cdot C'B' + \overline{C'B'}^2$$

$$=$$

$=\overline{\frac{7}{2}+\frac{7}{2}}^{2}=\overline{CC'+C'B'}^{2}$ quadratum maximum, cui, ut oſtendimus, reſpondet quadratum minimum $(B')^2$. Ex hoc vero quadrato maximo Syſtematis baſis datæ ſi fiat $(M)^2=(-CC')^2+2.(-CC').DC'+(DC')^2=$ (*fig.* 4.) $(DC)^2+2DC.\left(-\frac{7}{2}\right)+\left(-\frac{7}{2}\right)^2$ habetur quadratum $\overline{DA}^{2}$ medium, in quo DC non poteſt eſſe minor $\frac{7}{2}$, atque ideo ad Syſtema baſis variabilis quadraticum $m^2=n^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2$, & ex hoc ad rectangula media &c., & a circulo diametri variabilis ad hyperbolam diametri datæ tranſitus fit. Quæ omnia *Cap.* IV, & hoc clare demonſtrata fuerunt. Æquationes igitur hujuſce Syſtematis applicatæ æquationibus tribus ſuperioribus erunt ſequentes ex (36.^{a}) §. 50. profectæ

$$(36.^a)\ (MN)^{\frac{2}{2}}=\sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}}+\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}\cdot\sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}}+\frac{a^2}{4}}-\frac{a}{2}=MN\ S.\ Y.$$

$$=\begin{cases}\sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}}+\left\{\frac{7}{2}\right\}^2}+\frac{7}{2}\cdot\sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}}+\left\{\frac{7}{2}\right\}^2}-\frac{7}{2}\\ \sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}}+\left\{\frac{8}{2}\right\}^2}+\frac{8}{2}\cdot\sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}}+\left\{\frac{8}{2}\right\}^2}-\frac{8}{2}\\ \sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}}+\left\{\frac{13}{2}\right\}^2}+\frac{13}{2}\cdot\sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}}+\left\{\frac{13}{2}\right\}^2}-\frac{13}{2}\end{cases}$$

in quibus omnibus $(MN)^{\frac{2}{2}}$ eſt quadratum tangentis circuli radii dati in prima $\frac{7}{2}$, in ſecunda $\frac{8}{2}$, in tertia $\frac{13}{2}$; ex quo ad circulum radii variabilis $\sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}}+\left(\frac{7}{2}\right)^2}$, vel $\sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}}+\left(\frac{8}{2}\right)^2}$, vel $\sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}}+\left(\frac{13}{2}\right)^2}$, & ab hoc circulo ad hyperbolam æquilateram $-\left(\frac{7}{2}\right)^2+n^2=(MN)^{\frac{2}{2}}$, vel $-\left(\frac{8}{2}\right)^2+n^2=(MN)^{\frac{2}{2}}$, vel tandem ad $-\left(\frac{13}{2}\right)^2+n^2=(MN)^{\frac{2}{2}}$

Sy-

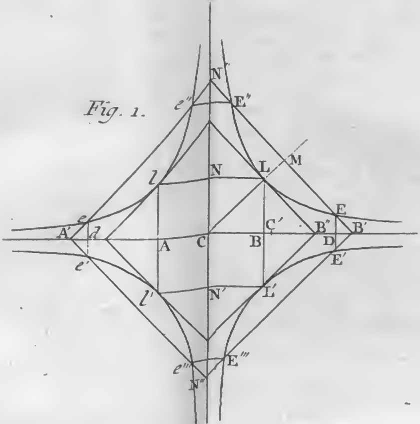


Fig. 1.

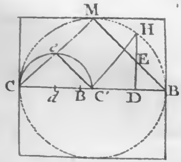


Fig. 2.

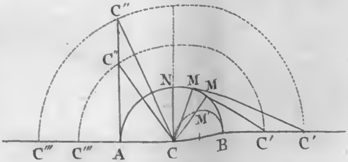


Fig. 3.

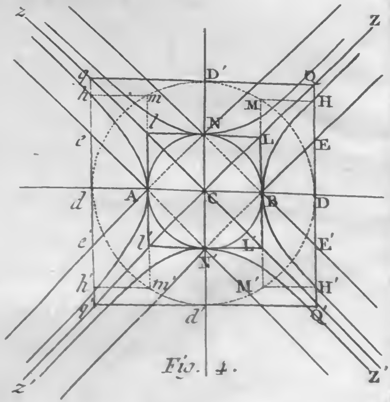


Fig. 4.

Syſtema quadraticum baſis variabilis, ex quo deinde ad rectangulare Syſtema fit tranſitus, ut ſuperius oſtendimus. Quamobrem ex uno hoc exemplo numerico eruitur quomodo nos gerere debeamus in ceteris omnibus numericis, ut ad perfectam ſolutionem & conſtructionem æquationum ſecundæ dimenſionis, methodum generalem a §. 50. uſque ad §. 58. ſequuti, perveniamus, quin ulla nec in radicibus, nec in conſtructione *imaginarietas* opponatur. Hæc enim (ut hoc etiam obiter innuam) tam analyticam formulam, quam conſtructionem geometricam illi reſpondentem neceſſario vinculo conſociatas ita inficit, ut ipſa conſtructio realis, quæ vulgo obtinetur etiam in caſibus formulæ analyticæ imaginariæ indicium tutiſſimum præbere poterat, affectionem analyticam realem conſtructioni reali geometricæ conſonam nullo modo deeſſe poſſe, licet fruſtra hactenus quæſita fuerit. Videant igitur quo jure quidam, ut nihil intentatum relinquerent ad hanc Theoriam in ipſo ortu obruendam, in vulgus diſſeminarint, hanc quidem fortaſſe aptari poſſe formulis analyticis, ſed ad numericas æquationes ſolvendas eſſe omnino imparem. Cum illud potiori jure me contra fidenter pronuntiare poſſe arbitrer, hanc ipſam Theoriam eſſe æquationibus non ſolum analyticis, ſed etiam numericis ſolvendis ita neceſſariam, ut numquam ad perfectam earum ſolutionem pervenire fas ſit, niſi omnia, quæ in toto hoc Opere demonſtravi, probe noſcantur, atque memoriæ conſignata ad uſum, pro re nata, traducantur: quibus ſine fieri nequit (quemadmodum res ipſa docet) ut ulla æquatio analytica, vel numerica rite ſolvi poſſit.



CA-

CAPUT VI.

Methodus in ſolvendis æquationibus primæ & ſecundæ dimenſionis vulgo uſurpata ad examen revocatur.

§. 1. Cum in toto hoc Opere veſtigia novæ hujuſce Theoriæ a me inchoatæ ſecutus ea aut ambigua aut minus recta, in quæ identidem offendit, meo quidem judicio, Methodus communis pro re nata & patefecerim, & remedia ad hæc vel tollenda, vel explananda indicaverim; hoc Capite in hiſce tantum principiis uſu receptis in ſolutione æquationum concinnanda diligentius excutiendis immorabor, quæ aut non recta, aut male applicata præcipue in cauſſa fuere, cur Scientia hæc tot tantiſque difficultatibus atque impedimentis circumſepta & implicata fuerit, ut hiſce ſublatis cetera ex iſtis manantia ſponte ſua corruant, & evaneſcant. Antequam tamen ad rem veniamus, ne id mihi hoc loci contingat, quod alias expertus ſum, ne quis ſcilicet exprobret me Analyſtis aut falſa affingere, aut quæ vera dicunt in pravum ſenſum detorquere, eo adactum me video, ut ipſiſſimis verbis immortalis Viri Co. Vincentii Riccati primas æquationum leges omnium conſenſu probatas, atque ſemper uſurpatas exponam. Hic in *Libro* I. *ſuarum Inſtitutionum Cap.* V. §. 14. hæc habet. „ Sint duo quicumque factores $x + a$, $x + b$; multiplicentur inter ſe,

„ erit productum $x^2 \begin{matrix} + bx \\ + ax \end{matrix} + ab$. Si hujus producti naturam conſideres ſtatim

„ deprehendis ſummam extremorum terminorum a, b eſſe coeficientem termini „ ſecundi in producto, & ultimum ab eſſe eorum productum. Quotieſcumque „ igitur duas habeas quantitates, quæ ſimul additæ ſecundi termini producti ali„ cujus exhibeant coeficientem, & invicem multiplicatæ dent ultimum illius ter„ minum, ſtatim ambos producti factores obtinuiſti, ſi earum utramque ea „ quantitate augeas, per quam productum fuerat ordinatum: ſic in allato exem„ plo, quia a & b ſimul ſumptæ dant coeficientem termini ſecundi, & invi„ cem ductæ dant tertium terminum, recte inferes illius formulæ factores eſſe „ a, & b auctos quantitate x, per quam formula eſt ordinata, nempe eſſe „ $x + a$, $x + b$. Id autem verum eſt, quicumque, ut initio dixi, ſint fa„ ctores, quodcumque productum, ſeu hoc, ſive illi omnes, ſeu eorum alter „ zero æqualis ſit, aut cuilibet quantitati. „

„ §. 15. Si vero alter factorum $x + a$, $x + b$, vel ambo eſſent æquales „ zero (quod alterum non accidit niſi a & b ſint æquales) tunc etiam ex iis „ ortum productum eſſet zero; quod patet quia quantitas per zero multiplica„ ta, vel zero per zero ſemper zero eſſe debet: haberemus igitur æquationem

„ ſe-

„ ſecundi gradus $x^2 \begin{matrix} +ax \\ +bx \end{matrix} + ab = 0$, in qua æquatione ea omnia, quæ ſu-
„ pra dicta ſunt, verificantur. Imo ea verificari debent in æquationibus quibuſ-
„ cumque, quum nihil aliud ſit æquatio niſi productum, quod eſt æquale zero,
„ quia unus aut omnes factores ſunt zero. Igitur in æquatione $x^2 \begin{matrix} +ax \\ +bx \end{matrix} + ab$
„ $= 0$ neceſſario unus ſaltem ex factoribus $x + a$, $x + b$, quicumque tandem
„ ſit, zero æquabitur, per quem valor n obtinetur; unde infertur illum eſſe va-
„ lorem x, qui loco x poſitus in æquatione efficit ut termini omnes elidantur,
„ & illum eſſe æquationis factorem, per quem perfecte dividi æquatio poterit.
„ §. 16. At quamvis, uti diximus, ex eo quod æquatio ſit æqualis zero,
„ rectiſſime ſequatur aliquem factorum zero æqualem eſſe; non tamen erui po-
„ teſt quinam ſit hujuſmodi factor; etenim ſi quum canonicæ æquationis (ſcili-
„ cet $x^2 + Ax - aB = 0$) factores ſint
„ $x + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{AA}{4} + aB}$, $x + \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{AA}{4} + aB}$, eorum alter erit
„ zero; at quinam ille ſit, hactenus ignotum eſt. Hujus autem rei ratio mani-
„ feſta eſt hæc, quia æquatio duas (idem dicendum ſi plures quam duas) ex-
„ hibens diverſas radices, ſive incognitæ valores diverſos, indifferens quidem eſt
„ de ſe, & poteſt per alterutrum verificari; at eodem tempore per utrumque
„ verificari impoſſibile eſt omnino & abſurdum. Ergo uno incognitæ valore de-
„ terminato, ſi hæc ex eadem incognita ſubtrahatur, factorem dabit æqualem
„ zero, at ſubtracto altero fiet ſecundus factor neceſſario major, vel minor.
„ Eſt igitur manifeſtum neſcire nos qui factor zero æquetur, ſi ſolam æquatio-
„ nem ſpectemus, adeoque neſcire per quam ex inventis radicibus æquatio veri-
„ ficetur. Quod ſi quæras, quid tandem illud ſit, quod hanc veluti æquatio-
„ nis indifferentiam tollat, vel valorem incognitæ potius hunc, quam illum
„ determinet, id ex caſuum peculiarium circumſtantiis pendere dicimus, ex iis
„ nempe, quas ſecum trahunt peculiaria problemata, quæque in Analyſim in-
„ troduci non poſſunt: ſed hæc clarius etiam ex Problematum ſolutione ſuo lo-
„ co patebunt „. Hactenus Clariſ. Auctor.

§. 2. Communi Analyſtarum doctrina circa prima ſolutionis æquationum ſecundæ dimenſionis fundamenta verbis tanti Viri declarata, ut ad eam ſenſim & rigide excutiendam accedamus, prima mali labes, a qua cetera profluunt incommoda, eſt detegenda; quæ in ipſa æquationum linearium notione uſu recepta anguſta nimis & incompleta latet. Dixeram *Libro* I. æquationes lineares, in quibus una tantum variabilis reperitur, non eſſe, ut vulgo creditur, ad unum tantum valorem determinatas, ſed æquationes tantum limitis, quas natura ſua duabus ſemper variabilibus conſtare debere, toto primo Libro oſtendi. Hinc $m = a$ eſt æquatio linearis limitis profecta vel ab æquatione generali $m + n = a$ Syſtematis baſis datæ, in qua $n = 0$ minima, & m maxima, quæ ſimul ſum-

ptæ dant æquationem limitis $m + 0n = a$; vel ab æquatione generali $m = a + n$ Syſtematis baſis variabilis, in qua n minima $= 0$, & m item minima $= a$; & æquatio limitis $m = a + 0n$. Ceterum diviſa bifariam a oſtendi æquationem eſſe vel $m + n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, vel $m - n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, & univerſim $m + n = \frac{a}{2} + n + \frac{a}{2} - n$, $m - n = \frac{a}{2} + n + \frac{a}{2} - n$: in prima $n < \frac{a}{2}$, & $\frac{a}{2} - n$ poſitiva; in ſecunda $n > \frac{a}{2}$, & $\frac{a}{2} - n$ negativa: & ex prima univerſim $m + n = \left\{\frac{a}{2} + n\right\} + \left\{\frac{a}{2} - n\right\}$ S. A; ex ſecunda $m + n = \left\{n + \frac{a}{2}\right\} + \left\{n - \frac{a}{2}\right\}$ S. Y; quibus æquatio linearis prima Syſtematis baſis datæ dividitur in duo Syſtemata partialia baſis variabilis unum, baſis datæ alterum: æquatio vero linearis ſecunda Syſtematis baſis variabilis dividitur in duo Syſtemata, utraque baſis variabilis; atque ideo utraque infinitis variabilibus binis & binis ſumptis conſtare debet, quæ radices æquationis binæ cenſendæ ſunt, ſi modo homologæ accipiantur. Duarum enim quarumlibet homologarum ſumma in Syſtemate baſis datæ, differentia in Syſtemate baſis variabilis ſemper eamdem æquationem a reſtituunt, intra quas continentur etiam illæ homologæ limitis in Syſtemate baſis datæ, una maxima $= a$, altera minima $= 0$; æquationis $m + 0n = a$, in Syſtemate baſis variabilis ambæ minimæ, ſed una minima $= a$, altera $= 0$ æquationis $m = a + 0n$; proindeque $m = a$ non ut determinata cenſenda eſt, ut vulgo creditur, ſed tantum limitis ad alterutrum Syſtema pertinens, in qua ſemper duæ radices homologæ, una a, altera zero, maxima vel minima in Syſtemate baſis datæ, ambæ minimæ in Syſtemate baſis variabilis æquationi propoſitæ ſatisfacientes ſunt admittendæ. Quomodo enim in æquatione $m = a$, communi ſententia m poterit eſſe ac dici variabilis & fluens, ſi m ad unum tantum valorem a ſemper determinetur; ſitque $a = a$, prout æquatio ipſa quæ dicitur determinata neceſſario requirit? Adde, quod alia ab omnibus uſurpata regula, quæ docet, facta in ipſa æquatione unius termini tranſpoſitione, eſſe $m - a = 0$, facile oſtendiſſet quam falſa ſit hæc æquationum linearium unius variabilis recepta notio. Nam in hac æquatione $m - a = 0$ calculi neceſſitate compulſi fatentur omnes mutato valore fluentis m fieri $m - a = n$, atque ideo æquationem natura ſua indeterminatam eſſe, utpote duabus variabilibus conflatam, in qua poſita $n = a$ fit $m - a = 0$, qui eſt caſus peculiaris æquationis hujuſmodi indeterminatæ. Verum ſi m in æquatione $m - a = 0$ aſſumitur ut indeterminata & fluens, patet & in æquatione $m = a$ eamdem m variabilem ſumendam eſſe, at ita efferendam $m = a \pm 0n$, ut intelligatur hanc non eſſe niſi caſum peculiarem formulæ generalis $m = a \pm n$. Quare vera univerſalis, & completa hujuſmodi æqua-

quationum notio illa eſt, quæ conſiderat æquationes lineares unius variabilis tamquam æquationes limitis, atque hoc nomine definit.

§. 3. Ab hac non recta æquationum linearium unius variabilis definitione ortum ducit altera male explorata regula, qua in duabus æquationibus indeterminatis (quæ nulla inter ſe ſocietate conjunctæ creduntur) ex. gr. (1) $m - a = n$, (2) $a - m = n$, initium fluxionis m in utraque promiſcue ſumitur a zero uſque ad infinitum : ex quo fit, ut in (1.ª) n (intra limites zero & a fluente m) ſit negativa ; in (2.ª) vero n fiat ſemper negativa, fluente m ab a uſque ad infinitum. Nam facta in (1.ª) $m = 0$, erit $- a = n$; & in (2.ª) facta $m = 2a$, erit $- a = n$: poſitivum æquale negativo. Ex hac igitur male intellecta, ac arbitraria determinatione, qua promiſcue in utraque æquatione eodem modo, ac nullis legibus fluere quæcumque variabilis ſupponitur, irrepſit in Analyſim æquatio illa $1 = - 1$ (cujus, quis crederet ! ego feror Auctor), quæ totam Analyſim turbavit infecitque, & ex qua ex coenoſo tamquam fonte illud, quod dicitur *imaginarium abſurdum*, manavit, cui tamen uni tamquam primæ cauſſæ quicquid mali in Analyſi eſſe dolemus, hactenus tribuitur. Et tamen ſi ab omnibus paſſim in calculo uſurpatur æquatio poſitivi cum negativo; profecto paſſim occurrat oportet & illud, quod neceſſario conſequitur, ideſt imaginarium : & ſi illa tamquam legitima omnium Analyſtarum ſuffragiis probatur, non video cur hoc alterum tamquam abſurdum omnium votis damnetur. Quod tamen tamquam refractarium invitis omnibus in calculo tamdiu conſiſtet, quamdiu cauſſa prima, ſive æquatio poſitivi cum negativo, a qua neceſſario oritur, benigne excepta fuerit atque probata. Ut vero hanc a calculo eliminare poſſimus, ejus origo prius inveſtiganda eſt, quam ab ipſa incompleta æquationum linearium unius variabilis definitione ortam eſſe quiſque facile perſpiciet, dummodo animadvertat æquationem $m = a$ (ſi prout ipſa eſt æquatio limitis accipiatur) revera, & natura ſua eſſe $m = a \pm 0n$: ergo in caſibus mediis ex hac una duæ neceſſario vinculo inter ſe colligatæ æquationes profluant neceſſe eſt, quæ ſunt (1.ª) $m = a - n$ (2.ª) $m = a + n$, quæ in caſu limitis in unam coaleſcunt quoad valorem, ſed formam obtinent $m = a \pm 0n$. Hoc ſemel intellecto, facile etiam intelligitur, donec m intra limites 0, & a fluere concipitur, æquationem mediam eſſe $m = a - n$ S. A : hiſce vero limitibus prætergreſſis ſtatim in hoc Syſtemate, cui amplius non competit, occurrit æquatio poſitivi cum negativo ; excipitur tamen ab æquatione Syſtematis baſis variabilis $m = a + n$ S. Y., cui vere convenit, donec intra limites a & infinitum fluere intelligas variabilem m. Contra vero ſumpta $m = a$ tamquam una ac determinata, tollitur vinculum illud $\pm 0n$, quo utrique Syſtemati adhæreſcit, neque intelligitur hæc neceſſaria cum utroque Syſtemate, quam univerſim habet, conſociatio, neque in caſibus mediis pro diverſa valoris m determinatione eruitur ad quodnam potius Syſtema referenda ſit. Itaque hac una æquationis linearis unius variabilis definitione vere ſtatuta, ſtatim innoteſcit duplex illud Syſtema, cui pro diverſitate valoris m conjungitur, & univerſim a tota Analyſi prima illa mali labes, ſcilicet æquatio poſitivi cum negativo, a qua cetera profluunt incommoda, at-

que imaginarium illud aut eliminatur, aut in totius Analyſeos utilitatem convertitur; quemadmodum in *Cap.* III. & ſeqq. *Lib.* I. a me factum vides: in quibus ex ipſa æquatione $1 = -1$ omnia in proprio Syſtemate collocata rite procedunt. Quod cum Analyſis communis falſa æquationis unius variabilis notione decepta duplex hoc Syſtema prorſus ignoraverit, prætergreſſis fluentis limitibus, qui ſunt proprii Syſtematis aſſumpti, incidit in poſitivum æquale negativo, ideoque in imaginarium, quod vitare nullo modo poteſt, utpote neſcia Syſtematis homologi, quod excipiat formulas, ac poſitivas & reales efficiat quæ in primo fiunt negatiuæ & imaginariæ; & viceverſa; ut vere dicendum ſit Calculum, quo nunc utimur, dimidiatum eſſe, atque primam hujuſce mali originem uni definitioni æquationis linearis unius variabilis male exploratæ tribuendam eſſe, qua diſſociantur inter ſe æquationes utriuſque Syſtematis a communi limitis æquatione profectæ, quæ nullo modo a ſe invicem & ab illo limitis divelli poterant: illæ enim recidunt in primam limitis, & hæc neceſſario in has utriuſque Syſtematis diſpertitur.

§. 4. Aperte demonſtrata fallacia definitionis vulgaris æquationum linearium unius variabilis, ad methodum communem a Clariſſimo Auctore traditam, qua geneſis æquationum ſecundæ dimenſionis vulgo ducitur, excutiendam aggredior; quæ in eo ſita eſt, ut duæ æquationes lineares nullo inter ſe affinitatis vinculo conjunctæ, quas factores appellant, in ſe ducantur, ex quarum producto æquationes ſecundæ dimenſionis ortum ducere ſtatuerunt. Sint igitur, ut vult Auctor, factores hujuſmodi $n + f$, $n' + g$ (ut meis ſymbolis utar) in ſe ducendi, & æquationem ſecundæ dimenſionis producant. Ex meis principiis patet ſingulos ſuperiores factores pertinere ad Syſtema lineare baſis variabilis, & eſſe $n + f = m$, $n' + g = m'$ (variabilibus n, m in ſecunda æquatione lineolam ſuffigo, ut variabiles unius æquationis ab alterius variabilibus ſecernantur). Hæ in ſe ductæ dant productum $nn' \begin{matrix} + n'f \\ + ng \end{matrix} + fg = mm'$, quæ eſt æquatio ſecundæ dimenſionis orta a producto duarum æquationum primæ, quæ nullam inter ſe habent conjunctionem, donec ſolitariæ ac ſimplices ſumuntur. Æquatio hæc ex earum producto genita quatuor variabilibus conſtat, ſi quæ in ſimplicibus binæ & binæ diverſæ erant, eodem modo ſumantur in compoſita. At hoc modo conſiderata æquatio non eſt niſi complexus duarum æquationum, quæ inter ſe contiguæ quidem ſunt, ſed non ita inter ſe communi vinculo conſociatæ, ut unam & continuam æquationem conſtituant. Nam $nn' + ng$ non eſt niſi ſecunda linearis, ſive ſecundus factor ductus in variabilem n; ſed eſt $n' + g = m'$, ergo $n'n + gn = nm'$; & $nf + fg = \overline{n+g} \cdot f = mf$; vel facta $nn' + nf = nm$, erit altera $ng + fg = \overline{n+f} \cdot g = gm$. Itaque in primo caſu (1.ª) $nn' + ng + \overline{n + g} \cdot f \begin{matrix} = nm' + mf \\ = nm + mn' \end{matrix}$; in ſecundo (2.ª) $nn' + nf + \overline{n + f} \cdot g$

$= mn$

$\begin{matrix} = mn + gm \\ = mn + nm \end{matrix}$: ergo mm' dividitur in duas partes ; & $nm + mn$ in primo caſu æquale fit $nm' + mf$, in ſecundo $mn + gm$. Hujuſmodi tamen æquationes compoſitæ numquam æquantur zero : nam facta in (1.ª) $n = 0$, fit $gf = 0m + mn$; in (2.ª) facta $n = 0$ fit $f.g = 0m + mn$. Poterit igitur æquatio hæc compoſita in duas ſequentes hoc modo diſpertiri

(1.am) $nn' + ng + \overline{n + g}.f = mn$, (3.am) $nn' + ng = mn$, (4.am) $nf + gf = mn$,

(2am) $nn' + nf + \overline{n + f}.g = mn$, (5.am) $nn' + nf = mn$; (6.am) $ng + fg = mn$;

in quibus facta $n = 0$, (3.ª) & (5.ª) fiunt zero minimæ ; (4.ª) & (6.ª) $gf = mn$ item minimæ. Quod ſi factores fuiſſent $f - n$, & $g - n'$; hi donec n minor f, & n' minor g, pertinerent uterque ad Syſtema lineare baſis datæ, & æquatio compoſita $fg \begin{matrix} - ng \\ - n'f \end{matrix} + (-n).(-n') = mm'$, quæ dividitur in ſequentes

(1.am) $\overline{f - n}.g - n'f + (-n).(-n') = mm'$, (3.am) $fg - ng = mn$, (4.am) $-n'f + (-n).(-n') = mn$

(2.am) $\overline{g - n'}.f - ng + (-n).(-n') = mm'$, (5.am) $gf - n'f = mn$, (6.am) $-ng + (-n).(-n') = mn$

In iſtis facta utraque $n = 0$; (3.ª) & 5.ª) fit $gf = mn$, quæ utraque eſt maxima; (4.ª) & (6.ª) $= 0$, quæ utraque eſt minima. Quare eruitur ex producto duorum factorum ſimplicium, qui ſinguli pertineant ad diverſas æquationes lineares Syſtematis baſis datæ, vel baſis variabilis, nullam æquationem ſecundæ dimenſionis efformari poſſe continuam & unam, donec variabiles utriuſque Syſtematis ponantur ſolitariæ & diverſæ. Quare recte (quemadmodum animadverti *Cap.* I. *Lib.* II. §. 54., & *defin.* 5.) methodus communis productum hoc, ſive æquationem ſecundæ dimenſionis eadem variabili n afficit, ut patet in formula Auctoris $n^2 \begin{matrix} + bn \\ + an \end{matrix} + ab$ ſupra §. 1. ex ſuis *Inſtitution.* ad unguem tranſcripta, in qua non modo n in ſingulis terminis eadem eſt, atque ut talis in progreſſu ſumitur; ſed etiam primo membro quadratica forma tribuitur. Videamus modo quid hujuſmodi variabilium identitas nos doceat.

§. 5. Ex factoribus igitur ſolitariis $n + f = M$, $n + g = N$, utriſque ad æquationem linearem Syſtematis baſis variabilis pertinentibus orietur productum, poſita n eadem, $nn + (f + g).n + fg = MN$: & cum in utraque ſimplici ex dictis n nequeat eſſe minor zero, facta n minima $= 0$, fiet æquatio compoſita $fg = MN$; atque ideo hujuſmodi æquatio numquam poterit fieri zero; ſed minimus valor, quem ſuſcipere poterit MN, ſive ad quem productum deprimi poterit, erit fg: erit itaque $MN = fg + MN$, & æquatio $nn + (f + g).n + fg = fg + MN$; ac ſublato communi fg habetur æquatio $nn + (f + g).n = MN$, quæ nunc fieri poteſt zero, poſita $n = 0$. Æquatio vero hæc ex noſtra methodo pertinet ad Syſtema baſis variabilis, cujus rectangulum $\overline{n + (f + g).n} = MN$, & facto $n = N$ habetur

tur æquatio linearis $n + (f + g) = M$ Syſtematis baſis variabilis, ex cujus variabilium producto oritur æquatio ſecundæ dimenſionis ad Syſtema baſis variabilis pertinens, in qua facta n minima $= 0$, fit $M = f + g$ item minima; & differentia $M - N = f + g = a$, ſive data. Æquatio hæc pertinet ad æquationem generalem (11.[am]) §. 52. *Cap.* V. antecedentis, quæ eſt

$$MN = \overline{\left\{\frac{M-N}{2}\right\} + \left\{\frac{M-N}{2}\right\}} + N.N,$$ quæque proinde eodem modo tractanda erit, quem illic docuimus. Sumatur nunc productum alterum ortum a multiplicatione factorum $f - n = M$, $g - n = N$, qui ſinguli ad diverſam æquationem linearem Syſtematis baſis datæ pertinent, dummodo n in prima non excedat valorem f, in ſecunda g. Productum hujuſmodi erit

$$fg \begin{matrix} + f.(-n) \\ + g.(-n) \end{matrix} + (-n).(-n) = MN$$ (poſita eadem variabili n).

In hac vero poſita n minima zero æquali, productum fg fit maximum, ut patet ex æquationibus linearibus; in ceteris igitur caſibus MN ſemper minor fg; ac proinde in caſibus mediis $MN = fg - MN$. Ut vero in æquatione propoſita utraque membra poſitiva fiant, ſic efferenda eſt $fg - MN$

$= \overline{(f+g) - n.n}$: ſed $fg - MN = MN$, ergo $MN = \overline{(f+g) - n.n}$; & $N = n$, $M = (f+g) - n$, & $M + N = f + g = a$; quæ eſt æquatio linearis Syſtematis baſis datæ, quæ continetur in formula generali (7.[a])

§. 51. *Cap.* V. antecedentis, $MN = \overline{\left\{\frac{M+N}{2}\right\} + \left\{\frac{M+N}{2}\right\} - n.n}$;

cui applicentur ea omnia, quæ de hac generali Capite citato diximus.

§. *6.* Ex demonſtratis eruitur formulam Auctoris, quam §. 15. zero æqualem ponit, revera eſſe $xx \begin{matrix} + ax \\ + bx \end{matrix} + ab = MN$; cum enim termini omnes ſigno poſitivo afficiantur, pertinet ad Syſtema baſis variabilis, nec fieri poteſt ut zero æqualis ſit: minimus enim valor, ad quem deprimi poteſt MN, cui comparatur, eſt quando $x = 0$, atque ideo minimus valor producti MN erit ab, ſi hoc ut productum datum duorum factorum a & b ſumatur. Erit igitur univerſim æquatio Auctoris $xx \begin{matrix} + ax \\ + bx \end{matrix} + ab = MN$, ſed $MN = ab + mn$, quia in extremo minimo limite MN non poteſt eſſe minus producto ab: ergo poſito $MN = 0$, erit $ab = 0 - mn$, quod in æquatione ſuperiori ſubſtitutum pro ab dabit æquationem $xx \begin{matrix} + ax \\ + bx \end{matrix} - MN = 0$, ut revera §. ſuperiori mea Methodus docet. Non poteſt igitur æquatio Auctoris §. 15. cum veritate conciliari, & fieri zero, niſi rectangulum conſtans ab in variabile negativum $- MN$ tranſmutetur. Quod attinet ad alteram §. antecedentis, quæ pertinet ad Syſtema baſis datæ, ſi ſymbolis Auctoris exprimatur, erit

$(-x)$

$(-x).(-x)\begin{matrix}+(-x).a\\+(-x).b\end{matrix}+ab=MN$, in qua cum ſit MN maximum, quando x minima $=0$, erit in caſibus mediis $MN=ab-mn$; donec facto $MN=0$, ſit $ab=mn$; ergo poſito loco ab rectangulo variabili mn, erit $(-x).(-x)\begin{matrix}+(-x).a\\+(-x).b\end{matrix}+mn=0$, vel $-\overline{.a+b-x}.x+mn=0$, ſive $mn=\overline{a+b-x}.x$. In neutro igitur Syſtemate poteſt formula Auctoris æqualis zero cum veritate congruere, niſi ab ſit productum variabile MN applicatum ex eadem parte formulæ primæ Syſtematis baſis variabilis cum ſigno negativo, cum poſitivo formulæ Syſtematis baſis datæ: in primo enim caſu formula eſt poſitiva; ergo MN debet eſſe negativum: in ſecundo formula eſt negativa; ergo MN ſit poſitivum oportet, ut utraque zero æqualis eſſe poſſit, prima in limite minimo, ſecunda in limite maximo. Hinc ſi hujuſmodi æquationes inter ſe comparentur, exſurget poſitivum æquale negativo; quæ mire conſentiunt cum iis, quæ diximus *Cap.* IV. hujus *Libri*, in quo, quemadmodum hæ æquationes intelligendæ ſint & tractandæ, docuimus.

§. 7. Hoc ſemel intellecto illud maximi momenti conſequitur, quod ſcilicet in æquationibus affectis ſecundæ dimenſionis more communi elatis, quæ zero æquales ſemper fiunt, tantum abeſt, ut illud quod dicitur homogeneum comparationis ſit natura ſua datum, quemadmodum ſemper ſupponitur, ut revera ſemper tamquam variabile ſumendum ſit, determinandum quidem arbitrio, ſed inter limites Syſtematis, cui applicatur, atque illius naturæ, quam requirit formulæ transformatio, ut docet *Caput* V. antecedens. Quare ſi ultra limites Syſtematis valores datos producto MN tribuamus, inciditur in imaginarium, ſed cur & quomodo vitandum ſit, quæ diximus oſtendunt, & innuunt *Prop.* (9.ª), (19.ª) & (22.ª) *Capit.* IV. hujus *Libri*. Hoc vero conſtituto conſequitur & alterum novum, ſcilicet æquationes ſecundæ dimenſionis, de quibus agit methodus nota, non gigni a producto duorum factorum ex. gr. $x+a$, $x+b$ (ut hactenus male creditum fuit), ſive a producto duarum æquationum linearium, quæ ſint inter ſe diverſæ, ſed ab una eademque æquatione lineari ortum ducere. Prima enim erit $\overline{x+a+b}.x=M.N$, & facta, ut docui, N minore $=x$, erit $N+a+b=M$ æquatio linearis Syſtematis baſis variabilis, & $M-N=a+b$ differentia data: ſecunda $MN=\overline{a+b-x}.x$, & facta $N=x$, $M=a+b-x$ & $M+N=a+b$ æquatio linearis Syſtematis baſis datæ, cujus variabilium ſumma data: utriuſque vero productum non eſt niſi productum duarum variabilium, quæ in eadem æquatione lineari continentur. Quare ex ipſa geneſi æquationum ſecundæ dimenſionis, quæ dicuntur affectæ, patet eam indeterminationem in his ineſſe debere, quam habent lineares, a quibus proficiſcuntur, ut initio ſtatim §. *6. Capitis* I. *Libri* II. demonſtravi, ac Capite ſuperiori & præcipue §. 57: proindeque hujuſmodi æquationes non determinatæ,

ſed

ſed limitis dicendæ ſunt, quia intra limites proprii Syſtematis infinitis valoribus datis affici poſſunt, ac infinitis modis determinari.

§. 8. Hîc antequam progredior præſtat animadvertere (quod inobſervatum Analyſim implicavit) quomodo ſcilicet intelligenda ſit æquatio ex. gr. $ab = MN$. Hactenus ſemper rectangulum variabile determinatum fuit a conſtanti ab; ſed numquam datum ab tamquam indeterminatum a variabili M N: hoc eſt pro M N in Analyſi communi ſumitur quidem ab datum; ſed numquam pro dato ab ſubſtitutum vides variabile M N: & tamen §. antecedens & quæ diximus *Prop.* XIV. *Capitis* I. & III. hujus *Libri* de permutatione variabilium in datas, ac datarum in variabiles, utilitatem atque neceſſitatem hujuſce duplicis permutationis ſatis aperte declarant. Hoc vero duobus modis, contingere poſſe *Capite* ſuperiori demonſtravimus: vel enim $(ab)^{\frac{2}{2}}$ datum ut quadratum, eſt incognitum ſi tamquam rectangulum conſideres, & viceverſa; & tunc $(ab)^{\frac{2}{2}} = MN$, vel $a.b = M^2$: in primo caſu dato quadrato quæritur rectangulum æquale huic quadrato, atque ideo ut rectangulum eſt ignotum, ideoque ſumendum eſt M N: in ſecundo caſu factores a & b rectanguli dati ſunt cogniti, & tunc quæritur quadratum, quod æquale ſit hujuſmodi rectangulo; ſumendum eſt igitur pro $a.b$ quadratum ignotum M^2: ut oſtendunt formulæ & conſecutiones Capitis ſuperioris, quæ determinatæ ſunt, ut ſunt illæ §§. *61*, & *62*. Secundo vero modo M N poteſt eſſe incognitum & quoad valorem, & quoad naturam; ſed poſito quadrato indeterminato tamquam dato quæritur quadratum, vel viceverſa poſito quadrato indeterminato quæritur rectangulum huic æquale: hoc modo omnia ſunt indeterminata, & formulæ quidem in omnibus ſunt indeterminatæ, & abſolute generales, ſed pro varia forma, qua donantur, ad unum potius, quam ad alterum Syſtema indeterminatum quidem quoad valorem, ſed non quoad naturam determinatur, ut oſtendit Methodus a me adhibita *Capite* antecedenti a §. 50 uſque ad 58, cujus formulæ omnes nulla coſtanti & data definiuntur, ſed ad unum, vel ad alterum Syſtema determinantur, aptandæ pro re nata alterutri, prout baſis data $= a$ requirit. Ab hac abſoluta indeterminata methodo, cujus non niſi ſpecimen aliquod, neque quidem, ut credo, inelegans loco citato exhibuimus, majora ac ſublimiora ſuo loco eruemus.

§. *9*. Ex dictis illud etiam novum & apprime neceſſarium conſequitur, æquationes ſcilicet ſecundæ dimenſionis, quæ dicuntur affectæ, cum omnes ab alterutra ex æquationibus formulis indeterminatis comprehendantur

$$MN = \overline{\left(\frac{f+g}{2}\right) + \left(\frac{f+g}{2}\right) - n.n}\ \text{S. A}; \quad MN = \overline{\left(\frac{f+g}{2}\right) + \left(\frac{f+g}{2}\right) + n.n}\ \text{S. Y.}$$

infinitis radicibus homologis binis & binis ſumptis ſingulas præditas eſſe: ideoque ſtatuendum (quod innueram *Cap.* I. *Libri* hujus §. 2.) quamcumque æquationem ſecundæ dimenſionis, prout exhibetur a calculo communi, infinitis radicibus conſtare poſſe ac debere, dummodo illæ binæ & binæ ſumantur, quæ valori natura ſua indeterminato M N, & arbitrio determinato conveniunt: quod

a me

a me alias dictum tamquam immane abſurdum riſu & ſtomacho exceptum fuerat. Hinc non niſi in limite extremo una ex radicibus fieri poteſt zero, quando altera in Syſtemate baſis datæ fit maxima, vel in Syſtemate baſis variabilis fit minima: in ceteris caſibus ambæ neceſſario ſunt finitæ, ſi excipias caſum in limite extremo maximorum Syſtematis baſis variabilis, in quo ambæ infinitę fiunt, quę tamen eadem, qua in ceteris caſibus, quantitate data differunt. Ut profecto mirandum ſit univerſim ſtatutum fuiſſe, & communi conſenſu probatum in ęquationibus ſecundę dimenſionis, quę more communi ęquales fiunt zero, unam ex radicibus neceſſario fieri zero, ac hujuſmodi ęquationes nihil aliud eſſe (ut definit Auctor §. 15.) *niſi productum, quod eſt æquale zero, quia unus, aut omnes factores ſunt zero.* Profecto formulę ſuperiores utriuſque Syſtematis erunt zero, ſi hoc modo efferantur $MN - \overline{\left(\frac{f+g}{2}\right) + \left(\frac{f+g}{2}\right)} - n.n = o$ S.A;

$MN - \overline{\left(\frac{f+g}{2}\right) + \left(\frac{f+g}{2}\right)} + n.n = o$ S.Y.; licet radices homologæ infinitis modis quoad valorem poſſint variare, dummodo primum membrum MN ſit ſemper æquale alteri membro: quodcumque enim productum a ſe ipſo ſubtractum ſemper æquale eſt zero. En igitur ſingulæ ęquationes factę zero, quin ulla, aut ambę radices, ut ait Auctor, zero ſint.

§. 10. Si vero cauſſam communis hujuſce erroris inveſtigare velimus, noverimus hanc repetendam eſſe a falſa notione, quę affigitur producto MN, quod ex demonſtratis nihil aliud eſt niſi *productum duarum variabilium, quæ ſimul unam eamdemque æquationem linearem Syſtematis baſis datæ, vel baſis variabilis conſtituunt;* ut §. 6. oſtendimus. Qua definitione intelligitur, quemadmodum x intra limites Syſtematis, in quo eſt, infinite variare poteſt, ita variare poſſe atque debere M & N, atque ideo productum MN variabile eſſe, ut eſt variabile alterum membrum, cui comparatur. Hęc eſt vera notio, & legitimum munus producto MN demandatum, donec ęquatio ſuppoſita rectangularis repręſentat rectangulum duarum variabilium ejuſdem linearis ęquationis alterutrius Syſtematis. Hujuſmodi vero notio legitime non poteſt amplius huic producto MN applicari, ſi ſemper ipſum (ut vulgo fit) tamquam conſtans & datum ſumatur, utpote productum duarum datarum ad duas diverſas ęquationes lineares pertinentium, ex quibus producitur vulgo ęquatio ſecundę dimenſionis. Verum ſumpto hoc tamquam conſtanti in rectangulari ęquatione Auctoris $xx \begin{smallmatrix} +ax \\ +bx \end{smallmatrix} + ab = o$,

ęquatio hęc nequit fieri zero, niſi termini omnes per zero multiplicentur. Nam cum termini omnes in ęquatione poſitivi ſint, nequit alio modo hujuſmodi productum eſſe zero: minimus enim valor, ad quem deprimi poteſt x, eſt zero: cum factores $x + a = m$, $x + b = m$ vulgo ponantur æquationem propoſitam conſtituere; qui factores cum pertineant ſinguli ad diverſam ęquationem linearem Syſtematis baſis variabilis, in ſingulis x non poſſe minorem eſſe zero to-

toto hoc Opere demonſtravimus. Ex male ſtatuta itaque geneſi ęquationum ſecundę dimenſionis profluit non minus falſa notio homogenei comparationis, quam falſiſſima communis opinio, qua ſtatuitur in ęquatione ſuperiori (ut verbis Auctoris §. 15. citati utar) *neceſſario unum ſaltem ex factoribus* $x+a$, $x+b$, *quicumque tandem ſit, zero æquari*. Unde infert, illum eſſe valorem x, *qui loco* x *poſitus in æquatione efficit ut termini omnes elidantur, & illum eſſe æquationis factorem, per quem perfecte dividi æquatio poterit*.

§. 11. Verum in hac ipſa male explorata ſuppoſitione homogeneum comparationis conſtans eſſe non poſſe nemo non videt. Nam poſita x minima zero ęquali, ęquatio propoſita non poteſt eſſe zero, quin a vel b in producto ab ſit & ipſa zero; atque ideo unus, vel alter ex factoribus linearibus nullus ſit; non quia $x+a$, vel $x+b$, manente a, vel b data, ſit nullus, ſed quia a vel b vere nulla ſit (quod diligenter eſt diſtinguendum). Nam ęquatio propoſita ut ad nihilum redigatur, debet eſſe $xx\begin{matrix}+ax\\+bx\end{matrix}+ab$ (1.ª) $= xx\begin{matrix}+ox\\+bx\end{matrix}+ob$

$=(ox).(ox)\begin{matrix}+o.(ox)\\+b(ox)\end{matrix}+ob=omn$; vel (2.ª) $xx\begin{matrix}+ax\\+ox\end{matrix}+ao$

$=(ox).(ox\begin{matrix}+ax\\+ox\end{matrix}+ao=om.n$: & ex (1.ª) oritur ęquatio (3.ª) $(ox).(ox)+b(ox)=om.n=om.b$ limitis minimi, in qua $m=o$, $n=b$ minima; & ęquatio media $xx+bx=mn$ orta ab ęquatione lineari Syſtematis baſis variabilis $x+b=m$; ex (2.ª) vero oritur (4.ª) $(ox).(ox)+a(ox)=om.n=om(a)$, m minima $=o$, & n minima $=a$; & æquatio media $xx+ax=mn$ genita ab ęquatione lineari Syſtematis baſis variabilis $x+a=m$. Animadvertas nos, facta $x=o$ ſumpſiſſe ęquationem $xx\begin{matrix}+ax\\+ox\end{matrix}=o.mn$, $om.n$ ſcilicet ſigno poſitivo affecto, quia ex §. 6. vera ęquatio eſt $xx\begin{matrix}+ox\\+bx\end{matrix}=MN$; atque ideo facta a, vel $b=o$, ęquatio $xx+ax=(oM)N$, vel $xx+bx=(oN)M$. Ex quibus evidenter eruitur non poſſe veram eſſe doctrinam communem, niſi factor $x+a$, vel $x+b$, qui zero ponitur, fiat zero, facta zero a, vel b data; atque ideo enaſcatur æquatio ſecundę dimenſionis limitis minimi Syſtematis baſis variabilis, orta a ſola lineari $x+b=m$, vel $x+a=m$, quę univerſim ſit $xx+bx=mn$, vel $xx+ax=mn$, in quibus ſingulis illud, quod dicitur *homogeneum comparationis* fit variabile. Methodus igitur nota non poteſt eſſe legitima, niſi a vel b in factore $x+a$, vel $x+b$ ſit nulla (quo in caſu ſit nullus factor): at tunc ęquatio ſecundę dimenſionis mutatur in $xx+bx-mn=o$, vel $xx+ax-mn=o$. Hinc concluſum fuit (ut ait Auctor §. 16.) quod licet *ex eo quod æquatio ſit æqualis zero, rectiſſime ſequatur aliquem factorum zero æqualem eſſe, non tamen erui poteſt quinam ſit hujuſmodi factor:* hoc eſt erui non poteſt utrum hac ſuppoſitione transferamur

ad

ad æquationem limitis $xx + bx = 0mn$, vel $xx + ax = 0mn$, in quarum ſingulis ambę radices ſunt minimę, una zero, altera a, vel b; & hinc ad mediam $xx + bx = mn$, vel ad $xx + ax = mn$, quarum neutra eſt productum duorum factorum $x+a, x+b$; ut ſuppoſitum fuerat, ſed $\overline{x+0}\,.\,\overline{x+b} = mn$, vel $\overline{x+a}\,.\,\overline{x+0} = mn$, ſive limitis $xx + bx = 0mn, xx + ax = 0mn$.

§. 12. Videamus nunc quid accidat formulæ $(-x).(-x)\begin{matrix}+a.(-x)\\+b.(-x)\end{matrix}+ab = 0$ ortæ a producto factorum $x-a$, $x-b$, communem methodum ſequendo; quæ tamen quomodo efferenda ſit §. *6.* docuimus. Hæc conſiderata ſemper ut rectangularis (ſi fiat more communi $-x.-x = xx$) erit $xx\begin{matrix}+a(-x)\\+b(-x)\end{matrix}+ab = 0$. Hæc, tam poſita $x = a$, quam $x = b$, fit zero, ſive maxima in uno, vel altero factore, in ceteris caſibus non poteſt fieri zero. Ut vero univerſim æquatio hæc ſit zero, neceſſe eſt & hîc ut unus, vel alter factor a, vel b ſit zero, facta $x = 0$. Æquatio itaque erit in hac ſuppoſitione $xx\begin{matrix}+ax\\+bx\end{matrix}+ab$ $= xx\begin{matrix}+0\,(-x)\\+b\,(-x)\end{matrix}+0b = (0x).(0x)\begin{matrix}+0\,(-x)\\+b\,(-x)\end{matrix}+0b$ $= (1.^a)\,(0x).(0x) + b\,(-0x) = -0m.n = -0m.b$; vel $xx\begin{matrix}+a(-x)\\+0(-x)\end{matrix}+a.0 = (0x).(0x)\begin{matrix}+a(-x)\\+0(-x)\end{matrix}+0a = (2.^a)\,(0x).(0x)+a.(-0x)$ $= -0m.n = -0m.a$: ex $(1.^a)$ limitis $(0x).(0x) + b\,(0x)$ $= -0m.n$, $-(0x) + b = n$, & media linearis $-x + b = n$, ſive $b = x + n$, & media $xx + b.(-x) = -mn$, ſive $\overline{b-x}.x = mn$ Syſtematis baſis datæ; ex $(2.^a)$ limitis $(0x).(0x) + a\,(-0x) = -0mn$, $-0x + a = n$, media S. A $a = n + x$, & compoſita $x^2 - ax = -mn$, ſive $\overline{a-x}.x = mn$ S. A: poſita vero $(1.^a)$ limitis $(-0x).(-0x)+b(-0x)$ $= (-0m).n$, $-0x + b = n$, idem obtineremus; quod oſtendit æquationem revera ſic efferendam eſſe $mn -.\overline{a-x}.x = 0$ in Syſtemate baſis datæ, ut vidimus §. *6.* In utroque igitur Syſtemate tam baſis datæ, quam baſis variabilis non poteſt vera eſſe doctrina communis, quæ docet in æquationibus ſecundæ dimenſionis unam vel alteram ex radicibus inæqualibus æquationis eſſe zero æqualem, ambas non poſſe, niſi ponatur homogeneum comparationis ab æquale zero, uno vel altero factore a, vel b evaneſcente: tantum abeſt ut hoc productum MN ſemper idem & datum $= ab$ in æquatione perſeveret. Ex hac vero doctrina illud conſequitur, æquationes ſcilicet omnes ſecundi gradus una tantum

radice finita conſtare poſſe, altera ſemper zero: proindeque æquationes omnes ſecundæ dimenſionis ad lineares reduci poſſe, diviſis per zero terminis omnibus: quod tamen & veritati repugnat (niſi æquatio ſic affecta æquatio limitis ſtatuatur, at tunc ab ſit variabile) & ipſi communi methodo, ut inferius §. 17. patebit.

§. 13. Hoc quod dico ita verum eſt, ut ex ipſa communi doctrina facile cognoſci potuerit. Ut enim clariſſimus Auctor rationem reddat, cur neſcire poſſimus quinam ex factoribus, quorum alterutrum neceſſario dixerat fieri zero, ſit zero, ſubdit §. 16. „ Hujus autem rei ratio manifeſta eſt hæc, quia æquatio „ duas (idem dicendum ſi plures quam duas) exhibens diverſas radices, ſeu in„ cognitæ valores diverſos, indifferens quidem eſt de ſe, & poteſt per alteru„ trum verificari: at eodem tempore per utrumque verificari impoſſibile eſt o„ mnino, & abſurdum. „ At, ajo, cur eſt *impoſſibile & abſurdum?* Si enim æquationem ſecundæ dimenſionis ortam velis a producto ex. gr. $\overline{a-x}.\overline{b-x'}$ $= ab \begin{matrix} +a(-x') \\ +b(-x) \end{matrix} + (-x).(-x') = MN$, in qua ponatur $x = x' = a$, erit æquatio $\overline{a-a}.\overline{b-x'} = ab \begin{matrix} +a(-a) \\ +b(-a) \end{matrix} + (-a).(-a) = o.N$: & poſita $x = x' = b$, erit $\overline{a-x}.\overline{b-b} = ab \begin{matrix} +a(-b) \\ +b(-b) \end{matrix} + (-b).(-b)$ $= M.o$; in quibus una, vel altera ſit zero, alterutra facta a, vel b: hinc ſtatuerunt unum, vel alterum fieri debere zero, ut æquatio compoſita fiat zero. At poſita $x = a$, & $x' = b$, æquatio ſe ſe offert $\overline{a-a}.\overline{b-b}$ $= ab \begin{matrix} +a(-b) \\ +b(-a) \end{matrix} + (-a).(-b) = o.o$; ergo eadem ratione, qua (uti ſupra diximus) contendunt unam vel alteram fieri poſſe zero, eadem, inquam, ex tertia manifeſte patet utramque eodem tempore fieri poſſe zero. Et ſane ſi factores $a - x$, $b - x'$ nullam inter ſe habent affinitatem, tam x unius poteſt eſſe $= a$, quam $x' = b$: non repugnat enim in æquationibus linearibus $a - x = m$, $b - x' = m$ utrumque x fieri maximum in proprio Syſtemate. Quam igitur repugnantiam prædicas, ob quam *impoſſibile* ſit *& abſurdum* in æquationibus ſecundæ dimenſionis utrumque factorem ſive radicem eodem tempore fieri zero, ſi a nulla alia, quam a ſuperiori, earum originem ducas? Aut alia igitur origo tribuenda eſt æquationibus ſecundæ dimenſionis, aut repudianda tamquam falſa doctrina communis. Videamus quid nos doceat noſtra Methodus. Revocatis æquationibus §. 9. meis ſymbolis expreſſis $MN = \overline{\frac{f+g}{2} + \frac{f+g}{2} - n}.n$ S. A,

MN

$MN = \overline{\frac{f+g}{2} + \frac{f+g}{2}} + n.n$ S. Y; & poſita N $= n = 0$, ex demonſtratis erit in utroque Syſtemate $M = f + g$ in Syſtemate baſis datæ maxima; minima in Syſtemate baſis variabilis: ergo luce clarius patet, facta una zero, & alteram eodem tempore fieri non poſſe zero: ergo hac tantum mea Methodo demonſtratur *impoſſibile eſſe omnino & abſurdum* utraſque fieri poſſe zero eodem tempore. Sed mea Methodus æquationum ſecundæ dimenſionis originem ducit a producto factorum ejuſdem æquationis linearis, in qua tantum variabiles communi vinculo colligatæ hanc, quam prædicant, relationem inter ſe habent; ergo ut ipſa doctrina communis locum habeat, quæ docet unam tantum radicem fieri poſſe zero, meam non communem æquationum ſecundæ dimenſionis originem amplectamur neceſſe eſt: hoc modo & æquatio fit continua atque una §. 4, & in limite quando una eſt zero, altera ſit finita oportet. Ex hoc tamen illud alterum neceſſario ſequitur, quod nolunt; ſcilicet, ſi hoc tantum evenit in limite, in caſibus mediis radices finitas infinitis modis variare poſſe valorem, atque ideo productum MN ſive ab non poſſe eſſe conſtans & determinatum.

§. 14. Ut vero manifeſta ſe ratio prodat, cur in communi methodo facta una, vel altera radice zero, ſive facta a, vel b æquali zero tranſitus fiat ab una ad alteram baſim, ſive æquationem linearem, animadverte id, quod in meis formulis eſt f, g, eſſe in communibus a, & b: ſumptæ enim legitimæ æquationes Methodi communis a me §. *6.* traditæ, & cum meis collatæ, erunt

$$MN = \left\{ \frac{\overline{\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}} - n.n}{\frac{f+g}{2} + \frac{f+g}{2} - n.n} \right\} S.A = \left\{ \frac{\overline{\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}} + n.n}{\frac{f+g}{2} + \frac{f+g}{2} + n.n} \right\} S.Y:$$

at ex mea methodo demonſtratum fuit ſummam $f + g = a$ eſſe ſemper conſtantem; ergo facta $g = 0$, erit $f = a$; & æquatio linearis ſemper eadem $M + N = f + g = f + g = a$, & hæc eſt vera ratio cur facta una zero, altera nequeat eſſe zero, ſed finita. In methodo vero communi facta a, vel $b = 0$, conſtans ſemper ſumitur & eadem altera b, vel a; ergo mutatur baſis, mutatur æquatio, & Syſtema: ac proinde quæ in mea methodo erat æquatio limitis ejuſdem æquationis linearis, atque ejuſdem æquationis ſecundæ dimenſionis, in methodo communi æquatio facta limitis fit diverſa, & ab una æquatione lineari & ſecundæ dimenſionis in alteram baſis b, vel a linearem & ſecundæ dimenſionis tranſmutatur. Conſecutiones quæ hinc deſcendunt maxime utiles in II.ª *Parte* eruentur. Hîc tantum ſatis ſit evidenter demonſtrare, non poſſe Methodum communem atque ejus placita cum veritate conciliari, niſi ad meam methodum confugiamus, ex qua tamen evincitur in methodo communi vera juncta falſis inter ſe commiſceri, ut quid verum, quid falſum ſit, niſi mea Methodus ſuppetias ferat, dignoſci non poſſit.

§. 15.

§. 15. Ex hactenus demonſtratis illud novum, & mirum conſequitur, tantum abeſſe ſcilicet ut geneſis æquationum ſecundæ dimenſionis repetenda ſit, ut uſuvenit, a duobus factoribus ſimplicibus inter ſe multiplicatis, ut æquationes ipſæ ortum ſuum ducant ab una eademque æquatione lineari, quæ duorum factorum ſimplicium ſit ſumma. Nimirum ſi factores ex. gr. ſimplices $n+f=m$, $n+g=m$ ſimul addantur, ut exſurgat æquatio compoſita linearis $n+n+f+g=m+m$, & hæc, per ea quæ dixi *Capite* IV. *Libri* I., poſita $f+g=a$ integræ, reducatur ad ſimplicem $n+0n+(f+g)=m+0m$, ſive $n+(f+g)=m$, vel $n+a=m$; erit æquatio hæc conflata ex duabus æquationibus linearibus Syſtematis baſis variabilis ea æquatio, cujus variabilium productum MN $=\overline{(f+g)+n}\,.\,n=-\overline{(f+g)+m}\,.\,m$ dabit æquationes ſecundæ dimenſionis homologas Syſtematis baſis variabilis, ut invenimus *Cap.* II. *Libri* hujus. Similiter ſi factores ſimplices fuiſſent $f-n=m$, $g-n=m$; erit æquatio linearis compoſita integra $(f+g)-(n+n)=m+m$, ſive $(f+g)=n+m$ æquatio linearis Syſtematis baſis datæ, & ejus variabilium productum M.N $=\overline{(f+g)-n}\,.\,n=\overline{f+g-m}\,.\,m$ æquationes homologæ ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis datæ *Cap.* I. hujus *Libri*. Quod ſi æquationes ſimplices fuiſſent $n-f=m$, $n-g=m$; earum ſumma erit $n-(f+g)=m$, & MN $=-\overline{(f+g)+n}\,.\,n=\overline{(f+g)+m}\,.\,m$; quæ ſunt æquationes ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis variabilis eædem ac primæ, facta variabilium permutatione. Hæc differunt tantum a communibus, quæ methodo nota a producto duorum factorum ſimplicium ſuperius deducuntur, in ultimo termino, qui ut datus æqualis *ab* ſumitur, & homogeneum comparationis appellatur, quod tamen cum veritate conciliari non poſſe ſupra oſtendimus. Quare impoſterum hæc regula in efformandis æquationibus ſecundæ dimenſionis compoſitis ex ſimplicibus erit perpetuo ſervanda: *ut ſcilicet addantur ſimul factores ſimplices lineares, & ex his efformetur æquatio linearis, cujus baſis data ſit ſumma cognitorum factorum ſimplicium, ſed una & integra*: ex hac deinde regulis traditis ad æquationem ſecundæ dimenſionis tranſitum fac, & invenies ea omnia, quæ docuimus *Cap.* V. *Libri* hujus §§. 50 & ſeqq., ad utrumque Syſtema, prout res juſſerit, præparata. Animadverte obiter quod ex ſola inſpectione æquationis (1.ª) §. 50. ejuſdem Capitis, quæ eſt $(MN)^{\frac{2}{2}}=MM$ $=\left(\frac{M+N}{2}\right)^2-\left(\frac{M-N}{2}\right)^2$, ſi ad quadraticam reducatur, oculis ipſis patet in imaginarium, niſi per methodi ſive loci geometrici errorem, non per Scientiæ ipſius impotentiam, aut defectum impingi poſſe. Nam in hac æquatione, extracta radice quadratica, erit

$$M=\sqrt{\left(\frac{M+N}{2}\right)^2-\left(\frac{M-N}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}-n^2}\ \text{S. A}=\sqrt{n^2-\frac{a^2}{4}}\ \text{S. Y.};$$

ſed

ſed in utroque Syſtemate ſemper M — N minor M + N, ergo & $\left(\frac{M-N}{2}\right)^2 < \left(\frac{M+N}{2}\right)^2$: at in Syſtemate baſis datæ $M + N = a$, $M - N = n$; & in Syſtemate baſis variabilis contra $M + N = n$, $M - N = a$: ergo patet in Syſtemate baſis datæ ſemper n^2 minus $\frac{a^2}{4}$, in Syſtemate vero baſis variabilis ſemper n^2 majus $\frac{a^2}{4}$. Hoc unum, ſi cetera deeſſent, quid ſit imaginarium, quomodo oriatur, & quomodo vitari poſſit manifeſte declarat; atque hinc omnia, quæ de imaginario in meis Opuſculis exaravi, in luce ampliſſima collocantur, quemadmodum in *Parte* II. hujus Operis fuſius explanare in animo eſt.

§. *16.* Ex his omnibus colligitur quam falſa atque fallax ſit definitio æquationum ſecundæ dimenſionis ab Auctore §. 15. tradita; quæ docet hujuſmodi æquationes nihil aliud eſſe, *niſi productum, quod eſt æquale zero, quia unus, aut omnes factores ſunt zero*. Sed ut magis hoc innoteſcat, fac conſideres, duplici modo quamcumque æquationem fieri poſſe zero. Primo modo, cum eadem quantitas ſub diverſis ſpeciebus repræſentari, ac diverſas formas ſubire poſſit; erit certe quidem hæc in primo membro poſita æqualis ſibi ipſi in altero membro collocatæ; ideoque ſi unum membrum ab altero ſubtrahatur, reliquum erit zero: ita in noſtro caſu facta ex. gr. $MN = (a + b + x).x$, erit $MN - (a + b + x).x = 0$. Modus hic aptari poteſt æquationibus quibuſcumque, ſi transferantur utraque membra ad unam æquationis partem, dummodo utraque identica ſumantur, uti docuimus *Cap.* VII. §. 8. *Libri* I. Secundus vero modus eſt ille, quo Auctor æquationem quamcumque dimenſionis ſecundæ fieri zero contendit: quando ſcilicet termini omnes ac ſinguli per zero multiplicati omnia & ſingula ad zero redigunt. Hic ſecundus modus tantum abeſt ut ſit neceſſarius æquationibus quibuſcumque ſecundæ dimenſionis, ut non niſi in limite ipſis, ſi lubet, aptari poſſit. Si enim in æquationibus ſecundæ dimenſionis factor unus eſt zero, quid obſtat quominus illud, quod eſt zero commune ſingulis terminis fiat aliquid, hoc eſt a limite extremo minimo ad caſus medios transferatur? Si enim verum eſt quod diximus, æquationem ſcilicet ſecundæ dimenſionis exprimi a formula

$$MN = \overline{\frac{f+g}{2} + \frac{f+g}{2} - n.n} \text{ S. A} = \overline{\frac{f+g}{2} + \frac{f+g}{2} + n.n} \text{ S.Y.};$$

unuſquiſque videt utraſque eſſe indeterminatas, & infinitis caſibus aptari poſſe, qui intra limites n zero minimum, & $\frac{f+g}{2}$ maximum in primo Syſtemate, intra n zero minimum, & infinitum maximum in Syſtemate ſecundo: atque ideo quamcumque æquationem ſecundæ dimenſionis infinitis radicibus præditam eſſe,

eſſe, quarum homologæ binæ & binæ ſumptæ æquationi propoſitæ ſatisfacient, ea nimirum ipſa ratione, qua contenditur factorem unum in æquationibus allatis eſſe zero. Hac igitur hypotheſi, in qua ſemper Analyſtæ omnes tacite conſenſerunt, arbitrio ad unum tantum peculiarem caſum limitis æquationem natura ſua indeterminatam obſtrinxerunt: atque hinc patet ratio, cur in æquationibus ſecundæ dimenſionis, ſi tamen ut rectangulares accipiantur, aſſeruerint non niſi unam tantum radicem fieri poſſe zero; nimirum in hac limitis ſuppoſitione ex natura utriuſque Syſtematis altera finita fiat maxima neceſſe eſt in Syſtemate baſis datæ, & hæc eadem in Syſtemate baſis variabilis tamquam minima ſumenda. Ergo ſi ex ipſa Analyſtarum communi ſententia ſunt limitis, poſſunt igitur ad infinitos caſus alios diverſos aptari, & infinitos valores diverſos radices ambæ ſubire. In hac tamen ſuppoſitione uſu recepta, non determinatur niſi una limitum natura, quæ quidem una convenit Syſtemati baſis datæ, in quo minima eſt æqualis zero, altera maxima finita. At Syſtemati baſis variabilis præter hunc limitem, intra quem utraque radix tam zero, quam finita eſt minima, alter limes neceſſario convenit, in quo utraque radix fit infinita, ut docuimus *Cap.* II. In æquatione igitur Auctoris ad normam redacta $xx\begin{matrix}+ax\\+bx\end{matrix} = mn$, facta x infinita, erit $(\infty x).(\infty x) + \overline{a+b}.\infty x = mn$; ſed $n = \infty$, ergo $\infty + a + b = m = \infty'$, & differentia $m - n = \infty' - \infty = a + b$, & in hoc altero limite æquatio $xx\begin{matrix}+ax\\+bx\end{matrix} = \infty.\infty'$ (de quo ſuo loco ex compoſito agemus). Limes hic ignotus adhuc, quin imo repudiato hoc infinito, inter abſurda amandatus, in cauſſa fuit cur in poſitivum æquale negativo methodus nota (non ego) inciderit, cum docet, facta $x = 0$, eſſe $x + (a+b) = 0$, & $x = -(a+b)$: in quo dupliciter errat, & cum ponit x poſitivam æqualem quantitati negativæ, & cum in propoſita æquatione utramque x diverſam ſumit, quam eſſe identicam oportere *Capita* I. & II. hujus *Libri* ſatis demonſtrarunt.

§. 17. Ex uno alter naſcitur error: methodus communis, quæ ſtatuit in æquatione ſecundæ dimenſionis unam ex radicibus ſemper fieri debere zero, quando ad inveniendas actu hujuſmodi radices accedit, quis crederet? ſemper promiſſis excidit; cum nulla umquam ex illis, quas exhibet, poſſit eſſe zero æqualis ea lege, *ut impoſſibile ſit omnino, & abſurdum* alteram eodem tempore eſſe nullam. Hoc quod temere prolatum quis crederet, ſic manifeſte oſtendo. Celeberrimus Auctor citatus, ut demonſtret §. 16. nos neſcire quinam ex factoribus fiat zero, ſubdit *ſi quum canonicæ æquationis factores ſint*

$x + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + aB}$, $x + \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + aB}$, *eorum alter erit zero, at quinam ille ſit hactenus ignotum eſt.* Ergo ex Auctoris ſententia unus, aut alter ex iſtis factor debet eſſe zero, quin alter poſſit eſſe. Ex duobus igitur modis,

modis, quibus §. antecedenti diximus quantitatem aliquam fieri poſſe zero, in noſtro caſu non niſi ſecundus opportunus eſt: oſtendimus enim §§. 11. & ſeqq. radicem, quam quærimus zero, non ſubtractione ejuſdem finitæ a ſe ipſa, ſed ipſam revera eſſe oportere zero; ut factor quæſitus non ſit ex. gr. $x - a = 0$ facta $x = a$; ſed $x - 0 = 0$, facta $a = 0$ (quam ſcimus quemcumque valorem ſuſcipere poſſe): hoc enim, & non alio modo §. 13. oſtendimus alteram fieri poſſe zero, ut altera nequeat. Et ſane ſumpta æquatione Syſtematis baſis variabilis $MN = \overline{a + b + n}.n$, in qua eſt $N = n$, & $M = a + b + n$; eruitur $N - n = 0$, & $M - (a + b + n) = 0$: quæ utraque eſt zero. Eam igitur radicem zero requirit methodus, quæ ſit $N = n$, facta $n = 0$; ex quo conſequitur impoſſibile eſſe & abſurdum alteram fieri zero, cum in hoc Syſtemate facta $N = n = 0$, altera minima M ſit æqualis quantitati finitæ $a + b$, atque ideo repugnat eodem tempore fieri zero. Porro hoc modo ſtatuta *nullitate* radicis, quam requirit methodus nota, ajo nullam ex radicibus ab Auctore traditis poſſe hac ratione fieri zero. Et ſane radices indicatæ eruuntur a ſolutione methodo communi peracta æquationis $x^2 + Ax = aB$, cum ſit

$x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + aB}$, in qua æquatione niſi fiat $aB = 0$, numquam x poterit eſſe zero: at methodus nota ſemper datum ac conſtans ſumit productum aB, quod proinde homogeneum comparationis appellat: igitur in methodo nota non poteſt haberi illa una radix zero, quam contendit eſſe neceſſariam, ne & altera fiat zero. Hoc vero, quod obtinere nequit methodus communis, ſponte exhibet mea Methodus; nam data hac ipſa æquatione Syſtematis

baſis variabilis ſic more meo elata $\overline{\frac{A}{2} + \frac{A}{2} + x}.x = aB$, & poſita $\frac{A}{2} + x = m$, ut oriatur $\overline{\frac{A}{2} + m}.\overline{m - \frac{A}{2}} = aB$, ac facto tranſitu ad quadrata $m^2 - \frac{A^2}{4} = (aB)^{\frac{2}{2}}$ erit $m^2 = (aB)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}$: ideoque $M^2 = \left((aB)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}\right) - \frac{A^2}{4}$: ac denuo ad rectangula facto tranſitu

$$(1.^{a})\ MN = \overline{\sqrt{(aB)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}}.\overline{\sqrt{(aB)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}}:$$ ſed

MN valore æquale eſt $(aB)^{\frac{2}{2}}$; ergo ut una ex radicibus fiat zero, hoc eſt ut M, vel N fiat zero, neceſſe eſt & ipſum aB ſit zero: & hoc modo obtinetur $MN = \overline{\sqrt{\frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}}.\overline{\sqrt{\frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}}$; in qua una aut altera M,

vel N eſt zero, altera minima in hoc Syſtemate $= \frac{A}{2} + \frac{A}{2}$: quod mirifice convenit cum veritate, & illud conſequitur, quod perperam Methodus communis requirit. Non eſt igitur mirum ſi Methodus communis cogatur aſſerere erui non poſſe *quinam ſit bujuſmodi factor*, ac confugiat *ad caſuum peculiarium circumſtantias, quas ſecum trabunt peculiaria problemata* &c., cum pateat ex hac methodo alterutram M, vel N fieri poſſe zero: quo modo ab uno ad alterum Hyperbolæ ramum, ab uno ad alterum axem nos deducere §§. 46, & ſeqq. *Cap.* V. hujus *Libri* demonſtrant.

§. 18. Verum hoc ipſo, quod in uno hoc peculiari caſu una ſit zero, altera minima $= \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A$ in Syſtemate baſis variabilis æquationis propoſitæ, luce clarius patet, non poſſe univerſim veram eſſe communis Methodi doctrinam, quæ docet ſemper radicem unam zero æqualem eſſe oportere; cum id conſequi nequeat niſi in caſu, in quo productum aB æquationis, quod ſumitur conſtans, ſit zero; qui eſt limes minimus hujuſce Syſtematis. Quod ſi aB ſit quodcumque productum majus $\frac{A^2}{4}$, radices æquationis omnes ſemper erunt finitæ, donec ad limitem maximum perventæ fiant ambæ infinitæ: eritque æquatio $(aB)^{\frac{2}{2}} = MN = \left((aB)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}\right) - \frac{A^2}{4}$, atque ideo radix una M, vel $N = \sqrt{(aB)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}$, altera N, vel $M = \sqrt{(aB)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}$, quarum quidem certe nulla neceſſario zero eſt. Doctrina igitur communis quæ quod in uno peculiari caſu limitis contingit, ad omnes univerſim traducit, eo errat modo, ac ſi diceret productum $xx + Ax$ ſemper neceſſario eſſe zero, & æquationem univerſim $xx + Ax = 0NM$. Quæ tamen non eſt niſi limitis minimi, in quo caſu facta $x = 0N$ fit $0x + A = M$ (non ut ſit $x = -A$), & æquatio generalis $x + A = M$, ex qua oritur illa ſecundæ dimenſionis $xx + Ax = MN$ ab Auctore propoſita; altera huic homologa ex mea methodo $MN = \overline{M - A}.M = xx - Ax$. Univerſim igitur, excluſis *caſuum peculiarium circumſtantiis*, ſtatuendum eſt, æquationes quaſcumque ſecundæ dimenſionis conſiderari poſſe tamquam rectangulares, & quamcumque æquationem dividi poſſe in duas radices inæquales finitas, ita tamen ut in Syſtemate baſis datæ facta una, vel altera minima zero æquali, altera ſit maxima æqualis A: ac idem contingere poſſe in caſu limitis minimi æquationis Syſtematis baſis variabilis, in quo Syſtemate tamen, quæ vicem maximæ gerebat in altero baſis datæ, eadem ſit minima in hoc Syſtemate baſis variabilis. Huic tamen limiti minimo in hoc Syſtemate alter maximus accedit, in quo radices ambæ fiunt infinitæ, hac tamen conditione, ut ſemper differant inter ſe quantitate data A. Quare in æquatione ab Auctore propoſita $xx + Ax = MN$, limes maximus dabit $xx + Ax = (\infty M).(\infty N)$ & $x = \infty N = \infty x$, &

& $\infty x + A = \infty M$, ex qua $\infty M - \infty x = M - N = A$. In hoc igitur Syſtemate æquationi (1.ª) §. antecedentis loco producti M N, ſive a B aptari poſſunt valores omnes, qui continentur intra limites $(o)^2$ & $(\infty)^2$, in quorum primo M, vel $N = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A$ minima. Quod ſi velimus M minorem A, tunc ope formulæ homologæ communis tam Syſtematis baſis datæ, quam baſis variabilis $\overline{M - A}.M = xx - Ax$ tranſitus fiat ad Syſtema bans datæ $Ax - xx = MN$ (ut docui): ex qua *Cap.* V. hujus *Libri* univerſim deduximus æquationem rectangularem

$$MN = \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}\right), \; \& \; M = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}},$$

$N = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}}$, cui aptari poſſunt loco M N vel a B valores omnes intra $(o)^2$ & $\frac{A^2}{4}$; quibus prætergreſſis, iterum fiat tranſitus ad æquationem §. ſuperioris. Hoc modo mutua utriuſque Syſtematis communicatione valores omnes, qui dari poſſunt, producto a B arbitrio ſumpto applicari poſſunt, quin ulla in radicibus & formulis *imaginarietas* occurrat: ut toto hoc Opere explicavimus. In quo ergo revera deficit Methodus vulgo uſurpata?

§. 19. En ſenſim nos eo uſque deducti, ut ipſam ſolutionem, quam unam tradit Methodus communis, æquationum ſecundæ dimenſionis diligentius excutiamus neceſſe ſit. Clariſſimus, quem ſequimur, Auctor æquationes omnes completas ſecundi gradus hac generali formula §. 8. ejuſdem Capitis citati definit $x^2 + Ax + aB = o$ „ in qua (ait) cum x^2 ſit quadratum x, Ax duplum „ rectangulum $\frac{Ax}{2}$, eſſet $x + \frac{A}{2}$ radix quadrata quantitatis $x^2 + Ax + aB$, „ ſi aB eſſet quadratum quantitatis $\frac{A}{2}$: at cum non ſit, ideo diverſa erit „ quantitas $x^2 + Ax + aB$ a quadrato $x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}$, ſed differentia „ omnis erit in ultimis terminis cognitis „. Hiſce poſitis, communiorem methodum, ut ait, ſequutus ſic §. 10. ſolutionem omnium æquationum completarum ſecundæ dimenſionis inſtituit. „ Formulæ generali $x^2 + Ax = - aB$ „ addatur in parte utraque $\frac{A^2}{4}$, ideſt quadratum dimidii coeficientis termini ſe„ cundi, quo fiet ut primum membrum æquationis ſit quadratum perfectum: „ erit igitur $x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{4} - aB$. Nunc ſi extrahatur radix qua„ drata „ habemus $x + \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$, & $x = - \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$:

 „ has

„ has eaſdem ex methodo ſuperiori §., quam tradiderat inveniri „ ait, quam tamen, cum in idem collimet, omittamus: ut vere dicendum ſit hanc unam in ſolvendis æquationibus ſecundæ dimenſionis a Methodo communi uſurpari. Quare methodus nota initium ſuæ ſolutionis ſemper ſumit ab æquationibus quadraticis duplo rectangulo affectis, quæ non niſi unam tantum radicem continent, ut inde ad rectangulares ex duabus radicibus diverſis præditas ſolvendas accedat: quam methodum *Cap.* IV. & V. §§. 13. & ſeqq. adhibuimus.

§. 20. Verum patet primum formulam $x^2 + \frac{2Ax}{2} + aB$ nullo modo æquari poſſe zero, ut Auctor vult, niſi & ipſa A ſit zero. Cum enim per ea quæ diximus *Cap.* VI., & VII. *Libri* I. ac *Cap.* I. & II. hujus *Libri* in æquatione lineari hujuſce æquationis Syſtematis baſis variabilis $n + A = m$, ſive $n + \frac{A}{2} = m - \frac{A}{2}$, m non poſſit eſſe minor $\frac{A}{2}$, ne poſitivum fiat æquale negativo, & cum *Cap.* III. §. 15, & toto *Cap.* IV. oſtenderimus $n^2 + 2n.\frac{A}{2} + \frac{A^2}{4} = m^2 + 2m\left(-\frac{A}{2}\right) + \left(-\frac{A}{2}\right)^2$; patet m & n non poſſe eſſe minores $\frac{A}{2}$. Et ſi hujuſmodi æquationes ut rectangulares ſumantur, erunt $nn + nA = mm - Am$; ſive $\overline{\frac{A}{2} + \frac{A}{2} + n}.n = \overline{-\frac{A}{2} - \frac{A}{2} + m}.m = MN$, quæ ſunt æquationes ſecundæ dimenſionis rectangulares homologæ ab eadem lineari Syſtematis baſis variabilis profectæ $n + A = m$, in quibus m non poſſe eſſe minorem $\frac{A}{2}$ *Caput* II. hujus *Libri* oſtendit. Poteſt tamen tam in rectangularibus, quam in quadraticis m a limite minimo $\frac{A}{2}$ progredi uſque ad infinitum. Hoc poſito in formula Auctoris $x^2 + 2x.\frac{A}{2} + aB$ productum aB erit æquale, vel minus, vel majus $\frac{A^2}{4}$, hoc eſt $aB = \frac{A^2}{4}$, vel $aB = \frac{A^2}{4} \pm ab$: in primo caſu $x^2 + 2x.\frac{A}{2} + \frac{A^2}{4} = M^2$, in ceteris caſibus $x^2 + 2x.\frac{A}{2} + \frac{A^2}{4} \pm ab = M^2 \pm ab$: ergo ſublato utrimque termino ab erit ſemper $x^2 + 2x.\frac{A}{4} + \frac{A^2}{4} = M^2$: quare licet aB majus, vel minus eſſet $\frac{A^2}{4}$; tamen æquatio ſemper ad quadrati-

cam

cam reduci poterit $x^2 + 2x.\frac{A}{2} + \frac{A^2}{4} = M^2$. Id vero evidenter eruitur ex §. 15, in quo demonſtratur factores ſimplices ſolitarios ad habendam ęquationem ſecundę dimenſionis non eſſe inter ſe multiplicandos, ſed ſimul addendos, ut ad linearem compoſitam primum deveniatur, ex qua deinde ad ęquationem compoſitam ſecundę dimenſionis vere unam tranſitus fiat. Verum ſi factores ſimplices ſunt $n + a$, $n + b$, oritur ęquatio compoſita linearis $n + a + b = m$, ex qua deduximus $\overline{\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} + n.n} = \overline{-\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(\frac{a+b}{2}\right) + m.m}$, atque ex his *Capp.* antecedentibus quadraticas $n^2 + 2n.\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = m^2 + 2m.-\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2$: ergo ſemper factores ſimplices in unum additi bifariam dividi poſſunt, ut ex his deinde ad ęquationem ſecundę dimenſionis tranſeamus. Si igitur multiplicatione factorum ſimplicium ad obtinendam ęquationem ſecundę dimenſionis (ut vulgo fit) uti velimus; nulla alia legitima nobis ſupereſt via, niſi ut ſumma factorum inęqualium dividatur bifariam, ac duos factores ſimplices ęquales inter ſe multiplicemus ad obtinendas ęquationes quadraticas homologas ſecundę dimenſionis quęſitas. Ita poſitis factoribus ſimplicibus

$$n + \left(\frac{a+b}{2}\right) = n + \frac{A}{2}, \quad \text{vel } m - \left(\frac{a+b}{2}\right) = m - \frac{A}{2}$$

$$n + \left(\frac{a+b}{2}\right) = n + \frac{A}{2} \qquad m - \left(\frac{a+b}{2}\right) = m - \frac{A}{2},$$

eorum quadrata dabunt

$n^2 + 2n.\frac{A}{2} + \frac{A^2}{4} = m^2 + 2m.\left(-\frac{A}{2}\right) + \left(-\frac{A}{2}\right)^2$: ex qua in *Tabula* *Cap.* IV: deduximus formulas omnes tam quadraticas, quam rectangulares ad utrumque Syſtema pertinentes. Ergo in æquatione propoſita $x^2 + Ax + aB = 0$ ſemper loco aB ponendum eſt $\frac{A^2}{4}$, neque univerſim zero comparanda æquatio, ſed M^2, ut æquatio legitima oriatur $x^2 + 2x\left(\pm\frac{A}{2}\right) + \left(\pm\frac{A}{2}\right)^2 = M^2$. Ex hac igitur una quadratica §. 56. derivavimus formulas omnes, apte diſ-

diſpoſitas atque præparatas ad utrumque Syſtema, prout $\frac{A^2}{4}$ majus vel minus n^2 ponatur.

§. 21. Rite igitur & recte Methodus vulgo uſurpata initium ſumit ſuæ ſolutionis a quadrato completo $x^2 + 2x.\frac{A}{2} + \frac{A^2}{4}$, hoc tamen male applicat & æquale ponit quantitati $\frac{A^2}{4} - aB$, cum qua nullo modo poteſt conſociari, poſito rectangulo aB dato, & æquatione univerſim $x^2 + Ax + aB = 0$. Hoc primum male ſtatuto ſequitur extractio radicis, quam Methodus nota eſſe vult $x + \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$, quæ & ipſa veritati opponitur, cum *Capite* IV. §. 7. oſtenderimus quadrati $x^2 + 2x.\frac{A}{2} + \frac{A^2}{4} = M^2$ radicem eſſe $\pm x \pm \frac{A}{2} = M$: nempe $+x \pm \frac{A}{2} = M$ in Syſtemate baſis variabilis, in quo x major $\frac{A}{2}$; $\frac{A}{2} \pm x = M$ in Syſtemate baſis datæ, quod requirit A majorem x. In primo enim æquatio quadratica $x^2 + 2x.\frac{A}{2} + \frac{A^2}{4} = x^2 + 2x.\left(-\frac{A}{2}\right) + \left(-\frac{A}{2}\right)^2$, ex qua eruuntur radices $x + \frac{A}{2} = M$, $x - \frac{A}{2} = N$ homologæ Syſtematis: in ſecundo $\frac{A^2}{4} + 2\frac{A}{2}(+x) + \left(+\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + 2\frac{A}{2}.(-x) + (-x)^2$, a qua proficiſcuntur radices $\frac{A}{2} + x = M$, $\frac{A}{2} - x = N$ homologæ Syſtematis baſis datæ. Ex iſtis igitur facto tranſitu ad rectangula, ut docuimus, oritur (I.^{a}) $MN = \overline{x + \frac{A}{2}}.\overline{x - \frac{A}{2}}$ S. Y., (II.^{a}) $MN = \overline{\frac{A}{2} + x}.\overline{\frac{A}{2} - x}$ S. A.: quæ ſi ad quadraticas reducantur dabunt (III.^{am}) $(MN)^{\frac{2}{2}} = x^2 - \frac{A^2}{4}$ S. Y., (IV.^{am}) $(MN)^{\frac{2}{2}} = \frac{A^2}{4} - x^2$ S. A.

Hęc

Hæc ad circulum diametri datę $\frac{A}{2}$, & chordarum homologarum x, $(MN)^{\frac{1}{2}}$; (III.ª) ad circulum diametri variabilis x, & chordarum homologarum $(MN)^{\frac{1}{2}}$ variabilis, & $\frac{A}{2}$ datæ, vel ad circulum radii dati $\frac{A}{2}$, tangentis $(MN)^{\frac{1}{2}}$, & x ſecantis. Ex (III.ª) eruitur $x = \sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}}$ S. Y., in qua tangens $(MN)^{\frac{1}{2}}$ a zero uſque ad infinitum procedit; ex (IV.ª) $x = \sqrt{\frac{A^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}}$ S. A., in qua chorda $(MN)^{\frac{1}{2}}$ a zero uſque ad $\frac{A}{2}$ progredi poteſt. Quare ſi loco x in (I.ª) ponatur ejus valor a (III.ª) quadratica inventus, & in (II.ª) ille, quem nobis præbet (IV.ª), ſe ſe exhibent æquationes rectangulares

$$\text{(V.ª)}\ MN = \sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2} \cdot \sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}\ \text{S. Y,}$$

$$\&\ MN = (MN)^{\frac{2}{2}}$$

$$\text{(VI.ª)}\ MN = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}} \cdot \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}}\ \text{S. A,}\ \&$$

$MN = (MN)^{\frac{2}{2}}$; in quibus oculis ipſis patet rectangulum MN æquale eſſe valore quadrato $(MN)^{\frac{2}{2}}$, atque eſſe utrumque variabile intra tamen limites, qui a Syſtemate quadratico reſpectivi Syſtematis præſcribuntur quadrato $(MN)^{\frac{2}{2}}$: atque ideo in (VI.ª) radices limitis minimi homologæ minimæ $MN = \sqrt{\frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2} \cdot \sqrt{\frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}$ S. Y una zero, altera dupla $= \frac{2A}{2}$; maximæ limitis maximi $MN = \sqrt{(\infty)^2 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2} \cdot \sqrt{(\infty)^2 + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}$, infinitæ: in (VI.ª) vero radices unius tantum limitis $MN = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4}} \cdot \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4}}$, una maxima $= 2\frac{A}{2}$, altera minima

=

$= 0$. (VI.ª) conſtruitur, & pertinet ad Circulum diametri duplæ $2 \cdot \frac{A}{2}$, (V.ª) vero pertinet ad Hyperbolam, atque ipſa conſtruitur ope diametri ejuſdem $\frac{2A}{2}$. In (V.ª) tandem ſumma $M + N$

$$= \sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}} + \sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}}$$ variabilis; & differentia $M-N$, $N-M$

$$= \frac{A}{2} + \frac{A}{2}$$ data. In (VI.ª) ſumma $M + N$

$$= \frac{A}{2} + \frac{A}{2},$$ differentia $M - N$, vel $N - M$

$$= \sqrt{\frac{A^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}}$$ variabilis. Quæ omnia compendio veluti facto cohærent cum his, quæ in toto hoc Opere ſenſim, & gradatim utpote in re nova, & communibus opinionibus contraria rigide demonſtrare conati fuimus.

§. 22. Vide tamen quantum diſtet ſolutio communis ab hac noſtra, ut ex earum comparatione cauſſam hujuſce diſcrepantiæ tandem cognoſcas. Methodus communis univerſim ſolutionem cujuſcumque æquationis ſecundæ dimenſionis utriuſque Syſtematis a formula quadratica & una $x^2 + 2x \cdot \frac{A}{2} + \frac{A^2}{4}$ Syſtematis baſis variabilis inchoat: docet enim ſemper quadratum incognitæ ſumendum eſſe a radice poſitiva x, & ab hac formula non niſi radicem $x + \frac{A}{2}$ extrahendam docet; cogitur igitur ad ambas radices inveniendas radicali $\sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$ duplum ſignum $\pm$ affigere, atque radices ambas valore diverſas uni eidemque x tribuere, ut faciat $x = -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$, $x = -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$. Hinc fit ut x, quæ in utroque Syſtemate debet eſſe ejuſdem valoris poſitivi, cum æquatio ſemper ad Syſtema baſis variabilis reducatur, facta hac termini dati $\frac{A}{2}$ tranſpoſitione in M, & N tranſmutetur, facta tamen negativa $-\frac{A}{2}$: quæ tamen x, facta hac tranſpoſitione, cum eadem ac antea ſumatur, fit $x = x$ $=$

$= -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - aB} = -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$; hinc $\sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$

$= -\sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$, ſive $1 = -1$, quam vitari non poſſe Methodo nota in Præfatione §§. 15, & 16 oſtendi. Deinde licet x hac ſolutione ad Syſtema baſis variabilis referatur, in quo differentia eſt data, ſumma vero incognita; tamen invenitur ſumma $x + x$, ſive $M + N = -\frac{A}{2} - \frac{A}{2}$ data, ſed negativa; differentia vero $x - x = M - N = \sqrt{\frac{A^2}{4} - aB} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$, quæ poſita aB variabili, ut debet eſſe, fit incognita. Adde, quod deterius eſt, radices haſce in hoc Syſtemate a Methodo nota exhibitas neceſſario eſſe imaginarias. Nam ſolutio hæc a nota Methodo concinnata deducitur ab æquatione ſecundæ dimenſionis Syſtematis baſis variabilis, in quo vidimus x ſemper majorem eſſe $\frac{A}{2}$: at cum hæc ſolutio exhibeat $(NN)^{\frac{2}{2}} = x^2$

$= \left(-\frac{A}{2}\right) - \left(\frac{A^2}{4} - (MN)^{\frac{2}{2}}\right) = (MN)^{\frac{2}{2}}$; erit & $(MN)^{\frac{2}{2}} = x^2$ majus $\frac{A^2}{4}$; atque ideo $\sqrt{\frac{A^2}{4} - MN)^{\frac{2}{2}}}$ ſemper imaginaria, nec realis niſi in limite minimo, in quo $(MN)^{\frac{2}{2}} = \frac{A^2}{4}$. In mea tamen Methodo hæc omnia ſemper vitantur: eſt enim x poſitiva $= \sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}}$ ejuſdem valoris in factoribus $x + \frac{A}{2}$, $x - \frac{A}{2}$, ac ſemper realis manente $(MN)^{\frac{2}{2}}$ intra limites Syſtematis $(0)^2$ & $(\infty)^2$: ſumma vero $M + N$

$= \sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}} + \sqrt{(MN)^{\frac{2}{2}} + \frac{A^2}{4}}$ incognita, & differentia data & poſitiva $M - N = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}$.

§. 23. Solutio tamen communis videtur convenire cum mea ſolutione Syſtematis

matis baſis datæ, ſi excipias ſignum negativum quantitati $\frac{A}{2}$ præfixum: quæ tamen communis ſolutio, ſi eruatur ab æquatione $x^2 - 2\frac{Ax}{2} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{4} - aB$, quæ exhibet $x = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$, in omnibus cum mea ſolutione adamuſſim congruere, & eamdem eſſe quiſque videt. Tamen non erit difficile cognoſcere & hîc methodum notam in veram ſolutionem ex male ſtatutis principiis forte fortuna incidere, dummodo animadvertatur quadratum $x^2 + 2x\left(-\frac{A}{2}\right) + \left(-\frac{A}{2}\right)^2$ Syſtematis baſis variabilis eamdem formam obtinere, ac quadratum $\frac{A^2}{4} + 2\frac{A}{2}(-x) + (-x)^2$ Syſtematis baſis datæ: ideoque ſoluta æquatione more communi in Syſtemate baſis variabilis invenitur $x - \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$, & $x = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$, in qua poſito $(MN)^{\frac{2}{2}}$ ſemper minori $\frac{A^2}{4}$, ut requirit Syſtema baſis datæ, omnia rite & ut mea tradit Methodus procedunt: quia in proprio, & vero Syſtemate ſumi debet eadem x & poſitiva & negativa $\Big($ cum ex mea methodo ſit $MN = \overline{\frac{A}{2} + x} . \overline{\frac{A}{2} - x}$, atque ideo $+x = \sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$, $-x = -\sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}\Big)$: in ſolutione communi tamen vitari nequit æquatio poſitivi & negativi. Verbo ſolutio communis peccat in eo, quod quamcumque æquationem ſecundæ dimenſionis ad Syſtema baſis variabilis refert, in quo ſemper x major $\frac{A}{2}$; ideoque in hac hypotheſi radices vulgaris Methodi ſunt ſemper imaginariæ, nec illæ, quas Syſtema baſis variabilis, in quo inventæ fuerunt, requirit. Hinc evidens ratio ſe prodit, cur quando in formulis ponitur aB majus $\frac{A^2}{4}$, radix ſit imaginaria: ut ex ipſo Analyſtarum teſtimonio ſatis evincatur in Syſtemate baſis variabilis deficere ſolutionem, quam tradunt, quam tamen ſemper ex Syſtemate baſis variabilis deductam volunt. Solutio hæc tamen communis convenit, & recte congruit cum Syſtemate baſis datæ, dummodo eruatur ab æquatione Syſtematis baſis varia-

variabilis $x^2 + 2x\left(-\frac{A}{2}\right) + \left(-\frac{A}{2}\right)^2$, forma eadem ac illa Syſtematis baſis datæ $\frac{A^2}{4} + 2\frac{A}{2}(-x) + (-x)^2$, in qua cum ſit $(MN)^{\frac{2}{2}}$ ſemper minus $\frac{A^2}{4}$, Methodus, quæ in uſu eſt, hac ſuppoſitione ope æquationis utrique Syſtemati forma communis, nos a Syſtemate baſis variabilis, in quo ſolutionem male inchoavimus, ad Syſtema proprium baſis datæ traducit, atque ad veram ſolutionem inſcios nos atque nolentes veluti per vim impellit. Arbitraria igitur eſt extractio radicis $x + \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$, & arte conciliata, ut conveniat radicibus Syſtematis baſis datæ $\frac{A}{2} + x$, $\frac{A}{2} - x$, quas non difficile fuit alia via cognoſcere: at hæc arbitraria ſigni $\pm$ radicali præfixi poſitio non recte convenit Syſtemati baſis variabilis, ſcilicet illi Syſtemati, ad quod unice in cujuſcumque æquationis ſolutione confugiunt, in quo & quantitates $\frac{A^2}{4}$, $(MN)^{\frac{2}{2}}$ ſub ſigno radicali contentæ ſigno poſitivo ambæ afficiendæ ſunt, & radicale ipſum ſigno poſitivo efferendum: cum hic factores ſint $x + \frac{A}{2}$, $x - \frac{A}{2}$.

§. 24. Hiſce declaratis patet etiam, quoties ſolutio æquationum ſecundæ dimenſionis a formula quadratica affecta initium ſumit (a qua ſemper methodus communis ſolutionem derivat, ut ex ipſo unius radicis quadrato in rectangularem formam converſo binos rectanguli factores, ſive radices obtineat), toties ſumendam eſſe æquationem quadraticam completam $x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} = M^2$, prout ortam ab æquatione lineari, cujus baſis data A ſit ſumma duorum factorum ſimplicium inæqualium, ut §. 15. præſcribit; vel, quod in idem recidit, ortam a producto duorum factorum æqualium $\overline{\pm x \pm \frac{A}{2}} . \overline{\pm x \pm \frac{A}{2}}$, ſive a radice in ſe ipſam multiplicata unius factoris $\pm x \pm \frac{A}{2}$, cujus quantitas data $\frac{A}{2}$ ſit ſemiſumma factorum inæqualium $a + b$, ut §. 20. præcipit. Hac igitur ratione æquatio Auctoris $x^2 + Ax + aB$ ita conformanda erit, ut vel fit univerſim $x^2 + 2x.\left(-\frac{A}{2}\right) + \left(-\frac{A}{2}\right)^2 = M^2$ S. Y., in quo x non

Yyy 2 poteſt

poteſt eſſe minor $\frac{A}{2}$; vel $\frac{A^2}{4} + 2\frac{A}{2}(-x) + (-x)^2 = M^2 S. A.$, in quo x a zero uſque ad maximum valorem $\frac{A}{2}$ progreditur (repudiato altero membro $\frac{A^2}{4} - aB$, cui perperam comparatum vidimus a Methodo communi quadratum illud completum). Verum cum §. 15. *Cap.* III. *Libri* hujus oſtenderit in utroque Syſtemate quadratum formæ ſuperioris numquam poſſe eſſe nullum ; numquam formula Auctoris ſive quadratum $x^2 \pm Ax + \frac{A^2}{4}$ poterit legitime zero comparari. In Syſtemate enim baſis variabilis minimus valor , ad quem deprimi poteſt formula quadratica $x^2 + 2x\left(-\frac{A}{2}\right) + \left(-\frac{A}{2}\right)^2$ eſt $\frac{4A^2}{4}$, quando x minima $= \frac{A}{2}$; in Syſtemate vero baſis datæ formula quadratica $\frac{A^2}{4} + \frac{2A}{2}(-x) + (-x)^2$ minima erit $= \frac{A^2}{4}$, quando $x = 0$, & maxima $= \frac{4A^2}{4}$, quando x maxima $= \frac{A}{2}$. Cum vero ſemper hactenus ab Analyſtis quadratum factoris $x - \frac{A}{2}$, vel $\frac{A}{2} - x$ ſemper ad hanc formam $x^2 - \frac{2Ax}{2} + \frac{A^2}{4}$ redigatur, a qua forma pendet radicis valor ex *Capite* citato; conſtat radicem hujuſce quadrati $x - \frac{A}{2}$, vel $\frac{A}{2} - x$ eſſe differentiam variabilis x & datæ $\frac{A}{2}$ falſo judicio exiſtimari : cum revera radix a quadrato hujuſce formæ extracta ſemper ſummam , numquam differentiam ſignificare poſſit . Itaque (vim veritatis vide) cum in Opuſculis meis aſſeruerim fieri poſſe, ut quæ creditur differentia ſit ſumma, veritas hæc ita male excepta fuerit, ut ex hujuſce unius invidia quicquid protuli indicta cauſſa proſcriptum fuerit. Tamen una hæc uſurpata Methodus, quæ ſub hac ſemper forma $x^2 - Ax + \frac{A^2}{4}$ quadratum $x - \frac{A}{2}$ effert, id unum inſcia oſtendit, radicem ſcilicet hujuſce quadrati numquam differentiam $x - \frac{A}{2}$, ſed ſemper ſummam $x + \left(-\frac{A}{2}\right)$ in calculo repræſentare : atque ita mordicus re & facto

cto veritati illi, quam in me impugnabant, adhæreſcit, ut penitus repudiet illam, quam unice veram eſſe profitebatur. Videant igitur utrum in me, quî Analyſim ab hiſce impedimentis expedire conor, atque omnia repurgatis principiis in ampliſſima luce collocare, an in ſe ipſos arma ſumpſerint qui hæc tamquam mea tam acriter exagitarunt.

§. 25. Quamobrem Methodus communis, ſi ſibi cohæreat, neceſſario repudiet oportet æquationem $x^2 - Ax + \frac{A^2}{4} = 0$, qua ſæpe utitur in calculis, cum repugnet penitus principiis, quæ tradit, quibus omnino interdicitur huic æquationi facultas fieri umquam poſſe zero. Æquatio enim hæc, ut proponitur a Methodo nota intra limites $4\frac{A^2}{4}$ & $(\infty)^2$ conſtituta ex duabus quantitatibus abſolutis, ſive *tranſcendentibus* zero, & infinito, nequit comparari, niſi in extremo limite maximorum $(\infty)^2$ Syſtematis baſis variabilis: in ceteris caſibus ſemper eſt finita. Methodus igitur communis tantum abeſt, ut repudiet illud abſolutum, quod omnium Recentiorum ſuffragio a calculo communi tamquam abſurdum proſcribitur; ut ipſe calculus communis huic unice in formula ſuperiori patrocinetur, oſtendatque in ipſa revera zero repugnans & abſurdum eſſe: neque aliam quantitatem tranſcendentem huic aptari poſſe niſi infinitum illud abſolutum: ut propterea Methodus hæc ſic conſiderata dicenda ſit Methodus *Infiniti Abſoluti*, a quo nimirum verſus inferiora uſque ad finitum deſcendens, nequit deprimi uſque ad zero abſolutum, cui proinde repugnat. Hæc animadverſa multum conferent ad ea, quæ de altera mea Methodo *Abſoluti Infiniti* in Præfatione indicata ſuo loco trademus. Æquatio tamen hæc, quæ cum communi calculo conciliari nequit, mire congruit cum iis, quæ mea Methodus tradidit, cum oſtenderit *Cap.* III. in æquationibus

$$x^2 + 2x\left(-\frac{A}{2}\right) + \left(-\frac{A}{2}\right)^2 = x^2 - 2.\overline{x - \frac{A}{2}}.\frac{A}{2} - \left(-\frac{A}{2}\right)^2 \text{ S. Y.}$$

$$\frac{A^2}{4} + 2\frac{A}{2}(-x) + (-x)^2 = \frac{A^2}{4} - 2.\overline{\frac{A}{2} - x}.x - (-x)^2 \text{ S. A.},$$

quæ identicæ videntur, radicem primi membri revera ſummam indicare $x + \left(-\frac{A}{2}\right)$ S. Y., $\frac{A}{2} + (-x)$ S. A.; radicem vero ſecundi differentiam $x - \frac{A}{2}$ S. Y., $\frac{A}{2} - x$ S. A: atque primas non eſſe æquales, ſed homologas ſecundis, ſignumque $=$ non æqualitatis hîc indicium, ſed vinculum, quo quantitates inter ſe neceſſariæ, ſive homologæ invicem copulantur, repræſentare, quemadmodum *Prop.* VI. *Cap.* III. *Libri* hujus declarat. Quibus intellectis omnis tollitur repugnantia in æquationibus hujuſmodi, quæ zero comparantur: facta

 enim

enim $x = \frac{A}{2}$, æquationes ſuperiores convertuntur in ſequentes

$$x^2 + 2x\left(-\frac{A}{2}\right) + \left(-\frac{A}{2}\right)^2 = 4\frac{A^2}{4} = \overline{x^2 - 2 . x - \frac{A}{2} . \frac{A}{2} - \frac{A^2}{4}} = (o)^2 \text{ S. Y.}$$

$$\frac{A^2}{4} + 2\frac{A}{2}(-x) + (-x)^2 = 4\frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{4} - 2 . \overline{\frac{A}{2} - x . x} - x^2 = (o)^2 \text{ S. A.}$$

in primo Syſtemate quadrata homologa ambo minima $\frac{4A^2}{4}$, $(o)^2$: in ſecundo quadrata homologa $\frac{4A^2}{4}$, $(o)^2$, primum maximum, ſecundum minimum. Conſule *Librum* hunc, & præcipue §§. 11, & 46. *Cap.* V. ejuſdem.

§. 26. Hinc patet quam longe a veritate aberret communis ſententia ab Auctore §. 15. tradita, quæ ſtatuit in æquationibus ſecundæ dimenſionis ortæ a producto duorum factorum $x + a$, $x + b$, in quibus neceſſario unam, vel alteram radicem eſſe zero vult, non poſſe ambas radices eſſe zero æquales, *niſi a & b ſint æquales*. Tantum enim abeſt, ut in hac radicum æqualium ſuppoſitione ambæ debeant æquari zero, ut ſpectata ratione, qua quamcumque quantitatem ad quadratum evehit communis Methodus, nulla omnino poſſit eſſe zero, niſi $a = b$ ſit ipſa zero. Si enim productum radicum æqualium $\pm x \pm \frac{A}{2}$ ſemper ſit, ut ipſa docet, vere quadratum $x^2 \pm 2x\frac{A}{2} + \frac{A^2}{4}$; quæ dicta ſunt manifeſte oſtendunt radicem $x \pm \frac{A}{2}$ numquam differentiam eſſe poſſe, ſed ſemper ſummam: in qua cum x minima nequeat eſſe in radice Syſtematis baſis datæ $\frac{A}{2} - x$ minor zero, minima radix deprimi ad ſummum poterit ad valorem $\frac{A}{2}$: atque ideo productum duarum radicum æqualium in quadrato $x^2 \pm 2x\frac{A}{2} + \frac{A^2}{4}$ a zero ſemper abludet, niſi eam quadrato huic formam tribuamus, quam eſſe neceſſariam, ut quadratum hoc zero fiat, §. antecedenti commemoravimus.

§. 27. Tandem ex dictis facile erit tutum judicium ferre de veritate doctrinæ §. 14. ab Auctore prolatæ: hîc ait, „ Quotieſcumque duas habeas quantitates, quæ ſimul additæ ſecundi termini producti alicujus exhibeant coeficientem, & invicem multiplicatæ dent ultimum illius terminum, ſtatim ambos producti factores obtinuiſti „. Hoc totum, quod dicit Auctor, lubrico illo, atque falſo fundamento nititur, quo ſtatuitur data ſumma radicum innoteſcere etiam productum; & viceverſa. Verum cum oſtenderimus in ſuppoſitione æquationis ortæ a producto duorum factorum inæqualium (quæ proinde naturam ſumit rectangularem) ex eadem ſumma $a + b$ infinita rectangula oriri poſſe,

pro

pro varia & infinita ratione, qua eadem ſumma $a + b$ in duas inæquales partes dividi poteſt; conſtat datæ ſummæ $a + b$ infinita rectangula reſpondere poſſe, atque ideo pro ab dato §§. 6, & 10. oſtendimus collocandum eſſe productum variabile $\pm$ MN, prout eſt Syſtema. Contra vero cum oſtenderimus *Cap.* antecedenti appoſitione etiam exempli numerici §§. 58, & ſeqq. idem productum ab infinito numero valorum $a + b$ oriri poſſe (ſufficit enim ut productum hoc minus ſit quadrato ſemiſummæ $a + b$ in Syſtemate baſis datæ, majus hoc quadrato in Syſtemate baſis variabilis); patet dato uno non poſſe alterum determinari niſi intra limites: ac proinde in data æquatione rectangulari unum, aut alterum variabile ſit oportet. Dato igitur tantum coeficiente ſecundi termini, non determinatur productum, ut falſo tradit communis Methodus, niſi etiam ſingulas ejus partes, in quas dividi poteſt integra $a + b$ innoteſcat. Sed cum hæc diviſio ex natura æquationis (§. 6. *Cap.* I. ac præcipue *Cap.* III, & ſeqq. *Libri* hujus) arbitrio relinquatur hac tantum lege, ut eadem ſumma in Syſtemate baſis datæ, differentia eadem in Syſtemate baſis variabilis intacta perſeveret; ex hac ipſa doctrina Auctoris §. 14. evidenter eruitur numquam productum ab ex ipſa æquatione determinari poſſe ad unum tantum valorem datum, ſed revera eſſe variabile intra limites Syſtematis, in quo eſt. Hinc illud alterum conſequitur (quod tamquam immane abſurdum oppoſitum mihi fuit) quamcumque æquationem ſecundæ dimenſionis oriri poſſe ab infinito numero factorum homologorum, ſive radicum, binis & binis homologis in ſe ductis: intra quos cum etiam contineantur illi, qui oriuntur a diviſione bifariam facta conſtantis $a + b$; patet factores hujuſmodi æquales innoteſcere. Tunc igitur a producto duorum factorum inæqualium variabilium tranſitus fit ad productum duorum æqualium factorum, qui fiunt dati, utpote ſinguli æquales $\frac{a+b}{2}$, ac proinde tranſitus fit ad quadratum, in quo caſu innoteſcit valor MN æqualis quadrato poſitivo $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, quod in Syſtemate baſis datæ æquale eſt rectangulo maximo $\left(\frac{a+b}{2}\right).\left(\frac{a+b}{2}\right)$; ideoque $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ debet eſſe quadratum maximum in æquatione quadratica, quæ erit

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a+b}{2}\right).(-x) + (-x)^2 = M^2 \text{ S. A.}$$

: in Syſtemate vero baſis variabilis æquale eſt rectangulo minimo $\left(\frac{a+b}{2}\right).\left(\frac{a+b}{2}\right)$; atque ideo æquatio quadratica $x^2 + 2x.\left(-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + \left(-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2$ $= M^2$ S. Y., ut ſuperius invenimus. Huc perventi ab iſtis quadratis iterum ad rectangula, ſive ad productum duorum factorum inæqualium, atque ideo varia-

riabilium tranſitus fieri poteſt; quemadmodum *Cap.* III, IV, & V. hujus *Libri* a nobis factum vides: in quibus oſtendimus quomodo a rectangulis ad quadrata, & ab iſtis ad rectangula rite & recte tranſitus fieri poſſit. Solutio vero communis Methodi tota nititur hac ſecunda ratione, cum ſemper ſupponat $x^2 + 2\left(\frac{a+b}{2}\right)x$ æquale quadrato x^2 plus duplo rectangulo $2\left(\frac{a+b}{2}\right)x$, cui proinde addendum eſt quadratum datum $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, ut quadratum completum efficiatur, ſive productum duorum factorum æqualium, in quo caſu tantum innoteſcit $MN = \left(\frac{a+b}{2}\right).\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = M^2$: (non ab ut male fit): ex hoc quadrato ad rectangula, atque ad inveniendas radices homologas prope infinitas methodus nota ſe transferat neceſſe eſt. Verum cum methodus nota ſemper tacite æquationem ad Syſtema baſis variabilis referat, ac ita male in tota ſolutione ſe gerat, ut hoc Capite oſtendi; ab hac male inſtituta ratione fallaciam, & falſitatem communis ſolutionis æquationum ſecundæ dimenſionis, verbo ea omnia impedimenta, & imaginarium ipſum, quibus toto hoc Opere infici calculum demonſtravi, proficiſci quis impoſterum jure miretur?

§. 28. Hæ, quas e primis Analyſeos Geometriæ recte applicatis notionibus toto hoc Opere deduximus, veritates prorſus novæ, & vulgatis opinionibus diſcrepantes, ſunt prima lineamenta Theoriæ æquationum ſecundæ dimenſionis in *Parte* II.ª longius producenda, quæ quantum conferant & ad æquationum omnium Theoriam infantem adhuc promovendam, & ad Analyſim quam dicunt tranſcendentem illuſtrandam, atque ampliandam in progreſſu hujus Operis manifeſtius patebit, atque palam fiet quam mirifice cum veritate conſentiat illud & in Opuſculis jam editis, & in hac Præfatione ſæpius a me dictum, Calculum ſcilicet, qui dicitur finitus, tantum abeſſe ut anguſtiſſimis hiſce limitibus, quibus tamquam vinculis hactenus obſtrictus fuerat, natura ſua concludatur, ut ex ipſo per omnem partem abſolutiſſimo veritatem ac vim ſuam depromant Methodi illæ omnes, quæ ſublimiores atque tranſcendentes vocantur, quæ non niſi relative tales hujuſce a me indicatæ, ut perficiantur, opem omnem requirunt. Ordinem Operis ſequuti ex his Theoriam æquationum tertii gradus ſuo loco deducemus: interim ſatis ſit animadvertere quam parum de methodo vulgo uſurpata in ſolvendis æquationibus ulterioris gradus, atque de aliis hujuſce Scientiæ methodis æquationum fundamento ſuperſtructis fidendum ſit, cum ſolutio æquationum primæ & ſecundæ dimenſionis, e quibus ſolutionem æquationum ulteriorum graduum Analyſis, quam habemus, derivat, tam male hactenus habita fuerit. Certe quidem, ſi ea quæ dixi aliquam veri ſimilitudinem habent, non æquum judicium feret ille, qui mea hæc veterum norma dimetiens ideo falſitatis damnet, quia a veteribus longe plurimum abludunt. Vetera enim, licet tempore, Auctorum numero & auctoritate probata, ſi veritati opponantur, recenti-

bus

bus hac una veritate munitis tandem cedant neceſſe eſt: atque ideo totum hoc negotium non auctoritate, ſed rationibus eſt expediendum. Hoc eo nimirum conſilio dico, ut oſtendam quantum rectæ rationi contrarium fuerit publice profiteri inutile prorſus eſſe, quæ protuli in meis Opuſculis ad nova hæc fulcienda, ſevera, ſed recta rationis lance expendere; cum illud unum ſatis ſit ad mea omnia nauci facienda hæc tot auctoritatibus & opinioni jam inveteratæ adverſari. Illud enim unum, quo utuntur, argumentum a numerorum exemplis deſumptum quemquam contra reponere profecto puderet, niſi in iis, in quibus miſere peccat, omnium auctoritate ſuſtineretur. Ajunt enim nihil rationibus opus eſſe, quando numerorum pro ſymbolis ſubſtitutione in meis formulis æquationum tertii gradus illi radicibus valores tribuuntur, qui minime ſatisfaciunt. Verum, repono; ſi exempla allata in multis poſſent deficere, profecto & nova a me exhibita, & exempla contra allata ratione, non auctoritate eſſent prius expendenda, ut utris ſtandum potius ſit cognoſcatur. Cur igitur in hac Scientia, quæ ſola ratione nititur, ratio exemplis erit poſtponenda?

§. 29. Sed profer exemplum. Sit, inquiunt, $x = 1$, $x = 2$, $x = -3$, ex quibus oriuntur $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$: hæ in ſe ductæ dant æquationem compoſitam tertii gradus $x^3 - 7x + 6 = 0$, quæ certe quidem contineat oportet tres ſuperiores radices reales rationales, ex quarum producto conflata fuit. At in meis formulis facta horum numerorum ſubſtitutione numquam erui poſſunt hujuſmodi radices; ergo formulæ a me propoſitæ, atque methodus ipſa, & quicquid protuleram omnia tamquam falſa hoc ſolum nomine jure erunt repudianda. Hoc uno, vel ſimili exemplo a numeris petito non ſolum infimæ notæ, ſed celebriores Analyſtæ conatus omnes in hoc negotio ſemper, ratione alia poſthabita, refregerunt. Verum, ut omittam ſatis conſtare ex meis principiis, æquationes tertii gradus eamdem naturæ & originis ſimilitudinem, quam illæ ſecundæ dimenſionis habere poſſe, & primas duas æquationes ſimplices eſſe limitis ad utraque Syſtemata referendas, ipſamque vero $x + 3$ ad Syſtema tantum baſis variabilis pertinere, quæ falſo zero comparatur, cum non niſi in extremo maximorum limite infinito illi abſoluto, ideſt inverſo zero, quod creditur abſurdum, æquari poſſit; ex quibus omnibus in ipſa ſtatim æquationum tertii gradus geneſi conſtituenda multum erroris atque fallaciæ irrepere poſſit; ut hæc, inquam, & alia omittam ſuo loco perſequenda; nemo non videt, in ſingulis æquationibus ſimplicibus, quæ ſingulæ æquales zero ponuntur, variabiles x, licet eodem ſymbolo efferantur, eſſe inter ſe omnino diverſas: ut enim 1 non eſt æquale 2, vel -3; ita neutra x æqualis poteſt eſſe alteri x. Quo jure igitur, aut qua lege in formula ex earum multiplicatione orta hujuſmodi variabiles æquales & identicæ ſumuntur ita, ut primus terminus ponatur cubus $= x^3$, non $x \cdot x' \cdot x''$, ſecundus $\overline{3 - 3} \cdot x^2 = 0$, & x^2 quadratum, non $= -1 \cdot x' \cdot x'' - 2 \cdot x \cdot x'' + 3\, x \cdot x'$, tertius vero $-7x$, non $(-1) \cdot (-2)\, x'' - 1 \cdot 3 \cdot x' - 2 \cdot 3 \cdot x$, qui tamen ultimi vere a producto ſimplicium oriuntur? Nonne ſi variabiles x diverſæ ponuntur in ſimplicibus, & identicæ in compoſita, erit $1 = 2 = -3$, ſi $x = x' = x''$; vel ſi unus vel alter tantum unius variabilis valor ſumatur, ſcire velim cur potius unus ceteris ſit ante-

anteponendus? Nonne igitur vides hac una variabilium identitate, quæ in linearibus diverſæ ſumptæ fuerant, ad aliam omnino æquationem compoſitam te tranſferri, quæ omnino diverſa ſit neceſſe eſt ab illa, quam productum trium æquationum ſimplicium conſtituebat, atque ideo diverſas eſſe debere radices hujuſce æquationis compoſitæ, quas quæris? Quod ſi mutata conditione aliam omnino æquationem compoſitam tibi efformas; quid mirum ſi fruſtra in hac requiras primas radices illas ſimplices, quas ab ipſa ejeceras? Et ſane, iiſdem valoribus, quos habent variabiles in ſimplicibus, in compoſita retentis, numquam a compoſita eliminare poteris ſecundum terminum (qui non eſt amplius zero), niſi loco incognitarum valores datos a ſimplicibus ſubſtituas: at tunc mutatur quartus terminus, qui non eſt amplius *6*, ſed 24: ut ſilentio prætéream cetera ſane graviſſima, quæ circa vulgarem æquationum tertii gradus ſolutionem ſuo loco erunt notanda. Illud hîc tantum addo Methodum Cardanicam recto ſane conſilio non ab æquatione compoſita trium diverſarum variabilium ad æquationem compoſitam unius variabilis, ſed ab æquatione compoſita unius variabilis, ideſt a cubo tranſitum facere, eliminando ſecundum terminum ope ſubſtitutionis, ad radices inæquales eruendas: in exemplo vero allato contra ab æquatione compoſita trium diverſarum radicum tranſitus fit ad æquationem compoſitam unius tantum variabilis: cujus tamen tranſitus leges cum adhuc ignorentur (quemadmodum a methodo communi, quæ ſemper a quadrato ſolutionem incipit, oſtendimus ignorari modum, quo a rectangularibus ſecundæ dimenſionis ad quadrata legitimus fiat tranſitus); luce clarius patet tantum abeſſe ut hujuſmodi exempla rationibus atque Theoriæ ſint anteponenda, ut ipſa exempla allata ſevera trutina ſint examinanda, atque novis legibus reformanda, quas nova hac Theoria ſenſim, ac per gradus promere, atque ratiocinio firmare conor. Videant igitur quid momenti habeat hoc unum argumentum ab exemplis numericis tam male deſumptum ad labefactanda ea omnia, quæ protuli, ut ſtatuant utrum ea, quæ nunc profero, ſint tandem benignius excipienda, atque qua par eſt meditatione excutienda.

§. 30. Quæ a me nova hactenus explicata *Parte* hac I.ª continentur, ſunt illa meo quidem judicio prima fundamenta admodum neceſſaria ad eas omnes tum firmandas, tum communi quodam vinculo connectendas multiplices ac ſingulares *Methodos*, quas elegantia ſane & artificio mirabiles, at a primis, a quibus neceſſario pendent, principiis avulſas Analyſis quomodocumque ſecuta eſt. Nihil igitur mirum, ſi hæc Scientia, humanarum quidem Scientiarum omnium ſublimiſſima, prodigioſis potius ſaltibus, quam perpetuis progreſſibus comite evidentia ſuos curſus fecerit: quippe quæ multis quidem peculiaribus auxiliis identidem refecta fuerit, at nullam umquam habuerit principio infuſam, & ad omnes partes pertinentem vim generalium Elementorum. Jam vero *NOVA* iſthæc ANALYSEOS ELEMENTA ejuſmodi eſſe reor, ut iis nihil aliud deeſſe poſſit, quam faber non imus, qui ea tractare, & in omnem partem verſare ſciat, ut omnia ac ſingula apta & nexa inter ſe ſibi invicem lucem afferant ad eas ambiguitatis nubes removendas, quæ paſſim Analyſtarum oculis ſe ſe ſolent offundere, & ad plurima aditum intercludere. Ego certe, quantum eſt ſitum in me, ſtudio omni contendam ut hæc a me primum excogitata ad communes uſus

cum.

cum utilitate traducam, ea ſcilicet in progreſſu Operis adhibendo tum ad quorumdam Problematum ſolutionem, tum ad tractationem æquationum ſuperiorum graduum, & ad altiorum Theorematum evolutionem: tum vero maxime ad leges rectius firmandas, & ad vim quarumdam Methodorum dilatandam, quæ & ſublimiores eſſe putantur, & uſurpari ſolent ſine certa ratione, ſed tantummodo coeca Calculi neceſſitate ducente: quæ quidem neceſſitas ab evidentia disjuncta quantum fallax ſæpe ſit, & erroribus obnoxia ſatis arbitror me hoc Opere declaraſſe. Atque hoc idem natura ſua magnum atque difficile cum a me bona fide ſuſceptum fuerit, ſolo veritatis amore impellente, jam ſpero futurum, ut tandem ſapientiores atque humaniores Analyſtas commoveat ad hæc jam edita, qua par eſt meditatione excutienda; non auctoritate infirmanda, aut quod iniquius eſſet, conviciis (ut factum fuit) exagitanda: ut ſi falſa ſint vi argumentorum in ipſo ortu antequam ſuccreſcant evellant, atque eradicent, ne quod reliquum eſt in hac Scientia intactum ac purum perniculoſa contagione inficiatur: at ſi vera, animos mihi addant, atque Opus a me inchoatum urgeant, ac in melius provehant, nec patiantur me in re tanti momenti laborantem a quorumdam ignorantia, ac malevolentia amplius injuſte vexari. „ Nos enim (fas ſit ſine ulla te„ meritatis nota verbis Baconis in Præf. ad *Novum Organum* finem huic I.ª *Par„ ti* imponere) ſi qua in re vel male credidimus, vel obdormivimus, & mi„ nus attendimus, vel defecimus in via, & inquiſitionem abrupimus; nihilo„ minus iis modis res nudas & apertas exhibemus, ut errores noſtri, antequam „ Scientiæ maſſam altius inficiant, notari & ſeparari poſſint: atque etiam ut fa„ cilis & expedita ſit laborum noſtrorum continuatio. „

Errata	Corrige
V not. (*a*) lin. 14 1773	1783
XVII not. (*c*) lin. 28 $\frac{\sqrt{-1}}{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$	$\frac{\sqrt{-1}}{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{1}$
XXXIV lin. 19 univerſum	inverſum
Pag. 56 lin. 3 A C = *a*	A B = *a*
73 lin. ult. *fig.* (10)	*fig.* (11)
115 lin. 26 B A + A D	B A + A d
116 lin. 2 B A + B d	B A + A d
151 lin. 3 a centro D	a centro C
170 lin. 9 A B = B C	A B = B A
203 lin. 11 licet $\frac{a}{2}$	licet x
225 lin. 17 d E' : D E	d e' : D E
255 lin. 12 valorem $\frac{a}{4}$	valorem $\frac{a}{2}$
256 lin. 14 $\frac{a^2}{2} - m^2$	$\frac{a^2}{4} - m^2$
256 lin. 15 $\frac{a}{4} + \frac{a}{2} - n \cdot n$	$\frac{n}{2} + \frac{a}{2} - n \cdot n$
304 lin. 34 2 B D . A B	2 B D . A D
430 lin. 6 non niſi ſecundo modo	non niſi primo modo
495 lin. 3 $(NN)^{\frac{2}{2}}$	$(MN)^{\frac{2}{2}}$
499 lin. 23 ex hyperbola	& hyperbola
514 lin. 31 $n = a$	$m = a$

Errores in dictione, ſi qui ſunt, benignus corrigat Lector

NOI RIFORMATORI

DELLO STUDIO DI PADOVA.

AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del *P. F. Franceſco Antonio Benoffi*, Inquiſitor Generale del Sant' Offizio di *Padova*, nel Libro intitolato: *Nova Analyſeos Elementa Auctore Joanne Baptiſta Nicolai*, *Tomus Primus &c. MS.* non vi eſſer coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Atteſtato del Segretario Noſtro, niente contro Principi, e Buoni Coſtumi, concediamo Licenza a *Niccolò Bettinelli* Stampator *di Venezia*, per *Padova*, che poſſi eſſere ſtampato, oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Dat. lì 16. Gennaro 1785.

{ PIERO BARBARIGO RIF.
{ FRANCESCO MOROSINI 2°. CAV. PROC. RIF.
{ GIROLAMO ASCANIO GIUSTINIAN CAV. RIF.

Regiſtrato in Libro a Carte 177. al Num. 1598.

Giuſeppe Gradenigo Segr.

18. Gennaro 1785.

Regiſtrato a Carte 131. in libro eſiſtente preſſo gl' Illuſtriſſimi, ed Eccellentiſſimi Signori Eſecutori contro la Beſtemmia.

Giannantonio Maria Coſſali Nodaro.